

УДК 531.36:62–50

© 2002 г. О.Р. Каюмов

ГЛОБАЛЬНО УПРАВЛЯЕМЫЕ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С НЕСКОЛЬКИМИ УСТОЙЧИВЫМИ СОСТОЯНИЯМИ ПОКОЯ

Рассматриваются натуральные лагранжевы системы, моделируемые механизмами с кинематической структурой дерева и имеющие несколько устойчивых состояний покоя. Приводятся достаточные условия глобальной управляемости, т.е. возможности допустимым управляющим воздействием перевести систему за конечное время из любого исходного фазового состояния в любое заданное. В качестве примера показана глобальная управляемость объекта из нескольких точечных масс, соединенных последовательно пружинами и скользящих без трения по замкнутой гладкой кривой в поле тяготения, когда единственная управляющая сила приложена вдоль скорости к первому звену.

1. Основные определения. В настоящей работе свойства управляемости динамических систем обсуждаются на языке, сформировавшемся в литературе [1, 2]. В продолжение исследований, проведенных ранее [3, 4], рассматриваются объекты с цилиндрическим фазовым пространством, например многозвенные маятники и т.п. Без изменений из [4] заимствуются все обозначения и определения.

Натуральными лагранжевыми системами называются объекты с симметричной относительно обращения времени ($t \rightarrow -t$) функцией Лагранжа

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - B(\mathbf{q})$$

где $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$ – вектор конфигурации, $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ – матрица инерции (положительно определена). Вновь полагается, что скалярный потенциал $B(\mathbf{q})$ ограничен снизу: $B(\mathbf{q}) \geq 0$, $B(0) = 0$, а уравнения движения имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in U \subset \mathbf{R}^n \quad (1.1)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ – вектор управлений из наперед заданного ограниченного множества U , содержащего внутреннюю точку $\mathbf{u} = 0$. Значения некоторых ("угловых") координат q_i ($i = 1, 2, \dots, r$) берутся в накрывающем пространстве $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^{n-r}$, соответствующем конфигурационному $\mathbf{M} = \mathbf{T}^r \times \mathbf{R}^{n-r}$, где $\mathbf{T}^r$ – r -мерный тор. При этом используется запись $\mathbf{q} \in \mathbf{M}$. Аналогично определяется фазовое пространство $\mathbf{T}\mathbf{M} = \mathbf{T}^r \times \mathbf{R}^{2n-r}$, так что $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbf{T}\mathbf{M}$.

Если обратной связи $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ соответствует сепаратрисная поверхность в $\mathbf{T}\mathbf{M}$, движение по которой к особой точке происходит за бесконечное время, то поверхность обозначается $\Omega(\mathbf{u}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))$. Множество положений равновесия

$$\zeta = \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) : \dot{\mathbf{q}} = 0, \partial B / \partial \mathbf{q} = 0, \mathbf{u} = 0\}$$

непустое и конечное.

Для любой скалярной функции $V(\mathbf{y})$ используются обозначения: $Q_V = \{\mathbf{y} : \partial V / \partial \mathbf{y} = 0\}$ – множество критических точек, $E_V = \{c : c = V(\mathbf{y})\}$ – множество значений, $H_c(V(\mathbf{y})) = \{\mathbf{y} : V(\mathbf{y}) \leq c, c \in E_V\}$ – области, ограниченные поверхностями равного уровня функции.

Известно [1, 2], что локальную управляемость, например системы (1.1), в окрестности положения равновесия достаточно обнаружить в линейном приближении, вычисляя для линеаризованного уравнения $y' = G y + N u$ (размерности n) матрицу управляемости $K = [N, GN, \dots, G^{n-1}N]$. Условие управляемости имеет вид $\text{rank } K = n$ [5], причем оно в точности повторяется [1] и для системы вдвое большего порядка $y'' = G y + N u$ (именно такую структуру получают линеаризованные уравнения Лагранжа).

Оценка области управляемости нелинейной системы (1.1) наиболее интересна в случае, когда количество управляющих воздействий меньше числа степеней свободы. Как и ранее [4], будем говорить о стабилизируемости, локальной управляемости или глобальной управляемости "по входам u_i ($i = 1, \dots, m$)", если выполняются условия $u_j \equiv 0$ ($j = m + 1, m + 2, \dots, n$).

Практический интерес представляют модели (1.1) механических систем, которые существенно нелинейны. Для них оценить свойства управляемости в конечных областях пространства состояний удастся лишь путем использования специфики конкретных классов объектов. С этой точки зрения рассматривались [3, 4] механизмы типа многозвенных маятников. Они характеризовались возможностью стабилизировать всю систему в единственном положении равновесия либо в состоянии стационарного вращения. Ниже расширяется перечень глобально управляемых объектов за счет некоторых систем твердых тел, имеющих не одно, а несколько положений устойчивого равновесия.

