

УДК 532.516

© 2002 г. А.Н. Крайко

О ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ СМАЗКИ ДЛЯ РАДИАЛЬНЫХ ПОДШИПНИКОВ

В приближении несжимаемой или слабо сжимаемой смазки рассматриваются вопросы постановки задачи о течении в зазоре замкнутого гидродинамического радиального подшипника в случае “цилиндрического” зазора. Цилиндричность зазора определяется тем, что форма ограничивающей его неподвижной внешней поверхности, которую образует собственно подшипник, не зависит от координаты, отсчитываемой вдоль оси вращающегося шипа, поэтому высота зазора – функция только угловой переменной. Основное внимание уделяется подшипникам большой (в пределе бесконечной) относительной длины в осевом направлении. Получено условие, которое в одномерном приближении учитывает эффекты, связанные с истечением смазки из открытых торцевых сечений при наличии (или отсутствии) питающей щели. В частных случаях из него следуют известные, используемые при рассмотрении подшипников бесконечной длины “условие питающей щели” и интегральное равенство, часто называемое “условием Элрода–Бургдорфера”. Рассмотренные вопросы представляют интерес, в частности, при решении в одномерном приближении вариационных задач оптимизации гидродинамических подшипников.

1. Уравнения и условия для подшипника конечной длины. Пусть в неподвижных цилиндрических координатах z°, r°, θ с осевой переменной z° , отсчитываемой от плоскости симметрии радиального подшипника (фиг. 1), высота зазора h° – функция только угловой переменной θ , т.е. $h^\circ = h^\circ(\theta)$, шип вращается с угловой скоростью ω° против часовой стрелки, R° – его радиус, и $2B^\circ$ – длина подшипника. Индексом “градус” отметим размерные величины. Если $x^\circ = \theta R^\circ$ – координата, отсчитываемая от плоскости $\theta = 0$ вдоль поверхности шипа в направлении его вращения, p° – давление, T° – температура, $\rho^\circ = \rho^\circ(p^\circ, T^\circ)$ – плотность и $\mu^\circ = \mu^\circ(T^\circ)$ – вязкость смазки и $U^\circ = \omega^\circ R^\circ$, то в приближении теории смазки уравнение, определяющее при $T^\circ = T_*^\circ = \text{const}$ распределение давления $p^\circ = p^\circ(x^\circ, z^\circ)$ в смазочном слое (уравнение Рейнольдса), имеет вид [1]

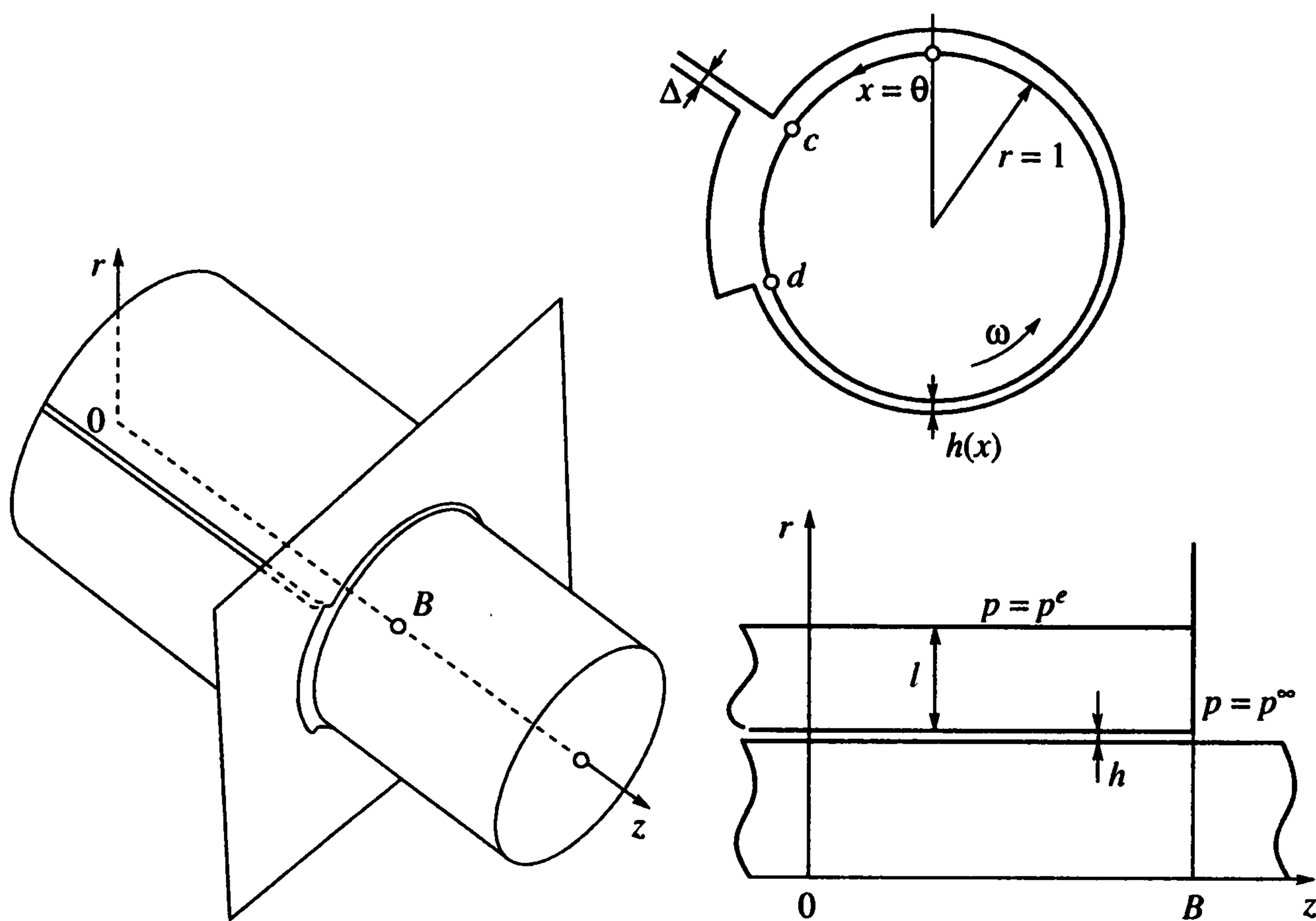
$$(\rho h^3 p_x)_x + (\rho h^3 p_z)_z - (\rho h)_x = 0 \quad (\varphi_x = \partial \varphi / \partial x, \quad \varphi_z = \partial \varphi / \partial z) \quad (1.1)$$

