

УДК 531.391

© 2002 г. В.Г. Вильке, А.В. Шатина

МЕДЛЕННАЯ ДИССИПАТИВНАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО ШАРА В ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Рассматривается ограниченная круговая задача трех тел, когда два массивных тела, моделируемых материальными точками с массами единица и μ , движутся по заданным круговым орбитам вокруг общего центра масс, а третье малое по массе тело, моделируемое вязкоупругим деформируемым шаром, не влияет на движение первых двух и движется в гравитационном поле, порожденном первыми двумя телами. Рассеяние энергии при деформациях вязкоупругого шара приводит к эволюции его орбиты и угловой скорости вращения. В развитие предыдущих результатов [1] получена система уравнений с учетом второго приближения по малому параметру μ , описывающая полную картину эволюции движения вязкоупругого шара в ограниченной круговой задаче трех тел.

Пусть две материальные точки M_1 и M_2 , массы которых равны единице и μ ($\mu \ll 1$), движутся по круговым орбитам под действием сил ньютоновского притяжения вокруг общего центра масс O в плоскости OXY . Пусть $OM_2 = b$, $OM_1 = \mu b$, а угол α между осью OX и радиус-вектором OM_2 точки M_2 меняется по закону

$$\alpha(t) = \frac{\omega_3 t}{1 + \mu} + \alpha(0), \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{f}{b^3}}$$

где f – гравитационная постоянная (фиг. 1).

Далее предположим, что центр масс C шара (всюду, если не оговорено иное, имеется в виду вязкоупругий деформируемый однородный шар) массы m и плотности ρ движется в плоскости OXY , $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точки C . Положение точек шара определяется векторным полем

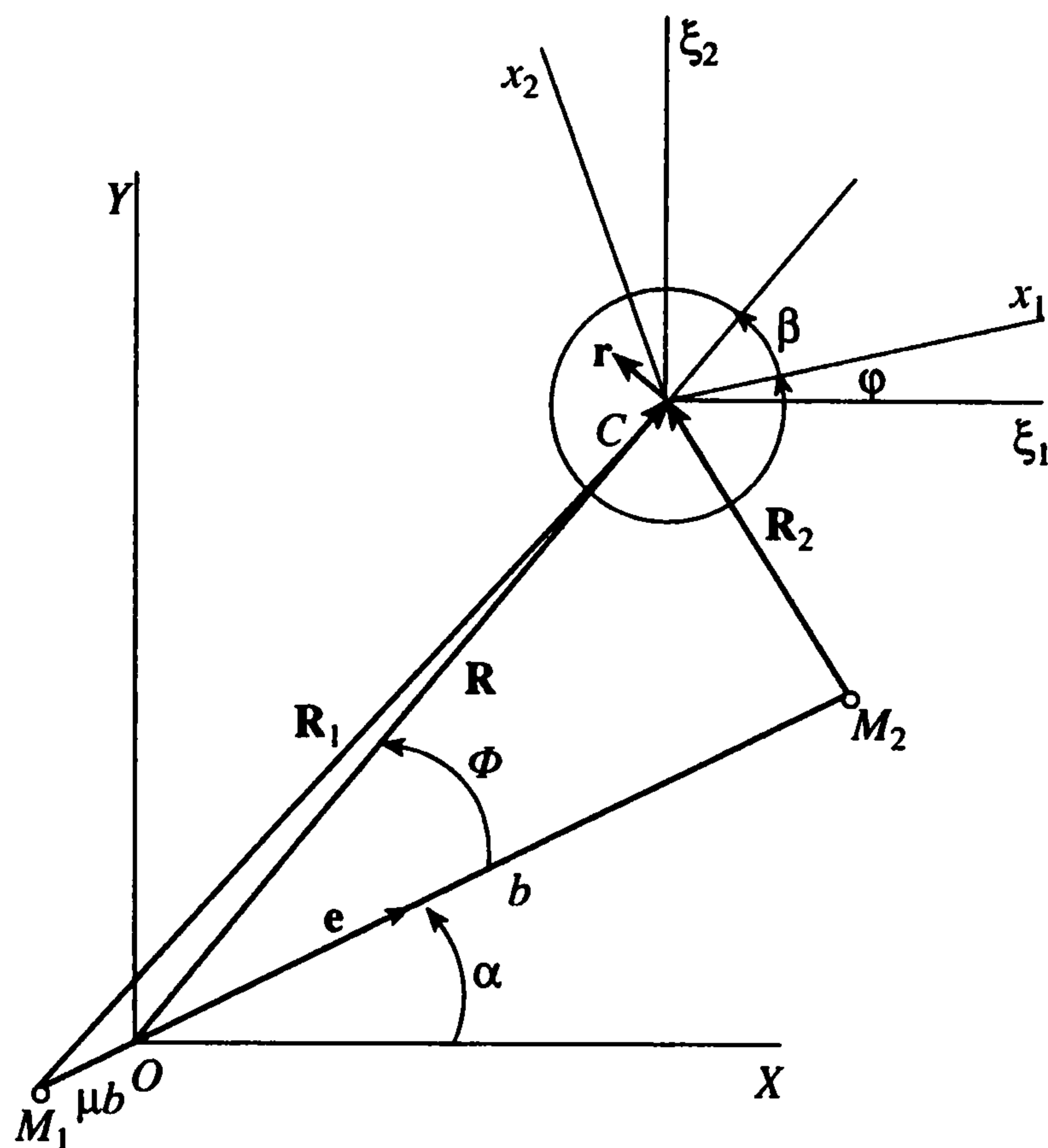
$$\zeta(\mathbf{r}, t) = \mathbf{R}(t) + O(t)(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t))$$

$$\mathbf{R}(t) = \frac{1}{m} \int \zeta(\mathbf{r}, t) \rho d\mathbf{x}, \quad \int \mathbf{u} d\mathbf{x} = 0, \quad \int \text{rot } \mathbf{u} d\mathbf{x} = 0, \quad d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3 \quad (1)$$

и всюду далее, если не оговорено иное, интегрирование ведется по области $V = \{\mathbf{r}: |\mathbf{r}| < r_0\}$ в E^3 , занимаемой шаром в естественном недеформированном состоянии.