Достаточные условия глобальной управляемости опирались [3, 4] на свойства стабилизируемости, выявляемые прямым методом Ляпунова в теории устойчивости. Чтобы распространить известную теорему Барбашина – Красовского [6] на случай цилиндрического фазового пространства $T^k \times R^m$, было введено [7] понятие связной функции Ляпунова (СФЛ) $V(y)$ ($y \in T^k \times R^m$). Она не только определенно-положительна в смысле Ляпунова ($V(y) \geq 0$, $V(y) = 0 \Rightarrow y = 0$), но еще удовлетворяет условию связности всех множеств $P \cap H_c(V(y))$ в рассматриваемом множестве $P \subset T^k \times R^m$.

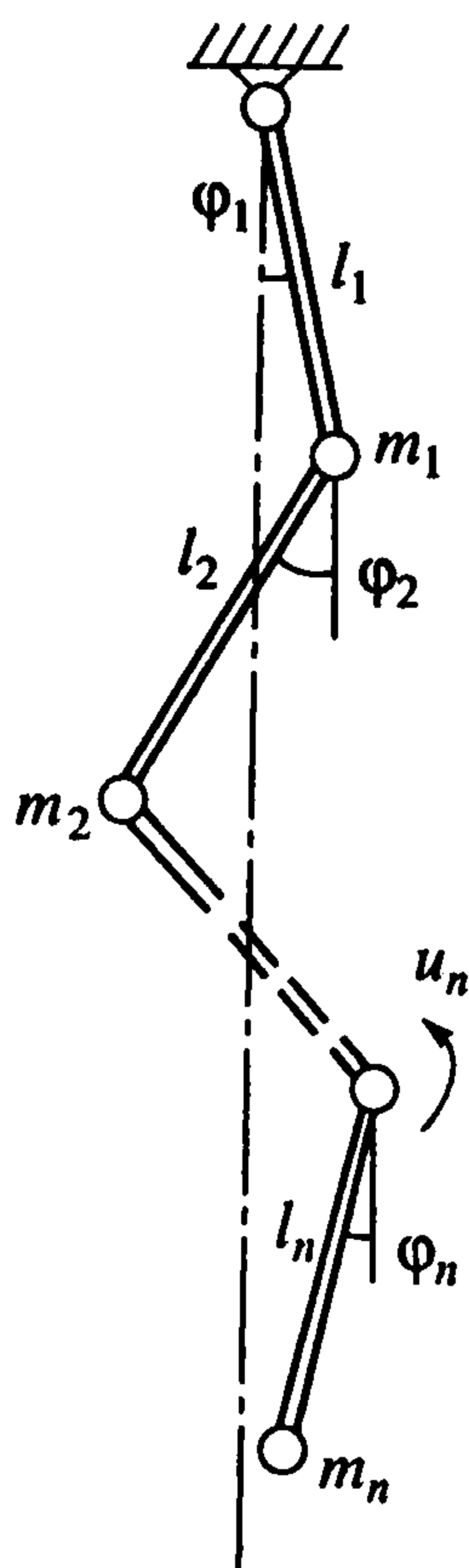
Например [7], если множество $Q \setminus \{0\}$ для функции Ляпунова $V(y)$ ($y \in P$), заданной на компактном многообразии $P \subset T^k \times R^m$, состоит из конечного числа изолированных точек, в каждой из которых матрица $\partial^2 V / \partial y^2$ не является положительно-определенной, то $V(y)$ – СФЛ на P . Иными словами, если на компакте P функция $V(y)$ не вырождена (т.е. является функцией Морса [8]) и имеет только один локальный минимум (в точке $y = 0$), то $V(y)$ – СФЛ на P .

Пример 1. В вертикальной плоскости расположена система из последовательно скрепленных цилиндрическими шарнирами n жестких стержней (фиг. 1). Все углы φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) отмеряются звеньями маятника от вертикальной оси, точка подвеса закреплена. Пусть стержни условно невесомы, а их массы сосредоточены в шарнирах. Тогда потенциальная энергия $B(q) = \sum b_i(1 - \cos \varphi_i)$, где $b_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), является СФЛ на T^n .