При получении этого уравнения введены безразмерные переменные и параметр γ

$$x = \frac{x^\circ}{R^\circ}, \quad z = \frac{z^\circ}{R^\circ}, \quad B = \frac{B^\circ}{R^\circ}, \quad h = \frac{h^\circ}{h_*^\circ}, \quad \rho = \frac{\rho^\circ}{\rho_*^\circ}, \quad p = \frac{p^\circ}{\gamma \rho_*^\circ U^{\circ 2}}, \quad \mu = \frac{\mu^\circ}{\mu_*^\circ} = 1; \quad \gamma = \frac{6 R^\circ \mu_*^\circ}{\rho_*^\circ h_*^{\circ 2} U^\circ}$$

где h_*°, ρ_*° и $\mu_*^\circ = \mu^\circ(T_*^\circ)$ – взятые в качестве масштабов “характерные” высота зазора, плотность и вязкость смазки.

Для несжимаемой смазки $\rho = 1$, а для слабо сжимаемой при соответствующем выборе ρ_*° и p_*° плотность $\rho = 1 + (p - p_*) \gamma U^{\circ 2} / a_*^{\circ 2}$, где $1/a_*^{\circ 2} = (\partial \rho^\circ / \partial p^\circ)_{T^\circ}$ при



Фиг. 1

$p^0 = p_*$ и $T^0 = T_*$. Так как a_*^0 – изотермическая скорость звука, то $U^{02} / a_*^{02} = M^2$ – квадрат изотермического числа Маха, определенного по a_*^0 и по скорости U^0 движения поверхности шипа. Если величина M^2 настолько мала, что и $(p - p_*) \gamma M^2 \ll 1$, то $p \approx 1$, и уравнение (1.1) примет вид

$$(h^3 p_x)_x + (h^3 p_z)_z - h_x = 0 \quad (1.2)$$

тождественный уравнению для несжимаемой смазки. Далее несжимаемая и слабо сжимаемая смазки не различаются.

Выпишем граничные условия, которым наряду с уравнением (1.2) при заданной периодической функции $h(x)$ должно удовлетворять безразмерное распределение давления $p(x, z)$. Начнем с условий периодичности и непрерывности p и расхода в сечениях $x = x_d$ возможного скачкообразного изменения высоты зазора

$$p(L, z) = p(0, z), \quad p_x(L, z) = p_x(0, z), \quad -B \leq z \leq B \quad (1.3)$$

$$[p(x_d, z)] = 0, \quad [h_d^3 p_x(x_d, z) - h_d] = 0, \quad -B \leq z \leq B \quad (1.4)$$

Здесь $L = 2\pi$, $[\varphi] = \varphi_+ - \varphi_-$, а индексами минус и плюс отмечены значения параметров до и после разрыва в направлении роста θ или x .

Если есть параллельная оси вращения радиальная “питающая щель”, расположенная при $x = x_c$, то это сечение зазора будем рассматривать как поверхность разрыва расхода при непрерывном давлении. При определении расхода, поступающего в зазор или вытекающего из него через щель, воспользуемся тем же приближением теории смазки. Пусть ширина щели Δ^0 много меньше ее длины в радиальном направлении $l^0 = O(R^0) \ll B^0$. Пренебрегая в силу последнего неравенства течением в щели в направлении оси z , найдем, что удвоенный расход смазки через щель равен $q^0 = q^0(z) = \Delta^0 \rho^0 (p^{e0} - p_c^0) / l^0$, где p^{e0} – внешнее давление над

щелью, а p_c° – давление в зазоре при $x = x_c$. После перехода к безразмерным величинам получим $q = K(p^e - p_c)$, где $K = \Delta^3 / l$, $l = l^\circ / R^\circ$, а $\Delta = \Delta^\circ / h_*^\circ$, и с учетом сказанного

$$[p(x_c, z)] = 0, [h_c^3 p_x(x_c, z) - h_c] + K(p^e - p_c) = 0, -B \leq z \leq B \quad (1.5)$$

В такой записи данное условие справедливо, когда $x_c = x_d$, т.е. при совпадении координат щел и скачкообразного изменения высоты зазора. Воспользовавшись произволом в выборе начала отсчета окружной координаты, далее будем считать, что координаты x_c и x_d отличны от 0 и 2π .

