

УДК 532.516

© 2002 г. В.Г. Жаринов

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ И ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ ОКОЛО ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассматриваются пространственные течения несжимаемой жидкости, параметры которых зависят от двух координат и времени. Поверхности тока таких течений – цилиндрические поверхности. Уравнения неразрывности и Навье–Стокса преобразуются к соотношениям, одно из которых – уравнение для функции тока, другое – интеграл уравнений, связывающий давление и функцию тока, третье – линейное уравнение для проекции вектора скорости на ось, параллельную образующим цилиндрических поверхностей. Рассмотрение вопросов моделирования течений на основе точных решений уравнений Навье–Стокса и Эйлера сопровождается примерами. В случае нестационарного невязкого течения приводятся соотношения для распределения параметров течения в канале, образованном гиперболическими цилиндрами. Линии тока этих течений расположены на боковых поверхностях гиперболических цилиндров и пересекают образующие цилиндров под некоторыми непрямыми углами. В случае стационарного невязкого течения рассмотрено обтекание кругового цилиндра и течение жидкости внутри эллиптического цилиндра. На обтекаемом круговом цилиндре линии тока располагаются поперек цилиндра (проекция вектора скорости на ось координат, параллельную образующей цилиндра, равна нулю). На удалении от обтекаемого цилиндра линии тока располагаются также на цилиндрических поверхностях, но не поперек, а под некоторыми непрямыми углами к образующим.

Рассматриваются вязкие пространственные течения, обладающие той или иной симметрией. В случае радиальной симметрии линиями тока являются винтовые линии. Неплоское течение Куэтта между параллельными подвижными плоскостями характерно тем, что векторы скорости, будучи расположенными в одной плоскости, коллинеарны, а векторы скорости в параллельных плоскостях неколлинеарны. Приводятся соотношения для вязких стационарных пространственных течений с применением известных соотношений, полученных для функции тока плоских течений.

1. Общие соотношения. В прямоугольной декартовой системе координат x_1, x_1, x_3 рассмотрим пространственное течение вязкой несжимаемой жидкости, вектор скорости которого $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ зависит от времени t и двух пространственных координат: $u_k = u_k(t, x_1, x_2)$ ($k = 1, 2, 3$). Введя функцию тока $\psi = \psi(t, x_1, x_2)$ ($u_1 = \partial\psi/\partial x_2$, $u_2 = -\partial\psi/\partial x_1$), из уравнений Навье–Стокса будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} \right) = (-1)^l \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_{3-l}} + \frac{\partial \psi}{\partial x_l} \Delta \psi + (-1)^{l+1} v \frac{\partial}{\partial x_{3-l}} \Delta \psi \equiv f_l(t, x_1, x_2), \quad l = 1, 2 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{p}{\rho} = \frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - v \Delta u_3 \equiv f_3(t, x_1, x_2) \quad (1.2)$$

$$v = \text{const}, \quad \rho = \text{const}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad w^2 = u_1^2 + u_2^2$$

Уравнения (1.1) дают

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \quad (1.3)$$

что приводит к уравнению для функции тока

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x_2} = \nu \Delta \Delta \psi \quad (1.4)$$

Пусть $\psi = \psi(t, x_1, x_2)$ – решение уравнения (1.4). Рассматривая теперь уравнения (1.1) как систему уравнений с частными производными относительно неизвестной функции $p/\rho + w^2/2$, после интегрирования уравнения (1.1) при $l = 1$ получим

$$\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = \int_{x_{10}}^{x_1} f_1(t, x_1, x_2) dx_1 + \gamma(t, x_1, x_2) \quad (1.5)$$

Учитывая равенство (1.3), из уравнения (1.1) при $l = 2$ найдем

$$\gamma = \int_{x_{20}}^{x_2} f_2(t, x_{10}, x_2) dx_2 + \beta(t, x_3) \quad (1.6)$$

В соотношениях (1.5), (1.6) x_{10}, x_{20} – некоторые известные координаты.