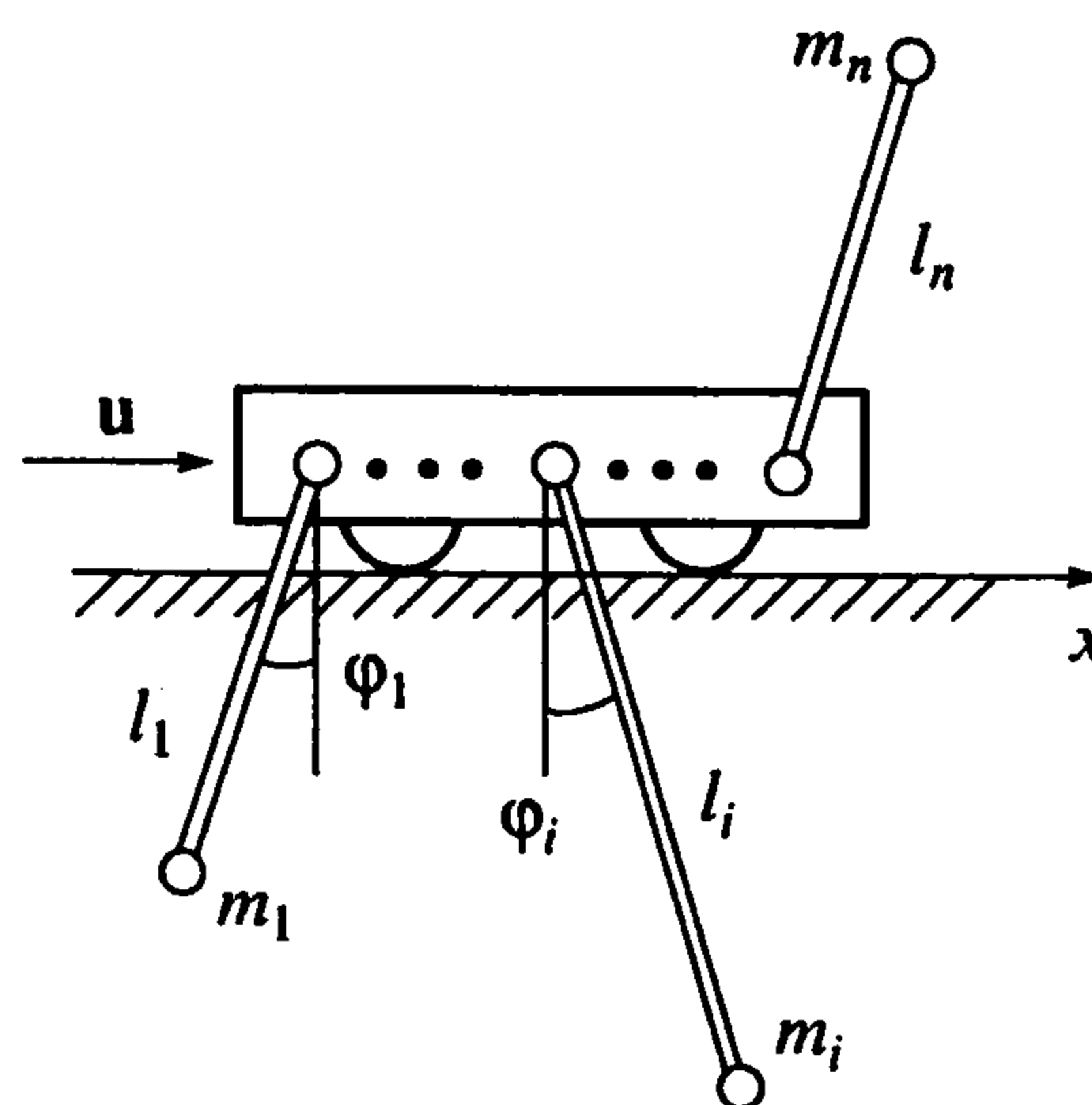
Пример 2. Тяжелая тележка, на которой подвешены n маятников (с разными длинами) в общей плоскости, совершает горизонтальное прямолинейное движение (координата x) под действием внешней горизонтальной силы u с наперед заданным ограничением $|u| \leq a$ (фиг. 2). Углы φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) отсчитываются от вертикали, вектор конфигурации $q = (x, \varphi_1, \dots, \varphi_n)^T \in M = T^n \times R$. Потенциал $B(q) = \sum d_i(1 - \cos \varphi_i)$, где $d_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), не является СФЛ на M . Однако за счет части управляющего воздействия ($u = u_1 + u_2$) можно искусственно создать "потенциальную яму", например, обратной связью $u_1 = -a(\arctg x)/\pi$. Тогда обобщенный потенциал

$$\{B(q) + a[x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)] / \pi\}$$

будет СФЛ на M .



Фиг. 1



Фиг. 2

Один из полученных ранее результатов [3] будем далее использовать в следующем виде, для простоты ограничиваясь случаем одномерного управления.