Условия (1) однозначно определяют радиус-вектор $\mathbf{R}(t)$ центра масс C деформированного шара и систему координат $Sx_1x_2x_3$, относительно которой шар в интегральном смысле не вращается [2]. Оператор $O(t) = O(\varphi(t))$ определяет переход от системы координат $Sx_1x_2x_3$ к системе осей Кёнига $S\xi_1\xi_2\xi_3$ и имеет вид

$$O(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Кинетическая энергия шара представляется функционалом

где ω – вектор угловой скорости, определяемый равенством $\omega \times (\cdot) = O^{-1} \dot{O}(\cdot)$.

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

Функционал потенциальной энергии имеет вид

где

$$\mathcal{E}[\mathbf{u}] = \int a \left\{ \left(\sum_{i=1}^3 e_{ii} \right)^2 - a'_1 \sum_{i < j}^3 (e_{ii} e_{jj} - e_{ij}^2) \right\} dx, \quad a > 0, \quad 0 < a'_1 < 3$$

E – модуль упругости Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Так как $|\mathbf{R}_k| \gg |\mathbf{r} + \mathbf{u}|$ ($k = 1, 2$), то подынтегральные выражения в равенстве (2) можно разложить в ряд. Ограничиваясь членами третьего порядка по степеням $|\mathbf{r} + \mathbf{u}|/R_k$ и линейными по $|\mathbf{u}|/R_k$, где $R_k = |\mathbf{R}_k|$ ($k = 1, 2$), получим

$$\Pi = -\frac{fm}{R_1} - \frac{\mu fm}{R_2} + \frac{f}{R_1^3} \int \{(\mathbf{r}, \mathbf{u}) - 3(O^{-1}\mathbf{R}_{10}, \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}_{10}, \mathbf{u})\} \rho dx + \\ + \frac{\mu f}{R_2^3} \int \{(\mathbf{r}, \mathbf{u}) - 3(O^{-1}\mathbf{R}_{20}, \mathbf{r})(O^{-1}\mathbf{R}_{20}, \mathbf{u})\} \rho dx + \mathcal{E}[\mathbf{u}]$$

$$\mathbf{R}_{k0} = \mathbf{R}_k / R_k, \quad k = 1, 2$$

$$R_1 = \sqrt{R^2 + 2\mu Rb \cos \Phi + \mu^2 b^2}, \quad R_2 = \sqrt{R^2 - 2Rb \cos \Phi + b^2}, \quad R = |\mathbf{R}|$$

Φ – угол между векторами $\mathbf{OC}$ и $\mathbf{OM}_2$.

Уравнения движения запишем в форме уравнений Рауса, используя канонические переменные Пуанкаре – Андуайе, определяющие движение центра масс шара и его вращение вокруг оси Sx_3 , и лагранжевы переменные $u_1(\mathbf{r}, t)$, $u_2(\mathbf{r}, t)$, $u_3(\mathbf{r}, t)$, описывающие деформации. При этом ограничимся рассмотрением класса квазикруговых орбит, т.е. орбит с нулевым эксцентриситетом. Было показано [1], что такой класс движений существует.

Переменная Андуайе I , равная модулю вектора момента количеств движения шара относительно точки C , взятому со знаком плюс в случае прямого вращения и со знаком минус в случае обратного вращения, определяется равенством

$$I = \nabla_{\dot{\varphi}} T = J[\mathbf{u}] \dot{\varphi} + G''$$

где

$$J[\mathbf{u}] = \int [\mathbf{e}_3 \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})]^2 \rho dx, \quad G'' = (\mathbf{e}_3, \int [(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \dot{\mathbf{u}}] \rho dx)$$

Длина вектора $\mathbf{R}$ и угол, который составляет этот вектор с осью OX , в переменных Пуанкаре (Λ , λ) для класса квазикруговых орбит определяются следующими соотношениями [1, 3]:

$$R = \Lambda^2 (fm^2)^{-1}, \quad \lambda = \Phi + \alpha$$

Функционал Рауса определяется равенством

$$\mathcal{R} = T_2 - T_0 + \Pi$$

и в переменных Андуайе–Пуанкаре представляется в виде [1]

$$\mathcal{R} = [I, \Lambda, \varphi, \lambda \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \alpha] = \frac{(I - G'')^2}{2J[\mathbf{u}]} - \frac{f^2 m^3}{2\Lambda^2} - \frac{1}{2} \int \dot{\mathbf{u}}^2 \rho dx + H[\mu, R, \Phi, \beta, \mathbf{u}] + \mathcal{E}[\mathbf{u}]$$

где

$$R = \Lambda^2 (fm^2)^{-1}, \quad \Phi = \lambda - \alpha, \quad \beta = \lambda - \varphi$$

$$H[\mu, R, \Phi, \beta, \mathbf{u}] = F_0 + \int \{F_1(\mathbf{r}, \mathbf{u}) - F_2(\xi_0, \mathbf{r})(\xi_0, \mathbf{u}) - F_3[(\xi_0, \mathbf{r})(\xi_1, \mathbf{u}) + (\xi_1, \mathbf{r})(\xi_0, \mathbf{u})] - \\ - F_4(\xi_1, \mathbf{r})(\xi_1, \mathbf{u})\} dx \quad (3)$$

$$\xi_0 = O^{-1}\mathbf{R}_0 = (\cos \beta, \sin \beta, 0), \quad \xi_1 = O^{-1}\mathbf{e} = (\cos(\beta - \Phi), \sin(\beta - \Phi), 0)$$

$$F_i = F_i(\mu, R, \Phi), \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

Уравнения движения шара имеют вид (всюду далее индексы φ, β, λ и т.д. означают частные производные по соответствующим переменным)

$$\begin{aligned} \dot{I} &= -\mathcal{R}_\varphi = -H_\varphi = H_\beta, \quad \dot{\Lambda} = -\mathcal{R}_\lambda = -H_\lambda = -H_\Phi - H_\beta \\ \dot{\Phi} &= \mathcal{R}_\Lambda - \frac{\omega_3}{1+\mu} = \frac{f^2 m^3}{\Lambda^3} + H_\Lambda - \frac{\omega_3}{1+\mu}, \quad \dot{\beta} = \mathcal{R}_\Lambda - \mathcal{R}_I = \frac{f^2 m^3}{\Lambda^3} - \frac{I - G^u}{J[\mathbf{u}]} + H_\Lambda \\ \int \left[\left(-\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} \mathcal{R} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{R} + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} D + \lambda_1 \right) \delta \mathbf{u} + \lambda_2 \operatorname{rot} \delta \mathbf{u} \right] &= 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in (W_2^1(V))^3 \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $(W_2^1(V))^3$ – пространство Соболева, $D[\dot{\mathbf{u}}] = \chi \mathcal{E}[\dot{\mathbf{u}}]$ – диссипативный функционал, $\chi > 0$ – коэффициент внутреннего вязкого трения (модель Кельвина–Фойгта). Последнее уравнение записано в виде вариационного принципа Даламбера–Лагранжа и содержит два неопределенных множителя $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$, порожденных условиями (1).