Выразив из (1.5), (1.6) p/ρ и подставив полученное выражение в уравнение (1.2), будем иметь

$$\frac{\partial \beta(t, x_3)}{\partial x_3} = f_3(t, x_1, x_2)$$

Это равенство, левая часть которого зависит только от t и x_3 , а правая – только от t и x_1, x_2 , возможно лишь в случае, если обе его части не зависят от координат и представляют собой одну и ту же величину, зависящую лишь от t . Обозначим эту величину через $c_1(t)$. Это означает, что следует считать

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \frac{p}{\rho} = c_1(t) \quad (1.7)$$

Теперь вместо уравнений (1.2), (1.5) запишем

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = -c_1(t) + \nu \Delta u_3 \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = & \int_{x_{10}}^{x_1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \Delta \psi + \nu \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_2} \right) dx_1 + \\ & + \int_{x_{20}}^{x_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \Delta \psi - \nu \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x_1} \right) dx_2 + c_1(t)x_3 + c_2(t) \end{aligned} \quad (1.9)$$

После интегрирования левого равенства в дифференциальных уравнениях линий тока (t – параметр)

$$\frac{\partial x_1}{\partial \psi / \partial x_2} = \frac{dx_2}{-\partial \psi / \partial x_1} = \frac{dx_3}{u_3(t, x_1, x_2)} \quad (1.10)$$

получим первый интеграл

$$\psi(t, x_1, x_2) = k_1 \quad (1.11)$$

Это соотношение определяет неявно заданную функцию x_2 .

Теперь, взяв первую и последнюю дроби в (1.10), найдем

$$x_3 - \int \frac{u_3(t, x_1, x_2(t, x_1, k_1))}{\partial \psi / \partial x_2} dx_1 = k_2 \quad (1.12)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(t, x_1, x_2(t, x_1, k_1)) \right)$$

Первые интегралы (1.11), (1.12) образуют общий интеграл системы (1.10).

Соотношение (1.11) определяет в каждый момент времени цилиндрическую поверхность тока с образующими, параллельными оси x_3 . Положение координаты x_3 линии тока в каждый момент времени при заданной величине k_1 (т.е. для заданной цилиндрической поверхности) определяется с помощью соотношения (1.12). При этом постоянную k_2 найдем, задав какое-либо сечение $x_3 = \text{const}$ и точку на поверхности тока (1.11) в этом сечении.

Таким образом, соотношения (1.4), (1.8), (1.9) позволяют моделировать течение жидкости около цилиндрических поверхностей.

Пусть, в частности, ψ – функция с разделенными переменными

$$\psi = A(t)\xi(x_1, x_2) \quad (1.13)$$

Тогда вместо равенства (1.11) запишем

$$\xi(x_1, x_2) = k_1$$

В этом случае поверхности тока, определяемые этим уравнением при различных k_1 , с течением времени не изменяются.

В стационарном случае первым интегралом вместо (1.11) будет

$$\psi(x_1, x_2) = k_1 \quad (1.14)$$

2. О моделировании нестационарных невязких течений. Рассматривая невязкое течение, следует в соотношениях (1.4), (1.8) отбросить члены с множителем v .

Очевидным решением уравнения (1.4) в этом случае является гармоническая функция ψ по переменным x_1 и x_2

$$\Delta \psi = 0 \quad (2.1)$$

В качестве простого примера возьмем функцию

$$\psi = A(t)x_1x_2 \quad (2.2)$$

удовлетворяющую уравнению (2.1). Проинтегрировав следующую, соответствующую уравнению в частных производных (1.8) систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{A(t)x_1} = \frac{dx_2}{-A(t)x_2} = \frac{du_3}{-c_1(t)}$$

при условии $A(t) = c_1(t)$, получим общее решение уравнения (1.8) в данном случае

$$\Phi(\xi, \eta, \varsigma) = 0 \quad (2.3)$$

где

$$\xi = x_1x_2, \quad \eta = u_3 + \int c_1(t)dt, \quad \varsigma = u_3 + \ln |x_1|$$

В частности, если Φ – линейная функция аргументов η, ς имеем

$$u_3 = f(x_1x_2) - \frac{1}{2} \left(\int c_1(t)dt + \ln |x_1| \right) \quad (2.4)$$

где f – произвольная непрерывно-дифференцируемая функция.