Утверждение 1. Пусть в системе (1.1) потенциал $V(q)$ – связная функция Ляпунова на M , а множества $H_c(V(q))$ компактны. Тогда

1) если при свободном движении ($u \equiv 0$) система не допускает частного решения $\dot{q}_j \equiv 0$ (исключая положения равновесия), то она стабилизируема по входу u_j ($j \in 1, 2, \dots, n$) на многообразии $TM \setminus \Omega(u_j)$,

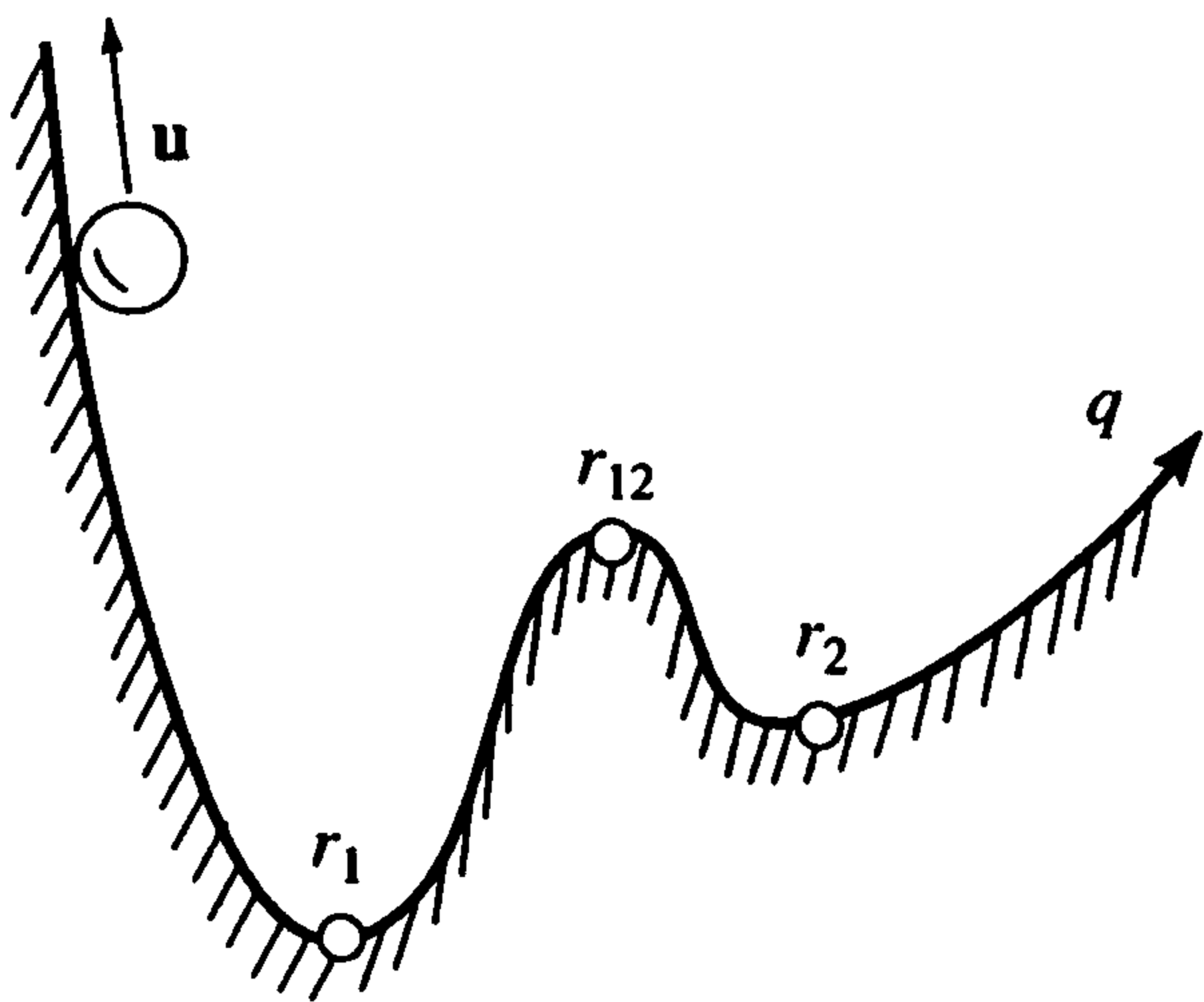
2) если при этом в окрестностях всех точек $(q_*, 0) \in \zeta$ имеет место локальная управляемость по тому же входу u_j , то система (1.1) глобально управляема при действии только u_j .

В частности, из утверждения 1 следует глобальная управляемость рассмотренного в примере 1 n -звенного маятника в вертикальной плоскости (без трения) при действии единственного ограниченного момента $|u_n| \leq a_n$ в последнем шарнире.

Аналогично доказывается [3] глобальная управляемость на $T^n \times \mathbb{R}^{n+2}$ системы из примера 2 (фиг. 2) при условии, что длины подвешенных на тележке маятников попарно различны.

2. Системы с конечным числом устойчивых состояний покоя. Можно обобщить утверждение 1 на случай нескольких локальных минимумов потенциальной энергии $V(q)$, т.е. не требовать от нее быть связной функцией Ляпунова на всем конфигурационном многообразии M . Достаточно лишь, чтобы все области $H_c(V(q))$ на M оставались компактными, причем в каждой их связной компоненте, содержащей единственный локальный минимум, функция $V(q)$ обладала свойствами типа СФЛ. При этом подразумевается невырожденность матриц $\partial^2 V / \partial q^2$ в точках, где $\partial V / \partial q = 0$. Иными словами, потенциал $V(q)$ должен быть функцией Морса на M .