Предполагается, что наименьшая частота собственных колебаний шара много больше угловых скоростей $\dot{\Phi}$ и ω_3 . Это означает, что при соответствующем выборе масштабов размерных величин числовое значение модуля упругости материала шара E будет велико, а параметр $\varepsilon = E^{-1}$ мал.

Если $\varepsilon = 0$, то $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0$, и уравнения (4) выглядят следующим образом:

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\Lambda} = -F_{0\Phi}, \quad \dot{\beta} = \omega_2 - \omega_1 + F_{0\Lambda}, \quad \dot{\Phi} = \omega_2 - \frac{\omega_3}{1+\mu} + F_{0\Lambda} \quad (5)$$

где

$$\omega_1 = \frac{I}{A}, \quad \omega_2 = \frac{f^2 m^3}{\Lambda^3}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{f}{b^3}} \quad (6)$$

A – момент инерции недеформированного шара относительно оси Sx_3 . Уравнения (5) описывают движение шара как твердого тела в классической ограниченной задаче трех тел в классе квазикруговых орбит.

При $\varepsilon \neq 0$ согласно методу разделения движений [2] после затухания собственных колебаний шара решение $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ищется в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) + \dots$$

Найденная ранее [1] функция $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$ представляется в виде суммы

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{11} + \mathbf{u}_{12} + \mathbf{u}_{13} \quad (7)$$

где

$$\mathbf{u}_{11} = -\frac{2}{3} \rho \omega_1^2 [d_1 \mathbf{r}^2 + d_2] \mathbf{r}, \quad \mathbf{u}_{12} = \frac{1}{3} \rho \omega_1^2 \mathbf{u}_{120}, \quad \mathbf{u}_{13} \approx \left(1 - \chi \frac{d}{dt} \right) \mathbf{u}_{130}$$

$$\mathbf{u}_{1j0} = a_1 (B_{j-1} \mathbf{r}, \mathbf{r}) \mathbf{r} + a_2 \mathbf{r}^2 B_{j-1} \mathbf{r} + a_3 B_{j-1} \mathbf{r}, \quad j = 2, 3$$

Здесь

$$d_1 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2(4-3\nu)}, \quad d_2 = -\frac{(3-\nu)(1-2\nu)}{2(4-3\nu)} r_0^2 \quad (8)$$

$$a_1 = \frac{1+\nu}{5\nu+7}, \quad a_2 = -\frac{(1+\nu)(2+\nu)}{5\nu+7}, \quad a_3 = \frac{(1+\nu)(2\nu+3)}{5\nu+7} r_0^2 \quad (9)$$

$$B_1 = \operatorname{diag}\{1, 1, -2\}, \quad B_2 = \|b_{ij}\|_{i,j=1,2,3}$$

$$b_{ii} = \frac{1}{2}[F_1 + (-1)^{i+1}(F_2 \cos 2\beta + 2F_3 \cos(2\beta - \Phi) + F_4 \cos(2\beta - 2\Phi))], \quad i = 1, 2 \quad (10)$$

$$b_{12} = b_{21} = \frac{1}{2}[F_2 \sin 2\beta + 2F_3 \sin(2\beta - \Phi) + F_4 \sin(2\beta - 2\Phi)]$$

$$b_{33} = -F_1, \quad b_{13} = b_{31} = b_{23} = b_{32} = 0$$

Матрицы операторов B_1, B_2 являются симметричными матрицами с нулевым следом, причем

$$B_2 \mathbf{r} = -F_1 \mathbf{r} + F_2 (\xi_0, \mathbf{r}) \xi_0 + F_3 [(\xi_0, \mathbf{r}) \xi_1 + (\xi_1, \mathbf{r}) \xi_0] + F_4 (\xi_1, \mathbf{r}) \xi_1 \quad (11)$$

$$B_2^T = B_2, \quad \text{tr } B_2 = -3F_1 + F_2 + 2F_3 \cos \Phi + F_4 = 0$$

Функция u_{13} представлена двумя первыми членами степенного ряда по χ в предположении, что $|\chi \omega_k| \ll 1$ ($k = 1, 2, 3$). Дифференцирование по времени в выражении для функции u_{13} производится в силу "невозмущенной" системы (5).

Решение $\mathbf{u} = \varepsilon \mathbf{u}_1 = \varepsilon (\mathbf{u}_{11} + \mathbf{u}_{12} + \mathbf{u}_{13})$ описывает вынужденные колебания шара. Согласно асимптотическому методу разделения движений необходимо далее подставить это решение в правые части уравнений (4), предварительно линеаризовав их по $\mathbf{u}$ и $\dot{\mathbf{u}}$. Заметим, что функционал H , определяемый формулой (3), согласно выражениям (11) можно представить следующим образом:

$$H = F_0 - \int (B_2 \mathbf{r}, \mathbf{u}) dx$$

Тогда система уравнений, описывающая поступательно-вращательное движение шара, при учете возмущений, связанных с упругостью и диссипацией, примет вид

$$\dot{I} = -\int (B_{2\beta} \mathbf{r}, \varepsilon \mathbf{u}_1) dx, \quad \dot{\Lambda} = -F_{0\Phi} + \int (B_{2\Phi} \mathbf{r}, \varepsilon \mathbf{u}_1) dx + \int (B_{2\beta} \mathbf{r}, \varepsilon \mathbf{u}_1) dx$$

$$\dot{\Phi} = \omega_2 - \frac{\omega_3}{1 + \mu} + F_{0\Lambda} - \int (B_{2\Lambda} \mathbf{r}, \varepsilon \mathbf{u}_1) dx \quad (12)$$

$$\dot{\beta} = \omega_2 - \omega_1 + \frac{1}{A} (\mathbf{e}_3, \int \mathbf{r} \times \varepsilon \dot{\mathbf{u}}_1 \rho dx) + F_{0\Lambda} - \int (B_{2\Lambda} \mathbf{r}, \varepsilon \mathbf{u}_1) dx +$$

$$+ 2IA^{-2} \int [(\mathbf{r}, \varepsilon \mathbf{u}_1) - (\mathbf{e}_3, \mathbf{r})(\mathbf{e}_3, \varepsilon \mathbf{u}_1)] \rho dx$$

Функция u_1 определяется равенством (7).