На открытых торцах подшипника (при $z = \pm B$) в приближении теории смазки давление равно давлению p^∞ в окружающей шип вне подшипника среде. В общем случае (при наличии специальных изолирующих перегородок) оно отлично от “внешнего” давления над щелью p^e . Положив $p^\infty = 0$, т.е. отсчитывая давление p от p^∞ , получим

$$p(x, B) = p(x, -B) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.6)$$

С учетом симметрии течения в подшипнике относительно плоскости $z = 0$ удобнее рассматривать его половину: $0 \leq z \leq B$. При этом вместо равенства $p(x, -B) = 0$ используется условие симметрии

$$p_z(x, 0) = 0, \quad 0 < x \leq L \quad (1.7)$$

2. Решение задачи и его свойства в случае подшипников большой длины. При выяснении необходимых для дальнейшего свойств решения задачи (1.2)–(1.7) сначала представим распределение давления суммой

$$p(x, z) = p_0(x) + p_1(x, z) \quad (2.1)$$

с функцией $p_0(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$(h^3 p_{0x})_x - h_x = 0 \quad (2.2)$$

и условиям (1.3)–(1.5) с заменой p и p_0 и частных производных по x полными производными. При заданной кусочно-непрерывной периодической функции $h(x)$ решение $p_0(x)$ такой одномерной задачи существует и при наличии питающей щели единственно, а при ее отсутствии определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. Единственность решения при наличии щели – следствие получающихся из (1.3)–(1.5) условий для $p_0(x)$, которые приводят к равенству $p_0(x_c) = p^e$.

При учете выражения (2.1), уравнения (2.2) и перечисленных выше свойств решения $p_0(x)$ и в согласии с соотношениями (1.2)–(1.7) задача определения $p_1(x, z)$ принимает вид ($f = h^3$)

$$(f p_{1x})_x + (f p_{1z})_z = 0 \quad (2.3)$$

$$p_1(L, z) = p_1(0, z), \quad p_{1x}(L, z) = p_{1x}(0, z), \quad [p_1(x_d, z)] = 0, \quad [f_d p_{1x}(x_d, z)] = 0$$

$$[p_1(x_c, z)] = 0, \quad [f_c p_{1x}(x_c, z)] - K p_{1c} = 0, \quad 0 \leq z \leq B \quad (2.4)$$

$$p_1(x, B) = -p_0(x), \quad p_{1z}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (2.5)$$

В отличие от исходной краевой задачи для $p(x, z)$ краевая задача (2.3)–(2.5) для $p_1(x, z)$ допускает разделение переменных. В соответствии с этим, подставив в соотношения (2.3)–(2.5) $p_1(x, z) = X(x)Z(z)$, получим для определения функций X и Z уравнения (штрих означает полную производную по x , точка – по z)

$$(fX')' + \lambda fX = 0 \quad (2.6)$$

$$\ddot{Z} - \lambda Z = 0 \quad (2.7)$$

и условия

$$X(L) = X(0), \quad X'(L) = X'(0), \quad [X]_d = 0, \quad [fX']_d = 0, \quad [X]_c = 0, \quad [fX']_c - KX_c = 0 \quad (2.8)$$

$$\dot{Z}(0) = 0 \quad (2.9)$$

Здесь λ – собственное значение (СЗ) однородной краевой задачи (2.6), (2.8). Чтобы определить знак всех ее СЗ, рассмотрим функционал (всюду далее интегрирование по x ведется от 0 до L)

$$I(X) = KX_c^2 + \int \{f(X')^2 - \lambda fX^2\} dx$$

определенный для любых ограниченных кусочно-непрерывных функций f , X и X' . Первое слагаемое под знаком интеграла запишем как произведение $(fX')X'$ и проинтегрируем по частям по участкам непрерывности функций f и X' с учетом условий (2.8) и периодичности функции f . Тогда для любой собственной функции (СФ) X – решения краевой задачи (2.6), (2.8) найдем, что $I(X) = 0$. По определению $f = h^3 > 0$, поэтому для $K > 0$ равенство $I(X) = 0$ возможно лишь при продолжительных λ , т.е. при

$$\lambda_k = \mu_k^2 > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Если питающей щели нет ($K = 0$), то минимальное СЗ $\lambda_0 = \mu_0^2 = 0$. Отвечающая ему СФ X_0 – константа. При этом, согласно соотношениям (2.7) и (2.9), $Z_0 = 1$, функция $p_0(x)$ определена с точностью до аддитивной постоянной, а для $k \geq 1$, как и при $K > 0$, справедливо условие (2.10).