Потребуется вновь локальная управляемость в окрестностях всех точек $(q_*, 0) \in \zeta$, а также отсутствие частных решений $\dot{q}_i \equiv 0$ (кроме состояний покоя), если управляемость исследуется по входу u_i ($i \in 1, 2, \dots, n$).



Фиг. 3

Конечность числа связных компонент множеств $H_c(B(q))$ (при любых c) позволяет проводить рассуждения, суть которых видна на простейшем примере (фиг. 3). Тяжелая точка m в потенциальной яме (без трения) может быть остановлена подходящим управлением u , действующим вдоль скорости, в одном из состояний устойчивого равновесия. Остановиться точно в точке r_1 или r_2 , а также избежать "застревания" в точке r_{12} позволяет локальная управляемость в окрестностях этих точек. В фазовом пространстве $(q, \dot{q})$ объект можно перевести из положения $(r_{12}, 0)$ в состояние $(r_1, 0)$, равно как и в $(r_2, 0)$.

Поэтому (ввиду симметрии уравнений относительно обращения времени) осуществимо управляемое движение $(r_1, 0) \rightarrow (r_{12}, 0) \rightarrow (r_2, 0)$. В результате для любых состояний системы $(q_0, \dot{q}_0)$ и $(q_k, \dot{q}_k)$ можно реализовать поэтапное перемещение $(q_0, \dot{q}_0) \rightarrow (r_1, 0) \rightarrow (r_2, 0) \rightarrow (q_k, \dot{q}_k)$ (с точностью до перемены ролями r_1 и r_2). Таким образом, система глобально управляема по входу u , ограниченному сколь угодно малой величиной.

Утверждение 2. Пусть для системы (1.1) потенциал $B(q)$ ($q \in M$) имеет конечное число критических точек, причем невырожденных. Одновременно пусть существует число $c_0 \in E_B$, такое, что область $H_c(B(q))$ при любом $c > c_0$ связная и компактная.

Если при свободном движении ($u \equiv 0$) не существует частных решений $\dot{q}_i \equiv 0$ ($i \in 1, 2, \dots, n$), кроме положений равновесия $(q_*, 0) \in \zeta$, а в окрестностях этих точек имеется локальная управляемость по тому же входу u_i , то система (1.1) глобально управляема при действии только u_i .

Доказательство. Так как области $H_c(B(q))$ при $c > c_0$ являются компактными, то они компактны при любом $c \in E_B$, ибо $H_c \subset H_{c+\epsilon}$. Если область $H_c(B(q))$ связна при любом $c \in E_B$, то $B(q)$ – СФЛ и выполняются условия утверждения 1.

Пусть (в общем случае) при некотором $c \leq c_0$ область $H_c(B(q))$ оказалась несвязной. Выделим на M множество η критических точек r_i ($i = 1, 2, \dots, s$) потенциала $B(q)$, в которых матрицы $\partial^2 B / \partial q^2$ определено-положительны. Каждой точке $r_j \in \eta$ соответствует содержащая ее связная компонента $h_j(c)$ множества $H_c(B(q))$, "растущая" с увеличением c .

Ввиду связности $H_c(B(q))$ при $c > c_0$ для любых двух точек локального минимума r_k и r_j ($k, j \in 1, 2, \dots, s$) (где $B(r_k) = c_k$, $B(r_j) = c_j$) найдется единственное число $c_{kj} < c_0$, такое, что

$$h_k(c) \cap h_j(c) = \emptyset \quad \text{при} \quad \max[c_k, c_j] < c < c_{kj}, \quad h_k(c) \cap h_j(c) \neq \emptyset \quad \text{при} \quad c > c_{kj}$$

Если при $c = c_{kj}$ общие точки возникают сразу для нескольких множеств $h_i(c)$, то их можно считать принадлежащими либо $h_k(c_{kj})$, либо $h_j(c_{kj})$. На множестве $h_k(c_{kj}) \cap h_j(c_{kj})$ выполнится условие $\partial B / \partial q = 0$, так как в его окрестности любые две точки (из разных компонент этого множества – h_k и h_j) не имеют в пределе сонаправленных градиентов $\partial B / \partial q$. Поскольку $B(q)$ – функция Морса, то "встреча" компонент $h_k(c)$ и $h_j(c)$ при $c \rightarrow c_{kj}$ происходит в конечном числе изолированных критических точек.

Начатое в одной из этих точек (назовем ее $(r_{kj}, 0)$) с кинетической энергией $T(t_0) = 0$ движение системы (1.1) может быть направлено в наперед выбранную область конфигураций ($h_k(c_{kj} - 0)$ или $h_j(c_{kj} - 0)$), ввиду локальной управляемости. Используя при этом управление из условия $dE/dt \leq 0$, получим $B(t_0) + T(t_0) \geq B(t_1) + T(t_1)$ для всех

$t_1 > t_0$, откуда следует, что $B(t_0) \geq B(t_1)$, т.е. конфигурация не выйдет за пределы выбранного множества (например, $h_k(c)$).