На следующем шаге необходимо вычислить тройные интегралы по области V в правых частях уравнений (12) и получить замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных I, Λ, Φ, β . Сформулируем утверждения, позволяющие существенно упростить эту процедуру.

Лемма 1. Если B – симметричная матрица с нулевым следом, элементы которой не зависят от $\mathbf{r}$, и $\mathbf{u} = k(d_1 \mathbf{r}^2 + d_2) \mathbf{r}$ (k – некоторый множитель, не зависящий от $\mathbf{r}$, а постоянные d_1, d_2 определяются равенством (8)), то

$$\int (B \mathbf{r}, \mathbf{u}) dx = 0$$

Лемма 2. Если B и C – симметричные матрицы с нулевым следом, элементы которых не зависят от $\mathbf{r}$, и $\mathbf{u} = k[a_1(C \mathbf{r}, \mathbf{r}) \mathbf{r} + a_2 \mathbf{r}^2 C \mathbf{r} + a_3 C \mathbf{r}]$ (k – некоторый множитель, не зависящий от $\mathbf{r}$, а постоянные a_1, a_2, a_3 определяются равенствами (9)), то

$$\int (B \mathbf{r}, \mathbf{u}) dx = k D_2 \text{tr}[BC], \quad D_2 = \frac{4\pi r_0^7 (1 + \nu)(9\nu + 13)}{105(5\nu + 7)}$$

где $\text{tr}[BC]$ – след произведения матриц B и C .

Доказательство лемм 1, 2 проводится путем непосредственных вычислений интегралов по шару.

Система уравнений (12) после проделанных вычислений может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \epsilon \chi D_2 \{T^{\beta\beta} \dot{\beta}_* + T^{\beta\Phi} \dot{\Phi}_* + T^{\beta\Lambda} \dot{\Lambda}_*\} \\ \dot{\Lambda} &= -\dot{I} + \left\{ -F_0 + \epsilon D_2 \rho \omega_1^2 F_1 + \frac{1}{2} \epsilon D_2 T \right\}_{\Phi} - \epsilon \chi D_2 \{T^{\Phi\beta} \dot{\beta}_* + T^{\Phi\Phi} \dot{\Phi}_* + T^{\Phi\Lambda} \dot{\Lambda}_*\} \\ \dot{\Phi} &= \omega_2 - \frac{\omega_3}{1+\mu} + \left\{ F_0 - \epsilon D_2 \rho \omega_1^2 F_1 - \frac{1}{2} \epsilon D_2 T \right\}_{\Lambda} + \epsilon \chi D_2 \{T^{\Lambda\beta} \dot{\beta}_* + T^{\Lambda\Phi} \dot{\Phi}_* + T^{\Lambda\Lambda} \dot{\Lambda}_*\} \quad (13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= \omega_2 - \omega_1 + \left\{ F_0 - \epsilon D_2 \rho \omega_1^2 F_1 - \frac{1}{2} \epsilon D_2 T \right\}_{\Lambda} + \epsilon \chi D_2 \{T^{\Lambda\beta} \dot{\beta}_* + T^{\Lambda\Phi} \dot{\Phi}_* + T^{\Lambda\Lambda} \dot{\Lambda}_*\} + \\ &+ 2\epsilon \rho \frac{I}{A^2} \left\{ \frac{2}{3} \rho \omega_1^2 (2D_1 + D_2) + D_2 [F_1 - \chi F_{1\Phi} \dot{\Phi}_* - \chi F_{1\Lambda} \dot{\Lambda}_*] \right\} \quad (14)\end{aligned}$$

Здесь

$$\dot{\beta}_* = \omega_2 - \omega_1 + F_{0\Lambda}, \quad \dot{\Phi}_* = \omega_2 - \frac{\omega_3}{1+\mu} + F_{0\Lambda}, \quad \dot{\Lambda}_* = -F_{0\Phi}, \quad D_1 = \frac{8\pi r_0^7 (1-2\nu)}{105}$$

$$T = \text{tr}[B_2^2], \quad T^{\beta\beta} = \text{tr}[B_{2\beta} B_{2\beta}], \quad T^{\beta\Phi} = \text{tr}[B_{2\beta} B_{2\Phi}] \text{ и т.д.}$$

Используя формулы (10), получим

$$T = 2[3F_1^2 + (F_3^2 - F_2 F_4) \sin^2 \Phi]$$

$$T^{\beta\beta} = 2[9F_1^2 + 4(F_3^2 - F_2 F_4) \sin^2 \Phi]$$

$$\begin{aligned}T^{\beta\Phi} &= -[2(F_2 F_{3\Phi} - F_3 F_{2\Phi} + F_3 F_{4\Phi} - F_4 F_{3\Phi}) \sin \Phi + 2F_4^2 + \\ &+ (F_2 F_{4\Phi} - F_4 F_{2\Phi}) \sin 2\Phi + 2F_2 (F_3 \cos \Phi + F_4 \cos 2\Phi) + 4F_3^2 + 6F_3 F_4 \cos \Phi]\end{aligned}$$

$$T^{\beta\Lambda} = -[2(F_2 F_{3\Lambda} - F_3 F_{2\Lambda} + F_3 F_{4\Lambda} - F_4 F_{3\Lambda}) \sin \Phi + (F_2 F_{4\Lambda} - F_4 F_{2\Lambda}) \sin 2\Phi]$$