Используя выражение (2.2), получим

$$u_1 = A(t)x_1, \quad u_2 = -A(t)x_2 \quad (2.5)$$

и из равенства (1.9) найдем

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{c_1^2(t)}{2}(x_1^2 + x_2^2) - c_1'(t)\left(\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_{10}^2}{2}\right) + c_1'(t)\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_{20}^2}{2}\right) + c_1(t)x_3 + c_2(t) \quad (2.6)$$

Общий интеграл системы (1.10) в данном случае имеет вид

$$x_1 x_2 = k_1$$

$$x_3 - \frac{1}{c_1(t)}\left(f(k_1) - \frac{1}{2} \int c_1(t) dt\right) \ln |x_1| + \frac{1}{4c_1(t)} \ln^2 |x_1| = k_2$$

Соотношения (2.2), (2.4)–(2.6) можно использовать для определения распределения параметров нестационарного невязкого течения в канале, образованном гиперболическими цилиндрами

$$x_1 x_2 = m_1, \quad x_1 x_2 = m_2 \quad (m_1 \leq k_1 \leq m_2)$$

образующие которых параллельны оси x_3 (при заданных $c_1(t)$, $c_2(t)$, $f(x_1 x_2)$).

3. О моделировании стационарных течений на основе гармонических функций. Рассмотрим стационарное невязкое течение. Общим решением уравнения (1.8) в этом случае будет

$$u_3 = f(\psi(x_1, x_2)) - c_1 \varphi(x_1, \psi(x_1, x_2)) \quad (3.1)$$

где

$$\varphi(x_1, k_1) = \int \frac{dx_1}{\partial \psi / \partial x_2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}(x_1, x_2(x_1, k_1)) \right)$$

$\psi = \psi(x_1, x_2)$ – решение уравнения (1.4), $f(\psi)$ – произвольная непрерывно-дифференцируемая функция, функция $x_2 = x_2(x_1, k_1)$ определяется соотношением $\psi(x_1, x_2) = k_1$.

Соотношение (1.12) в данном случае имеет вид

$$x_3 + \frac{c_1}{2} \varphi^2(x_1, k_1) - f(k_1) \varphi(x_1, k_1) = k_2$$

Очевидным решением уравнения (1.4) будет гармоническая функция ($\Delta \psi = 0$). Учитывая это, для моделирования рассматриваемых пространственных течений можно воспользоваться, в частности, решениями хорошо изученных задач о потенциальном плоском течении [1].

Рассмотрим, например, задачу об обтекании кругового цилиндра радиуса a . В качестве решения уравнения (1.4) возьмем [1]

$$\psi = Ux_2 \left(1 - \frac{a^2}{x_1^2 + x_2^2} \right), \quad U = \text{const} \quad (3.2)$$

Положив в соотношении (3.1) $c_1 = 0$, можно принять, в частности,

$$u_3 = A\psi, \quad A = \text{const} \quad (3.3)$$

С помощью выражений (3.2), (3.3) найдем распределение скоростей, а с помощью соотношения (1.9), где следует положить

$$\Delta\psi = 0, \quad \partial^2\psi / \partial t \partial x_1 = 0, \quad \partial^2\psi / \partial t \partial x_2 = 0$$

найдем распределение давлений.

Направляющими линиями цилиндрических поверхностей тока в данном случае являются кривые третьего порядка

$$x_2 \left(1 - \frac{a^2}{x_1^2 + x_2^2} \right) = k_1$$

На поверхности цилиндра $\psi = 0$.

Отметим, что гармоническая функция ψ – решение уравнения (1.4) также при учете вязкости; функция (3.3) при $c_1 = 0$ в стационарном случае является решением уравнения (1.8) при учете вязкости. Поэтому, очевидно, гармоническую функцию ψ и функцию (3.3) можно использовать для моделирования пространственных вязких стационарных течений жидкости в областях, ограниченных поверхностями тока $\psi(x_1, x_2) = k_1$. Хотя функции ψ и u_3 – гармонические, течение будет вихревым.

4. О моделировании стационарных течений на основе бигармонических функций. Если

$$\Delta\psi = c, \quad c = \text{const} \quad (4.1)$$

то уравнение (1.4) тождественно выполняется. Оно аналогично уравнению, описывающему течение вязкой жидкости в неподвижной цилиндрической трубе.

Учитывая это, для моделирования рассматриваемых пространственных течений невязкой жидкости в цилиндрических трубах при различных формах сечения можно воспользоваться известными решениями краевых задач для уравнения (4.1) [2–4].