Отсутствие частных решений $q_i \equiv 0$ ($i \in 1, 2, \dots, n$) (кроме состояний покоя) и локальная управляемость в окрестностях всех точек равновесия позволят (по логике утверждения 1) достичь некоторой точки локального минимума $r_p \in \eta$ ($p \in 1, 2, \dots, s$) в $h_k(c)$.

Внутри множества $h_k(c)$ для точек r_k и r_p можно повторить предыдущие рассуждения: найти значение c_{kp} , выйти из состояния $(r_{kp}, 0)$ в одну из двух областей ($h_k(c_{kp} - 0)$ или $h_k \rightarrow h_p(c_{kp} - 0)$), попасть в новое устойчивое равновесие и т.д. После конечного числа шагов система окажется в $(r_k, 0)$ ввиду конечности числа s . Из ранее встреченной "развилки" $(r_{kj}, 0)$ аналогичным образом можно достичь положения $(r_j, 0)$ с конфигурацией в $h_j(c)$. Ввиду симметрии уравнений (1.1) относительно обращения времени это означает осуществимость поэтапного перехода $(r_k, 0) \rightarrow (r_{kj}, 0) \rightarrow (r_j, 0)$.

Итак, для любых двух устойчивых состояний покоя найдется соединяющая их траектория управляемого движения. Одновременно выяснилось, что при любых начальных условиях $(q_0, \dot{q}_0)$ (или $(q_k, \dot{q}_k)$) объект может быть остановлен в некотором положении устойчивого равновесия (заранее неизвестном). Ввиду уже упомянутой симметрии ($t \rightarrow -t$) отсюда следует реализуемость движения $(q_0, \dot{q}_0) \rightarrow (r_m, 0) \rightarrow \rightarrow (r_l, 0) \rightarrow (q_k, \dot{q}_k)$ (где индексы $m, l \in 1, 2, \dots, s$ найдутся по смыслу). Глобальная управляемость доказана.

Пример 3. Соединенные последовательно невесомыми пружинами жесткости c_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$), тяжелые колечки m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) (пренебрежимых размеров) могут скользить без трения по замкнутой проволоке без самопересечений, с ограниченной кривизной в каждой точке (фиг. 4). Единственным управляющим воздействием является внешняя сила u , $|u| \leq a$, приложенная к точке m_1 коллинеарно ее скорости. Дуговая координата s_1 точки m_1 отсчитывается вдоль проволоки от некоторого фиксированного положения. Для груза m_2 величина s_2 отсчитывается от положения точки, которое соответствовала бы значению $s_1 = 0$ и ненапряженной пружине c_1 . Аналогично отсчитываются остальные координаты $s_2, \dots, s_n$, так что деформация i -пружины будет $(s_{i+1} - s_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Вектор конфигурации системы $q = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T \in T^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Функция Лагранжа определяется постоянной матрицей инерции $A(q) = A = \text{diag}(m_i)(i = 1, 2, \dots, n)$ и потенциальной энергией

$$B(q) = \sum_{i=1}^n B_i(s_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} c_i (s_{i+1} - s_i)^2$$

где $B_i(s_i)$ – составляющая потенциала силы тяжести для i -го груза ($i = 1, 2, \dots, n$).