В силу соотношений (2.9) и (2.10), решения $Z_k = Z_k(z)$ уравнения (2.8) имеют вид

$$Z_k = \text{ch } \mu_k z \quad (2.11)$$

Пусть $X_k = X_k(x)$ – это СФ, отвечающая СЗ λ_k . Как и в стандартной самосопряженной задаче Штурма–Лиувилля [2], СЗ задачи (2.6), (2.8), также самосопряженной (с естественными доопределениями при $x = x_d$ и $x = x_c$), образуют неограниченно возрастающую последовательность, а соответствующие им СФ X_k ортогональны и могут быть сделаны ортонормированными, т.е.

$$\int f X_m X_n dx = \delta_{mn} \quad (2.12)$$

где δ_{mn} – символ Кронекера. В частности, в силу условия (2.12)

$$X_0 = \left(\int f dx \right)^{-1/2} \quad (2.13)$$

При учете условий (2.8) полнота СФ доказывается аналогично тому, как это делалось ранее в [2] для функции f с непрерывной первой производной. Если функция f непрерывна, то аналогично изложенному ранее [2] можно показать, что $\lambda_k \rightarrow k^2$ при $k \rightarrow \infty$, а соответствующие СФ становятся близки к суперпозиции $\sin kx$ и $\cos kx$. Для разрывных функций f указанное свойство не имеет места, и такие “целочисленные” периодические функции не приближаются к СФ задачи (2.6), (2.8) даже для кусочно-постоянных f . Неучет этого весьма важного обстоятельства не мог не сказаться на результатах, полученных в [3] для ступенчатых подшипников конечной длины (кроме того, в [3] ошибочно положено $\lambda_k = -k^2 < 0$).

При учете равенства (2.11) получим

$$p_1(x, z) = p_{10} + \sum a_k X_k \text{ch } \mu_k z \quad (2.14)$$

Здесь и далее суммирование по индексу ведется от $k = 1$ до $k = \infty$, $\mu_k > 0$, а $p_{10} \neq 0$ только при $K = 0$.

Для определения постоянной p_{10} и коэффициентов a_k подставим выражение (2.14) в первое еще неудовлетворенное условие (2.5) и, выполнив известную, опирающуюся на соотношения (2.12) и (2.13) процедуру, найдем

$$p_{10} = -\left(\int f(x)dx\right)^{-1} \int f(x)p_0(x)dx, \quad K = 0$$

$$a_k = \frac{\alpha_k}{\operatorname{ch} \mu_k B}, \quad \alpha_k = -\int f(x)p_0(x)X_k(x)dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

При построении решения (2.14) с p_{10} и a_k , определенными по формулам (2.15), условие $B \gg 1$ для подшипника без питающей щели не использовалось. При наличии щели косвенно (на уровне модели – для обоснования радиальности течения в ней) привлекалось менее ограничительное при $l < 1$ неравенство $B \gg l$.

В выражения (2.14) и (2.15) входят СЗ и СФ, определение которых – часто непростая задача. Продемонстрируем это на двух примерах.

В качестве первого примера рассмотрим кусочно-постоянный зазор с двумя ступеньками без питающей щели. В одномерном приближении радиальные подшипники такого типа реализуют максимум несущей способности [4–8]. Пусть (фиг. 2,а) $f = 1$ при $0 \leq x < \alpha$ и при $\beta < x \leq 2\pi$ и $f = F > 1$ при $\alpha < x < \beta$. В этом случае, согласно уравнению (2.6) и соответствующим условиям из (2.8), СФ получаются как разные комбинации $\sin \mu_k x$ и $\cos \mu_k x$ при $0 \leq x < \alpha$ и при $\alpha < x < \beta$ и $\sin \mu_k (x - 2\pi)$ и $\cos \mu_k (x - 2\pi)$ при $\beta < x \leq 2\pi$. При этом μ_k – корни уравнения ($\mu_k = \pm \mu$)

$$a \cdot b - c \cdot d = 0$$

$$a(\mu) = -a(-\mu) = \cos \mu \alpha \sin \mu (\beta - \alpha) + F\{\sin \mu \alpha \cos \mu (\alpha - \beta) - \sin \mu (\beta - 2\pi)\}$$

$$b(\mu) = b(-\mu) = \sin \mu (\alpha - \beta) \sin \mu (\beta - 2\pi) + F\{\cos \mu \alpha - \cos \mu (\alpha - \beta) \cos \mu (\beta - 2\pi)\}$$

$$c(\mu) = c(-\mu) = \sin \mu \alpha \sin \mu (\alpha - \beta) + F\{\cos \mu \alpha \cos \mu (\alpha + \beta) - \cos \mu (\beta - 2\pi)\}$$

$$d(\mu) = -d(-\mu) = \sin \mu (\beta - \alpha) \cos \mu (\beta - 2\pi) + F\{\sin \mu \alpha - \sin \mu (\beta - 2\pi) \cos \mu (\alpha - \beta)\}$$

Конечное число корней этого трансцендентного уравнения можно находить только численно. В случае произвольных $F > 1$ и $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ его корни $\mu = \mu_k$ при любых целых $k \geq 1$ не близки к k .