$$T^{\Phi\Phi} = \frac{3}{2} (F_{1\Phi})^2 + \frac{1}{2} (F_{2\Phi})^2 + 2(F_{3\Phi})^2 + \frac{1}{2} (F_{4\Phi})^2 + 2F_3^2 + 2F_4^2 +$$

$$+ 2F_{2\Phi} (F_3 \cos \Phi)_{\Phi} + F_{2\Phi} (F_4 \cos 2\Phi)_{\Phi} + 2F_{4\Phi} (F_3 \cos \Phi + F_3 \sin \Phi) + \\ + 4F_4 (F_3 \cos \Phi - F_{3\Phi} \sin \Phi)$$

$$T^{\Phi\Lambda} = \frac{3}{2} F_{1\Phi} F_{1\Lambda} + \frac{1}{2} F_{2\Phi} F_{2\Lambda} + 2F_{3\Phi} F_{3\Lambda} + \frac{1}{2} F_{4\Phi} F_{4\Lambda} + (F_{2\Phi} F_{3\Lambda} + F_{2\Lambda} F_{3\Phi}) \cos \Phi +$$

$$+ \frac{1}{2} (F_{2\Phi} F_{4\Lambda} + F_{4\Phi} F_{2\Lambda}) \cos 2\Phi + F_3 \sin \Phi (F_{4\Lambda} - F_{2\Lambda}) + (F_{3\Phi} F_{4\Lambda} + F_{3\Lambda} F_{4\Phi}) \cos \Phi -$$

$$- 2F_4 \sin \Phi (F_{2\Lambda} \cos \Phi + F_{3\Lambda})$$

$$T^{\Lambda\Lambda} = \frac{3}{2} (F_{1\Lambda})^2 + \frac{1}{2} (F_{2\Lambda})^2 + 2(F_{3\Lambda})^2 + \frac{1}{2} (F_{4\Lambda})^2 +$$

$$+ 2(F_{2\Lambda} F_{3\Lambda} + F_{3\Lambda} F_{4\Lambda}) \cos \Phi + F_{2\Lambda} F_{4\Lambda} \cos 2\Phi$$

Функции F_i ($i = 0, 1, \dots, 4$) зависят от переменных Λ , Φ и не зависят от переменной β . Поэтому правые части уравнений (13), (14) также не зависят от переменной β . Сис-

тема уравнений (13) является замкнутой системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных I, Λ, Φ , содержащей малые параметры ϵ, μ а уравнение (14) отделяется от системы (13) и может быть проинтегрировано после определения функций I, Λ, Φ (как функций времени) из системы (13).

Далее систему уравнений (13) будем рассматривать как систему с малым параметром μ при фиксированном значении параметра ϵ .

При $\mu = 0$ получим

$$\dot{I} = 18\epsilon\chi D_2 \rho^2 \omega_2^4 (\omega_2 - \omega_1), \quad \dot{\Lambda} = -18\epsilon\chi D_2 \rho^2 \omega_2^4 (\omega_2 - \omega_1) \quad (15)$$

$$\dot{\Phi} = \omega_2 - \omega_3 + 6\epsilon D_2 \rho^2 \Lambda^{-1} \omega_2^2 (\omega_1^2 + 6\omega_2^2) \quad (16)$$

Величины $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ определяются формулами (6). Заметим, что правые части уравнений (15), (16) не зависят от угловых переменных.

Решение системы уравнений (13) будем искать в виде [4]

$$I = J_1 + \mu N_{11} + \mu^2 N_{12} + \dots, \quad \Lambda = J_2 + \mu N_{21} + \mu^2 N_{22} + \dots$$

$$\Phi = \psi + \mu M_1 + \mu^2 M_2 + \dots \quad (17)$$

где функции $N_{ik} = N_{ik}(J, \psi)$, $M_k = M_k(J, \psi)$ ($i = 1, 2, k = 1, 2, \dots$) 2π -периодичны по переменной ψ и имеют нулевое среднее по этой переменной, $J = (J_1, J_2)$.

Как функции времени, J_1, J_2, ψ задаются дифференциальными уравнениями

$$\dot{J}_1 = A_{10}(J) + \mu A_{11}(J) + \mu^2 A_{12}(J) + \dots$$

$$\dot{J}_2 = A_{20}(J) + \mu A_{21}(J) + \mu^2 A_{22}(J) + \dots \quad (18)$$

$$\dot{\psi} = \omega(J) + \mu B_1(J) + \mu^2 B_2(J) + \dots$$

Функции F_i ($i = 0, 1, \dots, 4$) разложим в ряд по степеням малого параметра μ . Ограничиваясь членами второго порядка малости по μ , получим

$$F_0 = \mu f_{01} + \mu^2 f_{02}, \quad F_1 = f_{10} + \mu f_{11} + \mu^2 f_{12}, \quad F_2 = f_{20} + \mu f_{21} + \mu^2 f_{22}$$

$$F_3 = \mu f_{31} + \mu^2 f_{32}, \quad F_4 = \mu f_{41} + \mu^2 f_{42}$$

где

$$f_{01} = \Lambda \omega_2 (q \cos \Phi - p), \quad f_{02} = \frac{\Lambda \omega_2}{2} q^2 (1 - 3 \cos^2 \Phi)$$

$$f_{10} = \rho \omega_2^2, \quad f_{11} = \rho \omega_2^2 (p^3 - 3q \cos \Phi), \quad f_{12} = \frac{3\rho \omega_2^2}{2} q^2 (5 \cos^2 \Phi - 1)$$

$$f_{20} = 3\rho \omega_2^2, \quad f_{21} = 3\rho \omega_2^2 (p^5 - 5q \cos \Phi), \quad f_{22} = \frac{15\rho \omega_2^2}{2} q^2 (7 \cos^2 \Phi - 1) \quad (19)$$

$$f_{31} = 3\rho \omega_2^2 q (1 - p^5), \quad f_{32} = -15\rho \omega_2^2 q^2 \cos \Phi$$

$$f_{41} = 3\rho \omega_2^2 q^2 p^5, \quad f_{42} = 3\rho \omega_2^2 q^2$$

$$q = \frac{b}{R} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_3} \right)^{2/3} = \frac{f m^2 b}{\Lambda^2}, \quad p = \frac{1}{\sqrt{1 - 2q \cos \Phi + q^2}}$$