Рассмотрим, например, стационарное невязкое течение жидкости внутри неподвижного эллиптического цилиндра

$$x_1^2 / a^2 + x_2^2 / b^2 = 1$$

В этом случае решением уравнения (4.1), принимающим нулевое значение на границе области, будет функция

$$\psi = M \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right), \quad M = -\frac{ca^2b^2}{2(a^2 + b^2)} \quad (4.2)$$

Отсюда следует, что

$$u_1 = -2Mx_2 / b^2, \quad u_2 = 2Mx_1 / a^2$$

Ограничиваясь положительными значениями x_2 , найденными с помощью соотношения (4.2) ($\psi(x_1, x_2) = k_1$), получим функцию ϕ , входящую в формулу (3.1) для u_3 в данном случае

$$\phi(x_1, k_1) = -\frac{ba}{2M} \arcsin \frac{x_1}{a\sqrt{1 - k_1 / M}}$$

Для давления из формулы (1.9) получим

$$\frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = c\psi(x_1, x_2) + c_1x_3 + \text{const} \quad (4.3)$$

Бигармоническая функция $\psi(x_1, x_2)$, удовлетворяющая уравнению (4.1), является также решением уравнения (1.4) при учете вязкости. Функция (3.3) при $c_1/(\nu A) = c$

является решением уравнения (1.8) при учете вязкости. Поэтому, очевидно, указанную бигармоническую функцию ψ и функцию (3.3) можно использовать для моделирования пространственных вязких стационарных течений жидкости в областях, ограниченных поверхностями тока $\psi(x_1, x_2) = k_1$.

Вернувшись к стационарным невязким течениям, рассмотрим течение в цилиндрической трубе кругового сечения при наличии вдува и отсоса жидкости через стенки. Граничное условие в данном случае имеет вид

$$\psi = f(\theta) \quad \text{при} \quad r = a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

где r, θ – полярные координаты ($x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta$), a – радиус цилиндра. Участки цилиндра (например, при $0 < \alpha_1 \leq \theta \leq \alpha_2 < 2\pi$), где $f(\theta) \equiv 0$, соответствуют непроницаемым стенкам.

Решение будем искать в виде

$$\psi = w + cr^2/4$$

где w – решение однородного уравнения $\Delta w = 0$, удовлетворяющее условию

$$w(a, \theta) = \varphi(\theta), \quad \varphi(\theta) = f(\theta) - ca^2/4 \quad \text{при} \quad r = a$$

Используя известное решение для функции w [5], запишем искомое решение

$$\psi(r, \theta) = \begin{cases} \frac{c}{4}r^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\zeta) \frac{a^2 - r^2}{r^2 - 2ar \cos(\theta - \zeta) + a^2} d\zeta, & r < a \\ \frac{c}{4}a^2 + \varphi(\theta), & r = a \end{cases} \quad (4.4)$$

Для u_3 можно принять, в частности, формулу (3.3). Для давления будем иметь формулу (4.3), где функция ψ определяется по формуле (4.4).

5. О моделировании симметричных течений. Рассматривая стационарное течение вязкой жидкости, обратимся к случаям, когда течение обладает той или иной симметрией.

Пусть, например,

$$\psi = \psi(r), \quad u_3 = u_3(r) \quad \left(r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)$$

Тогда левые части уравнений (1.4), (1.8) тождественно обращаются в нуль и вместо них будем иметь

$$\Delta \Delta \psi = 0, \quad \Delta u_3 = c_1 \quad (5.1)$$

Функция $\psi = \psi(r)$, являющаяся решением первого уравнения (5.1), используется в плоском случае ($u_3 \equiv 0$) для описания стационарного движения жидкости между вращающимися соосными цилиндрами [2] или в каналах, образованных частями соосных круговых цилиндров [6].

Функция, являющаяся решением второго уравнения (5.1), использовалась [7] для описания чисто продольного перемещения жидкости ($\psi \equiv 0$) в кольцевом канале между неподвижными цилиндрами, вызываемого разностью давлений на концах канала.

Совместное применение указанных решений уравнений (5.1) позволяет рассматривать винтовое движение вязкой жидкости в соответствующих каналах, вызываемое вращением цилиндров и разностью давлений на концах канала.

Пусть далее $\psi = \psi(\theta), u_3 = u_3(\theta)$ (θ – полярный угол). В этом случае уравнение (1.4) принимает вид

$$u'' + 4u + u^2/v - c = 0$$

где $u = \psi', c = \text{const}$.