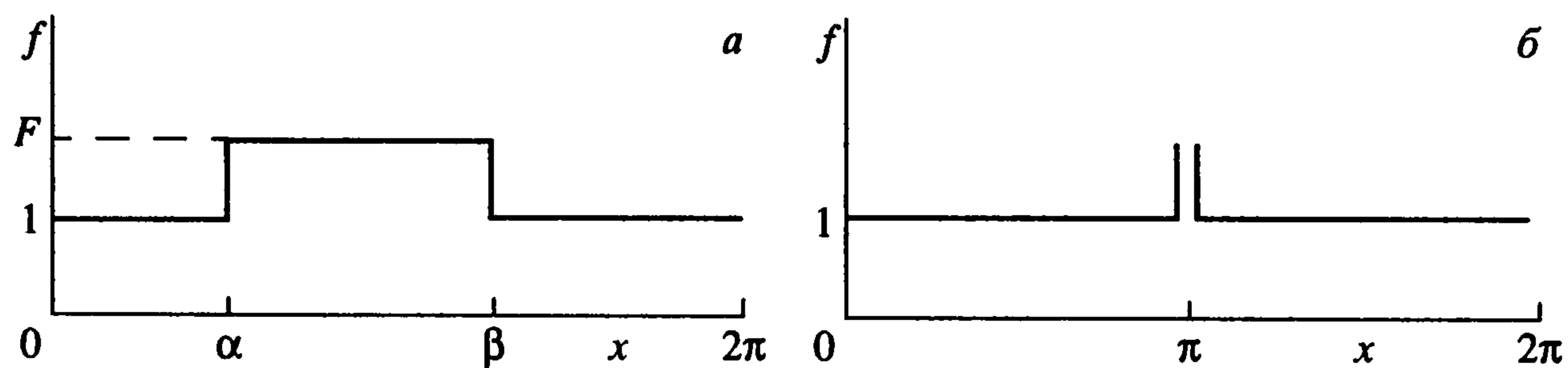
Во втором, более простом примере при постоянном зазоре ($f = 1$ для $0 \leq x \leq 2\pi$) в сечении $x = x_c = \pi$ расположена питающая щель (фиг. 2,б). В данном случае $p_0(x) = p^e$, все СЗ $\lambda_k = \mu_k^2 > 0$, а СФ в силу условий периодичности и условия непрерывности в сечении $x = \pi$ равны $X_k(x) = A_k \cos \mu_k x$ при $0 \leq x < \pi$ и $X_k(x) = A_k \cos \mu_k (x - 2\pi)$ при $\pi < x \leq 2\pi$ с нормирующим множителем A_k . Второе условие для X_k при $x = \pi$ дает уравнение ($\mu_k = \pm \mu$)

$$\sin \mu \pi = K(2\mu)^{-1} \cos \mu \pi$$

определяющее СЗ, которые в отличие от первого примера при больших k будут порядка k^2 . Распределение давления в зазоре при учете условия $p(x, B) = p^\infty = 0$ записывается в форме

$$p(x, z) = p^e + \sum \alpha_k X_k \frac{\operatorname{ch} \mu_k z}{\operatorname{ch} \mu_k B}, \quad \alpha_k = -p^e \int X_k(x)dx$$

3. Уравнения и условия для давления, осредненного по длине подшипника. Применим полученные результаты для обоснования постановки граничных условий для



Фиг. 2

подшипников большой (в пределе бесконечной) длины, свободно сообщающихся на торцах с “внешним пространством”.

Если $B \gg 1$, то в силу положительности μ_k из соотношения (2.1) с учетом выражений (2.14) и (2.15) для $z > 0$ получим

$$p(x, z) = p_0(x) + p_{10} + \sum \alpha_k X_k \frac{\text{ch} \mu_k z}{\text{ch} \mu_k B} \approx p_0(x) + p_{10} + \sum \alpha_k X_k e^{\mu_k(z-B)} \quad (3.1)$$

Введем осредненное по длине смазочного слоя давление

$$\langle p \rangle = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B p(x, z) dz = \frac{1}{B} \int_0^B p(x, z) dz \quad (3.2)$$

Как и p_0 , $\langle p \rangle$ — функция только x . Интегрированием величин $\langle p \rangle \sin x$ и $\langle p \rangle \cos x$ по x от 0 до $L = 2\pi$ определяются проекции вектора несущей способности $\mathbf{N}$. Положив $p(x, z) = \langle p \rangle + \Delta p(x, z)$, в согласии с (3.2) будем иметь

$$\int_0^B \Delta p(x, z) dz = 0 \quad (3.3)$$

Применив операцию осреднения по z к уравнению (1.2) и учтя равенство (3.3), найдем

$$\frac{d}{dx} \left(h^3 \frac{d\langle p \rangle}{dx} \right) - \frac{dh}{dx} = -\frac{1}{B} h^3 \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=B} = O\left(\frac{1}{B}\right) \quad (3.4)$$