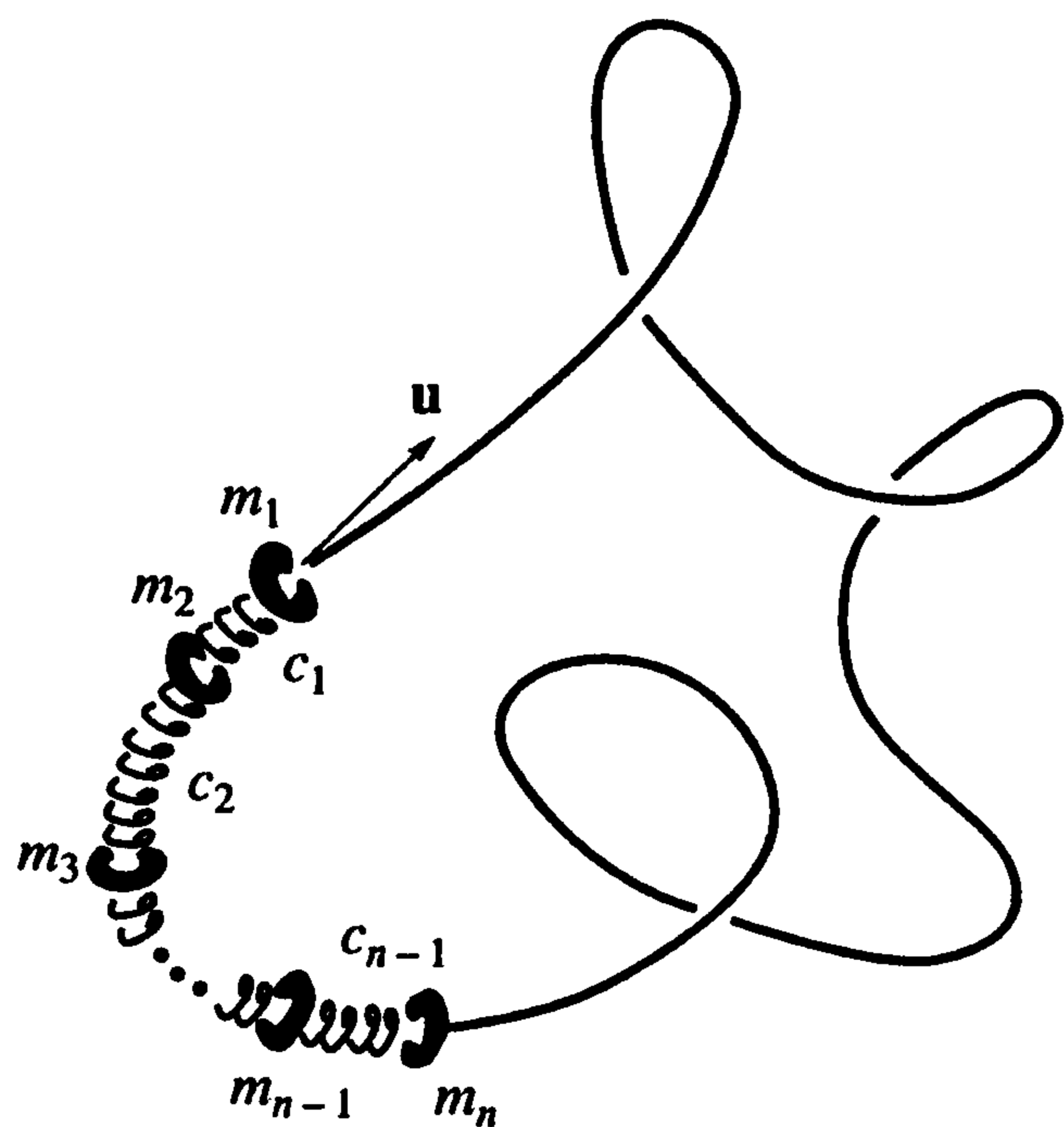
При свободном движении ($u = 0$) система не имеет частных решений $s_i \equiv 0$, исключая состояния покоя. В противном случае в проекции на касательную ось в точке m_1 уравновесились бы сила упругости и сила веса, т.е. оказалась бы постоянной деформация $(s_2 - s_1)$ пружины c_1 , а за ней последовательно и деформации всех остальных пружин, что отвечает равновесию объекта.

Пусть $(q_*, 0)$ – любое из состояний покоя. Покажем, что в его окрестности система локально управляема по входу u . В линейном приближении (с заменой $x = q - q_*$) уравнение движения

$$A\ddot{q} = -\partial B / \partial q + bu, \quad b = (1, 0, \dots, 0)^T$$

приобретает вид

$$A\ddot{x} = B_*x + bu$$



Фиг. 4

причем матрица B_* — трехдиагональная: главная диагональ состоит из элементов $-(\beta_1 + c_1)$, $-(\beta_2 + c_1 + c_2)$, ..., $-(\beta_i + c_{i-1} + c_i)$, ..., $-(\beta_{n-1} + c_{n-2} + c_{n-1})$, $-(\beta_n + c_{n-1})$, диагонали над и под ней — из элементов $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$. Здесь β_i ($i = 1, 2, \dots, n$) — коэффициенты квадратичной формы, аппроксимирующей потенциал силы тяжести в данной точке.

Замена

$$Ax = z, \quad D = B_* A^{-1}$$

приводит к уравнению

$$\ddot{z} = Dz + bu$$

Применяя ранговый критерий в известной форме [1], получим матрицу управляемости $K = (b, Db, \dots, D^{n-1}b)$ — верхнетреугольную, причем $\det K = \gamma_1^{n-1} \gamma_2^{n-2} \dots \gamma_{n-1} \neq 0$, где

$\gamma_i = c_i/m_i$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Поэтому $\text{rank } K = n$, что означает локальную управляемость в окрестности выбранного (произвольного) положения покоя.

В силу утверждения 2 рассматриваемая система из n тяжелых колечек, соединенных вдоль замкнутой проволоки последовательно пружинами, оказывается глобально управляемой при действии одной только силы u , приложенной к первому колечку и ограниченной сколь угодно малой величиной a .