Подставляя разложения (17), (18) в уравнения (13) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра μ , получим систему уравнений, опре-

деляющую неизвестные функции $A_{1k}, A_{2k}, B_k, N_{1k}, N_{2k}, M_k$ ($k = 1, 2, \dots$). Функции $A_{10}(J)$, $A_{20}(J)$, $\omega(J)$ нулевого приближения по малому параметру μ имеют вид:

$$A_{10}(J) = -A_{20}(J) = 18\epsilon\chi D_2 \rho^2 \omega_2^4 (\omega_2 - \omega_1)$$

$$\omega(J) = \omega_2 - \omega_3 + 6\epsilon D_2 \rho^2 \Lambda^{-1} \omega_2^2 (\omega_1^2 + 6\omega_2^2)$$

где в выражениях для ω_1, ω_2 переменные I, Λ заменены соответственно переменными J_1, J_2 .

Система дифференциальных уравнений нулевого приближения по малому параметру μ относительно переменных J_1, J_2 имеет вид:

$$\dot{J}_1 = A_{10}(J), \quad \dot{J}_2 = A_{20}(J) \quad (20)$$

и описывает движение шара в центральном ньютоновском поле сил в классе квазикруговых орбит (рассматривается класс движений, когда вращение шара происходит вокруг нормали к плоскости орбиты). Система уравнений (20) имеет асимптотически устойчивое стационарное решение, соответствующее режиму гравитационной стабилизации шара на круговой орбите с центром в точке O (совпадающей в нулевом приближении по μ с точкой M_1). Радиус R_0 этой орбиты определяется системой уравнений

$$J_1 + J_2 = G_0, \quad J_1 / A = f^2 m^3 / J_2^3 \quad (21)$$

Здесь G_0 – момент количеств движения шара относительно точки O , остающийся неизменным в нулевом приближении по малому параметру μ . При выполнении неравенства

$$G_0 > \frac{4}{3} (3A f^2 m^3)^{1/4}$$

система уравнений (21) имеет два решения (J_{11}, J_{21}) и (J_{12}, J_{22}) ($J_{21} < J_{22}$). Большему значению J_{22} соответствует асимптотически устойчивое стационарное решение системы уравнений (20). Таким образом,

$$R_0 = f^2 m^3 / J_{22}^3$$

В μ -окрестности указанного стационарного решения необходимо в разложениях (18) учитывать следующее приближение по μ . Полагая

$$A_{10}(J) = \epsilon\chi\mu\tilde{A}_0(J), \quad A_{20}(J) = -\epsilon\chi\mu\tilde{A}_0(J)$$

выпишем систему уравнений, определяющую неизвестные функции $A_{11}, A_{21}, N_{11}, N_{21}, M_1$ первого приближения по малому параметру μ

$$\begin{aligned} A_{11} + N_{11}\psi\omega &= \epsilon\chi D_2 \{18f_{10}^2 f_{01,2} - (2f_{20}f_{31} \sin \psi + f_{20}f_{41} \sin 2\psi)\psi(\omega_2 - \omega_3)\} \\ A_{21} + N_{21}\psi\omega &= \{-f_{01} + \epsilon D_2 Q_1\}\psi - \\ &- \epsilon\chi D_2 \{18f_{10}^2 f_{01,2} - (2f_{20}f_{31} \sin \psi + f_{20}f_{41} \sin 2\psi)\psi(\omega_2 - \omega_3)\} \\ B_1 + M_1\psi\omega &= \omega_{,1}N_{11} + \omega_{,2}N_{21} + \omega_3 + \{f_{01} - \epsilon D_2 Q_1\}_{,2} + \\ &+ \epsilon\chi D_2 \{f_{20,2}(2f_{11} - f_{41} \sin^2 \psi)(\omega_2 - \omega_3) - 6f_{01}(f_{10,2})^2\}\psi \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$Q_1 = \rho\omega_1^2 f_{11} + 3f_{10}(2f_{11} - f_{41} \sin^2 \psi)$$

а в функциях f_{jk} переменные Λ , Φ заменены соответственно переменными J_2 , ψ . Индекс i ($i = 1, 2$) после запятой означает частную производную по J_i : $f_{01,2} = \partial f_{01} / \partial J_2$ и т.д.

Функции A_{11} , A_{21} первого приближения по малому параметру μ , определяющие эволюцию переменных действия, имеют вид

$$A_{i1} = 18(-1)^{i+1} \epsilon \chi D_2 f_{10}^2 \langle f_{01,2} \rangle, \quad i = 1, 2$$

где

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cdot) d\psi, \quad \langle f_{01,2} \rangle = 2\omega_2 a(q), \quad a(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - q \cos \psi}{(1 - 2q \cos \psi + q^2)^{3/2}} d\psi$$

При $q = 1$ интеграл, определяющий функцию $a(q)$, расходится. При $q < 1$, т.е. для внешних орбит шара, функция $a(q)$ принимает положительные значения, а при $q > 1$, т.е. для внутренних орбит шара, функция $a(q)$ принимает отрицательные значения.

Приближенные уравнения, описывающие эволюцию переменных I , Λ при учете членов первого приближения по малому параметру μ , имеют вид:

$$\dot{J}_i = 18(-1)^{i+1} \epsilon \chi D_2 \rho^2 \omega_2^4 \{(\omega_2 - \omega_1) + 2\mu \omega_2 a(q)\}, \quad i = 1, 2 \quad (23)$$

Из системы (23) следует, что $\dot{J}_1 + \dot{J}_2 = 0$, т.е. и в первом приближении по малому параметру μ сохраняется момент количеств движения G_0 относительно точки O . Система уравнений (23), так же как и система (20), обладает асимптотически устойчивым стационарным решением, соответствующим движению шара, при котором его центр масс движется по орбите радиуса R_1 , отличного от R_0 , с угловой скоростью

$$\omega_1 = \omega_2 (1 + 2\mu a(q)) \quad (24)$$

Из свойств функции $a(q)$ и из того, что в уравнениях (23) сохраняется момент количеств движения G_0 , следует, что стационарная орбита радиуса R_1 незначительно смещена к орбите тела массы μ по сравнению с орбитой радиуса R_0 , полученной в нулевом приближении по малому параметру μ . Таким образом, на первом этапе медленной диссипативной эволюции, протекающей со скоростью порядка $\epsilon \chi \mu$, радиус квазикруговой орбиты шара, находящегося внутри орбиты тела массы μ , увеличивается, а радиус квазикруговой орбиты шара, находящегося вне орбиты тела массы μ , уменьшается, стремясь к новому своему стационарному значению R_1 .