Аналоги условий (1.3)–(1.5) для определения $\langle p \rangle$ как функции x из уравнения (3.4) с нулевой правой частью получаются применением к соотношениям (1.3)–(1.5) операции осреднения (3.2) и равенства (3.3). Результирующие уравнения и условия для $p_0(x)$ и $\langle p \rangle$ совпадают. Такое совпадение, казалось бы, ведет к тождественности $p_0(x)$ и $\langle p \rangle$. Однако, если бы это было так, то при наличии питающей щели ($K > 0$) единственность решения $\langle p \rangle$ обеспечивалась бы условием $\langle p \rangle_c = p^e$, аналогичным такому же условию для $p_0(x)$. На самом же деле для любого конечного B между $p_0(x)$ и $\langle p \rangle$ имеется принципиальное различие. Поскольку $p_0(x)$ — это решение одномерной задачи, из-за его независимости от z связанный с $p_0(x)$ поток смазки в осевом направлении отсутствует. Следовательно, постоянен связанный с $p_0(x)$ расход смазки в окружном направлении. Именно его постоянство вместе с условиями (1.3)–(1.5) с $p_0(x)$ вместо $p(x, z)$ приводит к равенству $p_{0c} = p^e$. В противоположность этому $\langle p \rangle$ — это результат осреднения $p(x, z)$, поэтому, по крайней мере при конечных B , ниоткуда не следует постоянство связанного с $\langle p \rangle$ расхода смазки в окружном направлении, и из условий (1.3)–(1.5) с $\langle p \rangle$ вместо $p(x, z)$ не следует равенство $\langle p \rangle_c = p^e$. Дополнительной иллюстрацией сказанного служит второй пример, рассмотренный в конце предыдущего раздела.

Для получения условия, заменяющего указанное равенство, запишем уравнение расхода смазки, текущей от плоскости симметрии $z = 0$ в направлении оси вращения. При наличии питающей щели имеем

$$\frac{dG^z}{dz} = K(p^e - p_c), \quad G^z = G^z(z) = -\int h^3(x) p_z(x, z) dx = -\frac{dI_1(z)}{dz} \quad (3.5)$$

$$I_1(z) = \int h^3(x) p(x, z) dx$$

Проинтегрировав первое равенство (3.5) по z от $z = 0$ при условии $G^z(0) = 0$ до произвольного $z \leq B$, получим

$$\frac{dI_1(z)}{dz} - K \int_0^z \{p_c(\zeta) - p^e\} d\zeta = 0$$

Проинтегрировав это равенство по z от произвольного положительного $z < B$ до $z = B$, где, в силу выбора начала отсчета давления, $p(x, B) = p^\infty = 0$, найдем

$$I_1(z) - K \int_0^B \int_0^\xi \{p^e - p_c(\zeta)\} d\zeta d\xi = 0 \quad (3.6)$$

Это равенство – следствие интегрального закона сохранения расхода смазки (3.5), записанного с учетом периодичности течения, условия симметрии при $z = 0$ и равенства давления смазки заданному внешнему (нулевому) давлению в торцевом сечении $z = B$. При отсутствии питающей щели, т.е. при $K = 0$, соотношение (3.6) эквивалентно равенству нулю полного (проинтегрированного по периоду) радиального расхода смазки через любое сечение смазочного слоя $0 \leq z = \text{const} \leq B$.

Применим операцию осреднения к условию (3.6), учтем равенство (3.3) и подставим при вычислении интеграла от p_c его выражение, получающееся из (3.1). В результате найдем

$$I_2 - \frac{KB^2}{3} \left\{ p^e - p_{0c} - p_{10} - \frac{1}{3B^2} \sum \frac{\alpha_k}{\mu_k^2} X_k(x_c) + o\left(\frac{1}{B^2}\right) \right\} = 0, \quad I_2 = \int h^3(x) \langle p \rangle dx$$

При $B \gg 1$ подстановка (3.1) в (3.2) дает $\langle p \rangle = p_0(x) + p_{10} + O(1/B)$, и при любом $K \geq 0$ будем иметь

$$I_2 - KB^2(p^e - \langle p \rangle_c)/3 = 0 \quad (3.7)$$

В предельных случаях, когда KB^2 много больше или много меньше единицы, данное равенство сводится к известным условиям, которые используются для подшипников бесконечной длины. Так, при наличии питающей щели и любом сколь угодно малом, но отличном от нуля K для радиального подшипника бесконечной длины оно сводится к равенству

$$\langle p \rangle_c = p^e \quad (3.8)$$

То же условие получается из (3.7) при конечных B , если $KB^2 \gg 1$, несмотря на возможную малость $K = \Delta^3/l$. Напротив, при $K = 0$ или при $K > 0$, но $KB^2 \ll 1$ соотношение (3.7) заменится на

$$I_2 = 0 \quad (3.9)$$

Суммируя для $B \gg 1$ все рассмотренные ситуации, получим условия

$$\langle p \rangle_c = p^e \text{ при } KB^2 \gg 1; \quad I_2 = 0 \text{ при } KB^2 \ll 1 \quad (3.10)$$

$$I_2 - KB^2(p^e - \langle p \rangle_c)/3 = 0 \text{ при } KB^2 = O(1)$$

Любое из них играет роль дополнительного условия, которому при $B \gg 1$ должно удовлетворять давление $\langle p \rangle$, определяемое из решения сформулированной выше одномерной задачи. Ранее [1] в общем случае сжимаемой смазки первое равенство (3.10) постулировалось в качестве одного из дополнительных условий для замкнутого радиального подшипника бесконечной длины. Второе условие (3.10) совпадает со следствием аналогичного условия, полученного для бесконечного радиального подшипника без питающей щели в случае сжимаемой баротропной, в частности, изотермической или политропической, смазки [1, 9–11].