На основе решения этого уравнения, полученного непосредственно из уравнений Навье–Стокса, Гамелем было рассмотрено течение в плоском диффузоре [2] ($u_3 \equiv 0$) с уравнениями стенок $\theta = \pm\alpha/2$.

Положив в уравнении (1.8) $c_1 = 0$, найдем

$$u_3 = A\theta + B, \quad A, B = \text{const}$$

Величины A, B получим, считая стенку $\theta = -\alpha/2$ неподвижной, а стенку $\theta = \alpha/2$ – перемещающейся в продольном направлении с постоянной скоростью U :

$$u_3 = U(\theta/\alpha + 1/2) \quad (5.2)$$

Совместное применение соотношений Гамеля и соотношения (5.2) позволяет рассматривать пространственное движение жидкости в канале с непараллельными плоскими стенками.

Пусть теперь $\psi = \psi(x_2)$, $u_3 = u_3(x_2)$. Учитывая, что $u_1 = \partial\psi/\partial x_2$, для u_1 получим с помощью уравнения (1.4) решение в виде квадратного трехчлена. Для u_3 из уравнения (1.8) решение получим также в виде квадратного трехчлена. Каждое из этих соотношений в отдельности ($u_1 = u_1(x_2)$, $u_3 \equiv 0$; $u_1 \equiv 0$, $u_3 = u_3(x_2)$) описывает плоское течение Куэтта. Совместное применение решений $\psi = \psi(x_2)$, $u_3 = u_3(x_2)$ уравнений (1.4), (1.8) позволяет рассмотреть неплоское течение Куэтта между параллельными подвижными плоскостями. Для этого граничные условия для u_1 и u_3 на стенках следует взять такими, чтобы векторы (a_1, a_3) и (b_1, b_3) были неколлинеарными, где a_1, b_1 – значения u_1 соответственно на нижней и верхней плоскостях, a_3, b_3 – значения u_3 соответственно на нижней и верхней плоскостях.

6. О моделировании вязких течений. Положив в уравнении (1.8) $c_1(t) \equiv 0$ и

$$u_3 = M\Delta\psi + N; \quad M, N = \text{const} \quad (6.1)$$

получим уравнение, идентичное (1.4). Таким образом, решение уравнения (1.4) совместно с соотношением (6.1) позволяет моделировать пространственное вязкое течение жидкости.

Рассматривая стационарное вязкое течение, в качестве решения уравнения (1.4) возьмем функцию [2]

$$\psi = f(\varphi) + 2\nu a\chi$$

$$\varphi = -\frac{2(a \ln r + b\theta)}{a^2 + b^2}, \quad \chi = \frac{2(b \ln r - a\theta)}{a^2 + b^2}; \quad a, b = \text{const}$$

Следующее уравнение [2]:

$$\varphi - \varphi_0 = \int [bu^3/(3\nu) + (a^2 - b^2)u^2 + 2c_1u + c_2]^{-1/2} du$$

определяет φ как некоторую функцию от u . В этом уравнении $u = f'(\varphi)$; φ_0, c_1, c_2 – постоянные.

Пусть, в частности, $\varphi_0, c_1, c_2 = 0$, $a = b$. Тогда получим явное представление решений уравнений (1.4), (1.8)

$$\psi = -\frac{12\nu}{b}\varphi^{-1} + 2\nu b\chi$$

$$\varphi = -\frac{\ln r + \theta}{b}, \quad \chi = \frac{\ln r - \theta}{b}, \quad \varphi < 0 \quad (r > 1, \theta > 0, b > 0)$$

$$u_3 = M\Delta\psi + N = \frac{48M\nu}{b^3} \frac{1}{r^2} \varphi^{-3} + N$$

Зная ψ , найдем $u_\theta = -\partial\psi/\partial r$, $u_r = r^{-1}\partial\psi/\partial\theta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
3. *Milne-Thomson L.M.* Theoretical Hydrodynamics. L: Macmillan; N.Y.: St Martin's Press, 1960 = Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 847 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
6. Жаринов В.Г. Стационарное вязкое течение жидкости в плоских каналах, образованных частями соосных круговых цилиндров // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 516–519.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретические физика. Т. 6, Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Казань

Поступила в редакцию
10.VIII.2000