При движении шара по орбите радиуса R_1 с угловой скоростью, определяемой выражением (24), происходит дальнейшее рассеяние энергии. В μ^2 -окрестности этого аттрактора необходимо в разложениях (18) учитывать следующее приближение по μ .

Полагая

$$A_{i0}(J) + \mu A_{i1}(J) = (-1)^{i+1} \epsilon \chi \mu^2 \tilde{A}_i(J), \quad i = 1, 2$$

найдем сумму функций $A_{12}(J) + A_{22}(J)$ второго приближения по малому параметру μ , определяющую эволюцию кинетического момента G_0 . Соответствующее уравнение второго приближения имеет вид:

$$\begin{aligned} & A_{12} + A_{22} + (N_{11,1} + N_{21,1})A_{11} + (N_{11,2} + N_{21,2})A_{21} + (N_{11\psi} + N_{21\psi})B_1 + (N_{12\psi} + N_{22\psi})\omega = \\ & = -(f_{01} - \epsilon D_2 Q_1)_{\psi\psi} M_1 - (f_{01} - \epsilon D_2 Q_1)_{\psi,2} N_{21} + (\epsilon D_2 Q_1)_{\psi,1} N_{11} - \\ & - \epsilon \chi D_2 \langle f_{01,2} \rangle \{2f_{20}f_{31} \sin \psi + f_{20}f_{41} \sin 2\psi\}_{\psi} + (-f_{02} + \epsilon D_2 Q_2)_{\psi} + \\ & + \epsilon \chi D_2 \{(2f_{20}f_{31} \sin \psi + f_{20}f_{41} \sin 2\psi)_{\psi} f_{01,2} + f_{20,2}f_{01\psi} [2f_{11} - f_{41} \sin^2 \psi]_{\psi}\} - \end{aligned} \quad (25)$$

$$-\epsilon\chi D_2 \left\{ \frac{3}{2}(f_{11\psi})^2 + \frac{1}{2}(f_{21\psi})^2 + 2(f_{31\psi})^2 + \frac{1}{2}(f_{41\psi})^2 + 2f_{31}^2 + 2f_{41}^2 + f_{21\psi}(2(f_{31}\cos\psi)_\psi + \right. \\ \left. + (f_{41}\cos 2\psi)_\psi) + 2f_{41\psi}(f_{31\psi}\cos\psi + f_{31}\sin\psi) + 4f_{41}(f_{31}\cos\psi - f_{31\psi}\sin\psi) \right\}(\omega_2 - \omega_3) \quad (25)$$

где

$$Q_2 = \rho\omega_1^2 f_{12} + 3f_{11}^2 + 6f_{10}f_{12} + (f_{31}^2 - f_{20}f_{42} - f_{21}f_{41})\sin^2\psi$$

а в функциях f_{jk} переменные Λ, Φ заменены соответственно переменными J_2, ψ .

Так как среднее функций N_{ij} равно нулю, то для определения суммы функций $A_{12}(J) + A_{22}(J)$ необходимо усреднить правую часть равенства (25) по переменной ψ .

Слагаемые в правой части равенства (25), содержащие множители функции первого приближения N_{11}, N_{21}, M_1 , могут быть преобразованы согласно соотношению

$$\langle U_\psi V \rangle = -\langle UN_\psi \rangle$$

Поэтому, выражая производные $N_{11\psi}, N_{21\psi}, M_{1\psi}$ из системы уравнений первого приближения (22) и учитывая равенства (19), получим

$$A_{12} + A_{22} = 18\epsilon\chi D_2 \rho^2 \omega_2^5 b(q)$$

где

$$b(q) = \langle h_1(q, \psi) + h_2(q, \psi) + h_3(q, \psi) - h_4(q, \psi) - h_5(q, \psi) \rangle$$

$$h_1(q, \psi) = \frac{2q^{3/2}}{q^{3/2} - 1} \left\{ 2a_1(q, \psi) + \frac{3q^{3/2}}{q^{3/2} - 1} (q\cos\psi - p) \right\} \{a(q) - a_1(q, \psi)\}$$

$$a_1(q, \psi) = p^3(1 - q\cos\psi) - 2q\cos\psi$$

$$h_2(q, \psi) = \left\{ 4a_1(q, \psi) + \frac{3q^{3/2}}{q^{3/2} - 1} (q\cos\psi - p) \right\} \{5q^2 p^7 (1 - q\cos\psi) \sin^2\psi +$$

$$+ q(1 - p^5) \cos\psi + q^2 p^5 \cos 2\psi\}$$

$$h_3(q, \psi) = 6q^2(1 - p^3) \{2(1 - p^5 - qp^5 \cos\psi) + 5q^2 p^7 \sin^2\psi\} \sin^2\psi$$

$$h_4(q, \psi) = \frac{12q^{3/2}}{q^{3/2} - 1} q^2 (1 - p^3)^2 \sin^2\psi$$

$$h_5(q, \psi) = (1 - q^{-3/2}) \sum_{k=1}^5 g_k(q, \psi)$$

$$g_1(q, \psi) = \frac{1}{4} q^2 \{3(1 - p^5)^2 + 25(1 - p^7)^2 + 100q^2 p^{14} + 25q^4 p^{14}\} \sin^2\psi$$