Заметим, что величина p_{10} определяется первым соотношением (2.15) для $K = 0$, так что, в силу этого определения, равенство (3.9) при подстановке в него $\langle p \rangle = p_0(x) + p_{10}$ превращается в тождество. Последнее естественно, ибо величина p_{10} находилась как коэффициент разложения по собственной функции $X_0 = \text{const}$ условия $p(x, B) = 0$. Если же изначально рассматривается одномерная задача определения $\langle p \rangle$ из уравнения (3.6), условий периодичности и т.п., то уровень отсчета $\langle p \rangle$, никак не связанный при решении этой задачи с $p^\infty = 0$, при $K = 0$ определится условием (3.9).

В случае несжимаемой смазки $\langle p \rangle$ определяется с точностью до аддитивной постоянной, которая из-за умножения давления на $\sin x$ и $\cos x$ и интегрирования по x от 0 до 2π для замкнутых радиальных подшипников не влияет на величину и направление несущей способности N , поэтому в таких случаях каждое из условий (3.10) можно заменить заданием произвольного начального значения p при любом x ; например, можно положить $\langle p \rangle = 0$ при $x = 0$. Более того, этот произвол позволяет удовлетворить любому из указанных трех условий. По той же причине включение второго или третьего из них в качестве изопериметрического условия при решении рассмотренных ранее [4–8] вариационных задач профилирования зазора замкнутого радиального подшипника бесконечной длины не может повлиять на форму оптимальных зазоров, построенных для несжимаемой смазки. Наконец, в силу выполненного рассмотрения, они же оптимальны для замкнутых радиальных цилиндрических подшипников конечной, но большой длины ($B \gg 1$, KB^2 любые).

При рассмотрении ползуна $x^\circ, y^\circ, z^\circ$ – неподвижные (связанные с ползуном) размерные декартовы координаты, причем плоскость $y^\circ = 0$ движется со скоростью U° в направлении оси x° , а $y^\circ = h^\circ(x^\circ)$ – размерная высота цилиндрического зазора. Если высота зазора такого ползуна – периодическая функция x° с периодом $2\pi R^\circ$, то все полученные выше уравнения и условия останутся без изменения. В этом случае, однако, несущая способность, направленная по оси y , зависит от уровня давления, а значит, от того, какое из условий (3.10) его определяет.

4. Случай разных давлений на торцах. Выше давления на обоих торцах были одинаковыми. Рассмотрим ситуацию, когда эти давления различны. Приняв за уровень отсчета давления p их полусумму, вместо условия (1.6) будем иметь

$$-p(x, -B) = p(x, B) = p^\infty \neq 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.1)$$

Примем для определенности, что $p^\infty > 0$. При этом, если питающей щели нет, то убывающий с ростом B осевой поток смазки в зазоре отрицателен. В таком наиболее простом случае представим решение в виде

$$p(x, z) = p^0(z) + p_0(x) + p_1(x, z) \quad (4.2)$$

с функцией $p^0(z)$, удовлетворяющей уравнению $d^2 p^0(z)/dz^2 = 0$ и граничным условиям (4.1). Учтем, что интеграл от $p^0(z)$ в равенстве (3.3) для $\langle p \rangle$ равен нулю. В результате найдем, что $p^0(z) = p^\infty z/B$, а для $p_0(x)$, $p_1(x, z)$ и $\langle p \rangle$ справедливо почти все, сказанное ранее. Отличие – естественная коррекция условия (3.9), которое заменится на

$$I_3 = 0, \quad I_3 = \int h^3(x)(\langle p \rangle - p^\infty)dx \quad (4.3)$$

Для зазора с питающей щелью при представлении решения в форме (4.2) функция $p^0(z)$ появляется в условии на щели, мешая разделению переменных, поэтому при $K > 0$, сохранив разбиение (2.1) $p(x, z)$ на $p_0(x)$ и $p_1(x, z)$, с учетом нечетности граничного условия (4.1) заменим условия (2.5) на

$$p_1(x, B) = -p_0(x) + p^\infty, \quad p_1(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L \quad (4.4)$$

Изменение условия при $z = 0$ ведет к замене решения (2.11) на $Z_k = \text{sh } \mu_k z$ при прежнем определении μ_k и X_k . Вследствие этого и условий (4.4) решение для $p_1(x, z)$ станет

$$p_1(x, z) = \sum \alpha_k X_k \frac{\text{sh } \mu_k z}{\text{sh } \mu_k B}, \quad \alpha_k = -\int f(x) \{p_0(x) + p^\infty\} X_k(x) dx$$

Отсюда при $B \gg 1$, в силу положительности μ_k , для $z > 0$ получим

$$p(x, z) = p_0(x) + \sum \alpha_k X_k \frac{\text{sh } \mu_k z}{\text{sh } \mu_k B} \approx p_0(x) + \sum \alpha_k X_k e^{\mu_k(z-B)} \quad (4.5)$$

С учетом этого найдем

$$G^z(0) = \sum \frac{\alpha_k \mu_k}{\text{sh } \mu_k B} \int f(x) X_k(x) dx \approx 2 \sum \alpha_k \mu_k e^{-\mu_k B} \int f(x) X_k(x) dx$$

Воспользовавшись этим равенством и выражением (4.5), придем к условиям, которые получаются из условий (3.10) заменой интеграла I_2 на интеграл I_3 , определенный вторым равенством (4.3). Эти условия при разных давлениях на торцах подшипника играют ту же роль, что условия (3.10). Напомним, что p^∞ – безразмерное давление на торце $z = B$, отсчитываемое от полусуммы давлений на торцах. Если эти давления равны, то $p^\infty = 0$ и новые условия сводятся к условиям (3.10).