Утверждение 3. Если система (1.1) глобально управляема в $TM = T^r \times \mathbb{R}^{2n-r}$, то она глобально управляема и в соответствующем накрывающем пространстве $TM_1 = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{2n-r}$.

Доказательство. Достаточно показать, что в TM_1 для любых двух положений покоя $(r_m, 0)$ и $(r_b, 0)$, аналогичных состоянию $(q_1, 0) \in \zeta \subset TM$ с минимальным значением $c_1 = B(q_1)$, найдется соединяющая их управляемая траектория. Тогда в TM_1 будет завершена цепочка

$$(q_0, \dot{q}_0) \rightarrow (r_m, 0) \rightarrow (r_b, 0) \rightarrow (q_k, \dot{q}_k)$$

в которой первый и третий переходы (в прямом и обратном времени) гарантированы глобальной управляемостью в TM . При этом в окрестности каждого состояния $q_1, q_2, \dots$ покоя заведомо обеспечена локальная управляемость.

Пронумеруем в порядке возрастания $c_1, c_2, \dots$ значения потенциала $c_i = B(q_i)$ в критических точках на M (число их конечно). Рассмотрим в TM_1 множество $F_c(B(q)) = \{q \in \mathbb{R}^n: B(q) < c, c \in [c_1, c_0]\}$ в зависимости от c . При $c_1 < c < c_2$ множество распадается на счетное число связных компонент, повторяющих "через периоды" фигуру $H_c(B(q)) \subset M$. Внутри каждой компоненты содержится один из бесконечных аналогов $r_1, r_2, \dots$ положения $q_1 \in M$ глобального минимума $B(q)$. Согласно известным результатам [8], при достижении значения $c = c_2$ некоторые из компонент соприкоснутся в точках, аналогичных $q_2 \in M$.

Пусть, например, содержащие r_1 и r_2 компоненты соприкоснулись в точке r_{12} . Тогда по логике утверждения 2 найдется управляемое движение $(r_1, 0) \rightarrow (r_{12}, 0) \rightarrow (r_2, 0)$ в TM_1 . Повторяя аналогичные переходы многократно, можно соединить траекторией любые конфигурации покоя r_s и r_k из бесконечной связной "цепочки" областей из $F_c(B(q))$. При $c = c_3$ характер связности множества $F_c(B(q))$ изменится [8] за счет соприкосновения некоторых из "цепочек" в точках $p_1, p_2, \dots$, аналогичных

$q_3 \in M$. Из положения $(p_l, 0) \in TM_1$ ввиду локальной управляемости возможен переход в любую из прилегающих компонент множества $F_c(B(q))$. При учете обратимости времени это гарантирует движение $(r_f, 0) \rightarrow (p_l, 0) \rightarrow (r_q, 0)$, где r_f и r_q – произвольные аналоги точки $q_1 \in M$, наперед выбранные из ставшего связным подмножества $F_c(B(q))$.

Рассуждение продолжается индукцией по c_i . Всякий раз внутри очередного, ставшего связным подмножества $F_c(B(q))$ любые два аналога конфигурации $q_1 \in M$ окажутся соединимыми (опосредованно) управляемой траекторией. При достаточно большой величине c множество $F_c(B(q))$ станет связным в R^n (иначе будет противоречие с глобальной управляемостью в TM). Следовательно, любые два аналога r_m и r_l точки $q_1 \in M$ окажутся в общей связной области и могут быть соединены управляемой траекторией.

Пример 4. Рассмотренные выше в примерах 1 и 2 объекты (фиг. 1, 2) в силу утверждения 3 являются глобально управляемыми в накрывающем фазовом пространстве. Их можно перевести скалярным ограниченным управлением за конечное время из произвольного начального состояния $(q_0, \dot{q}_0)$ в любое наперед заданное $(q_k, \dot{q}_k)$ с указанием требуемого результирующего числа полных оборотов каждого отдельного звена.

Автор благодарит И.Ф. Борецкого за высказанную им идею, заложенную в основу статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
2. Lee E.B., Markus L. Foundations of Optimal Theory. N.Y. etc.: Wiley, 1967 = Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 574 с.
3. Каюмов О.Р. О глобальной управляемости некоторых лагранжевых систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 6. С. 16–23.
4. Борецкий И.Ф., Каюмов О.Р. Глобально управляемые системы твердых тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 405–412.
5. Калман Р.Е. Об общей теории систем управления // Тр. 1-го Междунар. конг. ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961. Т. 2. С. 521–547.
6. Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. Об устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. 1952. Т. 86. № 3. С. 453–456.
7. Каюмов О.Р. Асимптотическая устойчивость в большом в системах с цилиндрическим фазовым пространством // Изв. вузов. Математика. 1987. № 10. С. 61–63.
8. Milnor J. Morse Theory. Princeton: Univ. Press, 1963 = Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965. 184 с.

Тара, Омская обл.
e-mail: mozhan@rambler.ru

Поступила в редакцию
12.X.2001