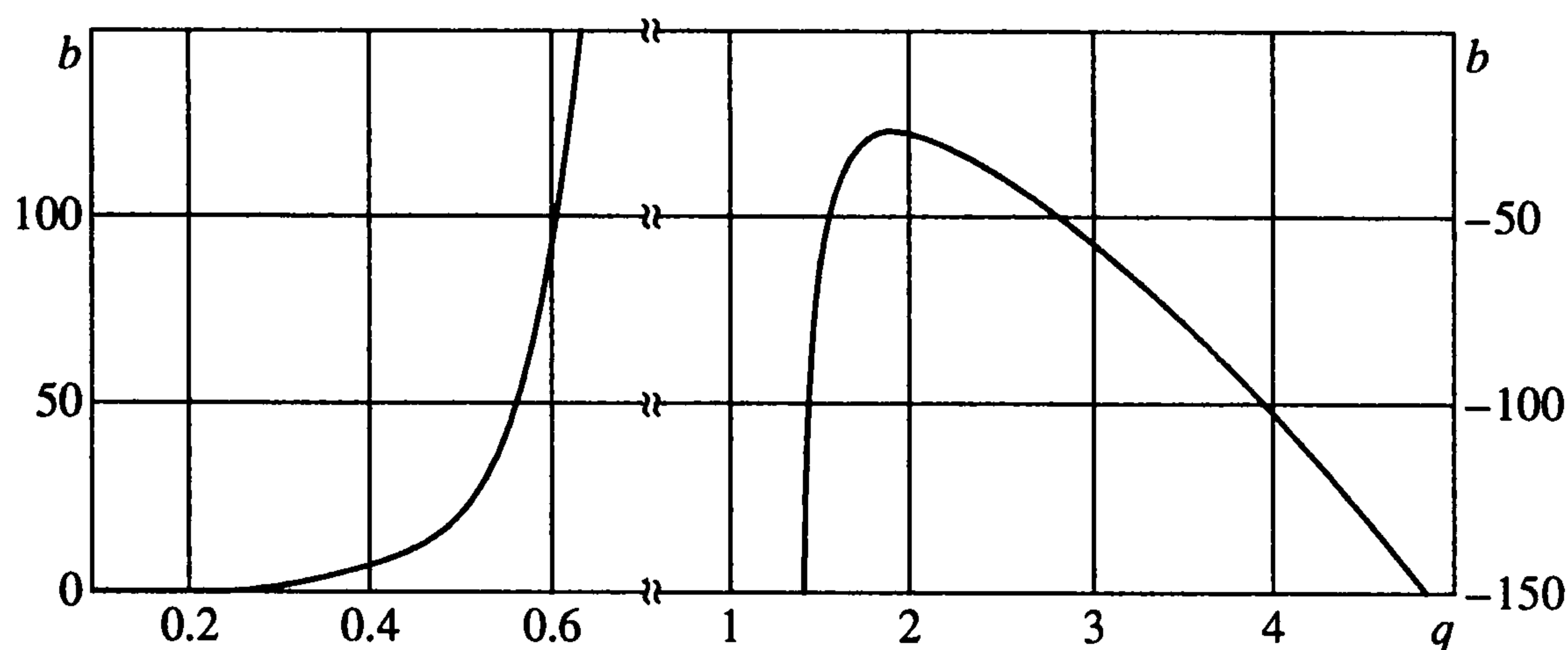
$$g_2(q, \psi) = q^2(1 - p^5)^2 + q^4 p^{10}$$

$$g_3(q, \psi) = 5q^2(1 - p^7) \{qp^5(5p^2 - 2)\cos\psi + p^5 - 1 - \frac{5}{2}q^2 p^7 \cos 2\psi\} \sin^2\psi$$

$$g_4(q, \psi) = -5q^4 p^7 \{5qp^7 \cos\psi + 1 - p^5\} \sin^2\psi$$

$$g_5(q, \psi) = 2q^3 p^5 \{(1 - p^5) \cos\psi - 5qp^7 \sin^2\psi\}$$

Графики функции $b(q)$ для $q < 1$ и $q > 1$ представлены на фиг. 2. При $q < 1$ (для внешних орбит шара) функция $b(q)$ положительна, а при $q > 1$ (для внутренних орбит шара) отрицательна.



Фиг. 2

На втором этапе медленной эволюции справедливы соотношения

$$J_1 = Af^2 m^3 J_2^{-3} + O(\mu), \quad J_2^2 = fm^2 bq^{-1} + O(\mu)$$

из которых получим с точностью до малых порядка μ связь между усредненным значением кинетического момента $G_0 = J_1 + J_2$ и q в виде

$$G_0(q) = m(fb/q)^{1/2} + Af^{1/2}(b/q)^{-3/2}, \quad q < q_* = bm^{1/2}(3A)^{-1/2} \quad (26)$$

Величина q должна выбираться меньшей q_* (q_* – точка минимума функции $G_0(q)$), что соответствует устойчивой круговой орбите большего радиуса в невозмущенной задаче при $\mu = 0$. Соотношение (26) совместно с уравнением второго приближения

$$\dot{G}_0 = 18\epsilon\chi\mu^2 D_2 \rho^2 \omega_2^5(q) b(q) \quad (27)$$

определяет эволюцию усредненного момента количеств движения шара. Функция $G_0(q)$ и обратная ей функция $q(G_0)$ при $q < q_*$ положительны и монотонно убывают. Из уравнения (27) при учете соотношения (26) и свойств функции $b(q)$ следует, что усредненный момент количеств движения G_0 увеличивается для внешних орбит шара и уменьшается для внутренних. Из характера зависимости $q(G_0)$ можно сделать вывод, что для внешних орбит их радиус монотонно возрастает, а для внутренних убывает.

Полученные на основе приближенных уравнений результаты справедливы для областей изменения радиусом квазикруговых орбит, исключая окрестность точки b , в которой могут находиться точки либрации, так как в этом случае оказываются некорректными процедура усреднения по быстрой угловой переменной Φ и разложение в ряд одного из гравитационных потенциалов.

В заключение заметим, что полученный выше характер эволюции квазикруговых орбит вязкоупругого шара согласуется с теоремой об изменении обобщенной энергии в равномерно вращающейся системе координат, в которой притягивающие центры неподвижны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильке В.Г., Шатина А.В. Эволюция движения вязкоупругого шара в ограниченной круговой задаче трех тел // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 5. С. 772–782.
2. Вильке В.Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во мех.-мат. фак.-та МГУ. 1997. Ч. 1. 215 с. Ч. 2. 160 с.
3. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 799 с.
4. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.V.2001