При наличии нескольких питающих щелей припишем параметрам, характеризующим их, дополнительный индекс i , расположив номера $i = 1, \dots, I \geq 2$, в порядке роста K_i . Тогда условия (3.10) и отвечающие им условия при разных давлениях на торцах подшипника останутся справедливыми, если первые равенства в них заменить на

$$\sum_{i=1}^I K_i (p_i^e - \langle p \rangle_{ci}) = 0 \quad \text{при } K_1 B^2 \gg 1 \quad (4.6)$$

$KB^2 \ll 1$ – на $K_1 B^2 \ll 1$, $KB^2 = O(1)$ – на $K_i B^2 = O(1)$ при $i = 1, \dots, I$, а внеинтегральные слагаемые в последних равенствах – умноженной на $B^2/3$ суммой из левой части равенства (4.6).

Аналог условия (3.9) для бесконечного радиального подшипника при сжимаемой, например изотермической, смазке известен [1, 9–11]

$$\int h^3(x) (p_0^2 - p^{\infty 2}) dx = 0 \quad (4.7)$$

где $p_0(x)$ – решение соответствующей одномерной задачи.

5. Заключение. Трудностей, возникающих на пути строгого вывода и обоснования аналогов полученных выше условий на случай сжимаемой баротропной смазки несколько. При использовании представления (2.1) прийти к линейному уравнению для $p_1(x, z)$, допускающему разделение переменных, можно, только отбросив p_1^2 . Аналогично при получении уравнения для $\langle p \rangle$ придется пренебречь интегралами по z от $(\Delta p)^2 / B$. Наконец, линейное уравнение для $X_k(x)$ в этом случае существенно сложнее уравнения (2.6), что затруднит доказательство неотрицательности его соб-

ственных чисел. Если же это, тем не менее, удастся сделать, то получение требуемых аналогов не составит особого труда, поскольку в таком случае решения $Z_k = \operatorname{ch} \mu_k z$ и $Z_k = \operatorname{sh} \mu_k z$ сохранятся. Последнее, кстати, при $B \gg 1$ оправдывает и пренебрежение упоминавшимися квадратичными слагаемыми, которые малы вне окрестностей торцов. Протяженность же таких окрестностей $O(1) \ll B$. В крайнем случае неравенство $\lambda_k > 0$ для $k > 0$ можно принять в качестве гипотезы. Однако и без этого вряд ли приходится сомневаться в том, что при $KB^2 \gg 1$ указанное условие сведется к первому равенству (3.10), а при $KB^2 \ll 1$ – к равенству (4.7) с заменой p_0^2 на $\langle p \rangle^2$. Таким образом, останется рассмотреть лишь случай $KB^2 = O(1)$.

Автор благодарит В.И. Грабовского и К.С. Реента за обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01211, 02-01-00422 и 00-15-99039).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Constantinescu V.N.* Lubrificatia cu gaze. Bucuresti: Editura Acad. Rep. Pop. Romine, 1963 = *Константинеску В.Н.* Газовая смазка. М.: Машиностроение, 1968. 718 с.
2. *Morse P.M., Feshbach H.* Methods of Theoretical Physics. Pt I. N.Y., Toronto, London: McGraw-Hill Book Company, 1953 = *Морс Ф.М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. Т. I. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 930 с.
3. *Hamrock B.J., Anderson W.J.* Rayleigh step journal bearing. Pt II – Incompressible fluid // Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1969. V. 91. № 4. P. 641–650 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1969. Т. 91. № 4. С. 53–62.
4. *Maday C.J.* The Maximum principle approach to the optimum one-dimensional journal bearing // Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1970. V. 92. № 3. P. 482–489 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1970. Т. 92. № 3. С. 111–119.
5. *Rohde S.M.* A demonstrably optimum one dimensional journal bearing // Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol. 1972. V. 94. № 2. P. 188–192 = Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки. 1972. Т. 94. № 2. С. 89–93.
6. *McAllister G.T., Rohde S.M.* Optimum design of one-dimensional journal bearings // J. Optimiz. Theory Appl. 1983. V. 41. № 4. P. 599–617.
7. *Болдырев Ю.А., Слесарев М.Е.* Одномерный радиальный газовый подшипник с максимальной несущей способностью // Машиноведение. 1987. № 4. С. 97–103.
8. *Грабовский В.И., Крайко А.Н.* Профилирование зазора радиального подшипника с минимальным моментом сопротивления // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 470–480 = Газовая динамика. Избранное. Т. 1 / Редактор-составитель А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2000. С. 569–583.
9. *Constantinescu V.N.* Sur le probleme tridimensionnel de la lubrification aux gaz. // Revue de mec. appl. 1956. V. 1. № 2. P. 123–138.
10. *Elrod H.G., Burgdorfer A.* Refinement of the theory of gas lubricated journal bearing of infinite length // Proc. 1 st Intern. Symp. on Gas Lubricated Bearings. Washington, 1959. P. 93–118.
11. *Шейнберг С.А., Жедь В.Р., Шишеев М.Д. и др.* Опоры скольжения с газовой смазкой. М.: Машиностроение, 1979. 336 с.