

УДК 62–50

© 2002 г. К.В. Корляков, А.Г. Ченцов

**ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ ПОСТРОЕНИЯ
МНОГОЗНАЧНОЙ КВАЗИСТРАТЕГИИ
ИТЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ**

Рассматривается пример применения новой модификации известного метода программных итераций (МПИ) к решению простейшей задачи управления с помехой. Установлено, что "прямая" (по смыслу) версия МПИ, действующая в пространстве многозначных отображений, требует для построения управляющей процедуры – многозначной квазистратегии, разрешающей исходную задачу, выполнения бесконечного числа итераций. Структура этих итераций устанавливается на основе двойственности "прямых" и "непрямых" (используемых ранее при построении функции цены и стабильных мостов в смысле Н.Н. Красовского) версий МПИ.

Структура решения многих дифференциальных игр (ДИ) [1–5] определяется основополагающей теоремой об альтернативе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина (см. [3]), которая утверждает, что пространство позиций в ДИ сближения–уклонения допускает альтернативное разбиение в сумму двух множеств, одно из которых – множество позиционного поглощения (стабильный мост) определяет множество всех начальных позиций, из которых игрок, заинтересованный в сближении, может гарантировать приведение траекторий системы на целевое множество. Для построения стабильных мостов использовались программные конструкции (см., например, [3, 4, 6, 7]), которые при некоторых условиях регулярности [2–4, 7], обеспечивали непосредственный переход от управления по программе к синтезу. Если эти условия не выполнены, то данный переход становится более сложным и требует иных методов. Одним из них является метод программных итераций (МПИ) [8–15] (см. также [5], гл. IV, V). Оказалось, что для некоторых нерегулярных ДИ построение решения (цена игры, стабильный мост) реализуется посредством всего двух итераций программного поглощения [8, 9], хотя в других случаях требуется выполнение всей бесконечной последовательности программных итераций (см. [14, 15]). Были указаны примеры (см. [14] и ряд последующих работ), где решение, определяемое посредством МПИ, достигается за любое наперед заданное количество итераций.

Упомянутые варианты МПИ являются "непрямыми" в смысле построения соответствующих управляющих процедур (с помощью МПИ воспроизводится посредник в виде функции цены игры или в виде стабильного моста). Эти процедуры можно определить на основе обратной связи (конструкции экстремального прицеливания и экстремального сдвига Н.Н. Красовского) или в виде квазистратегий (см. [16, 17] – однозначные квазистратегии, и [5, 8–11, 13, 14] – многозначные квазистратегии). Позднее была построена "прямая" версия МПИ [18–22], действующая в пространстве многозначных отображений; в задачах теории ДИ она обеспечивала непосредственное итерационное построение многозначной квазистратегии типа описанных ранее ([5], гл. IV, [8–11, 13, 14]), разрешающей соответствующую задачу управления.

В ряде простых примеров ДИ "прямая" версия МПИ реализует решение за две итерации (см. [18, 22]). Среди этих примеров есть и регулярные ДИ, в которых функция цены и стабильный мост находятся с помощью вспомогательных программных конструкций непосредственно (фактически речь идет о первой итерации в смысле "непрямой" версии МПИ).

Ниже построен пример ДИ, в которой (при весьма очевидном решении в виде многозначной квазистратегии) "прямая" версия МПИ доставляет решение (квазистратегию) только после выполнения бесконечного числа итераций. Стало быть, здесь имеем некий аналог предыдущих результатов [14, 15]. Данное свойство устанавливается с использованием специальной двойст-

венности, связывающей "непрямые" версии МПИ, подобные указанным ранее [8–15], и "прямые" версии [18–22]; в связи с этой двойственностью см. [23]. При этом "непрямые" версии объективно являются более простыми, так как речь идет о преобразовании множеств в конечномерном пространстве. Более того, в ряде случаев здесь удастся осуществить некоторую параметризацию итерационной процедуры, в результате чего последняя сводится к рекуррентной процедуре на вещественной прямой (такая конструкция рассматривалась [14] на примерах, затем была распространена на некоторый класс ДИ (см. [24] и др.), и наконец, была реализована [25] в виде программы на ЭВМ).

Что касается варианта МПИ [18–22], то данная схема имеет теоретический характер и связана с преобразованием многозначных отображений в функциональных пространствах. Двойственность [23] имеет в ряде случаев смысл сведения конструкции, требуемой для построения квазистратегий, к принципиально реализуемой форме, что проявляется и в примере, рассматриваемом ниже.

1. Простейший пример задачи управления с помехами. Рассмотрим простейшую управляемую систему Σ , определяемую скалярным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = u + v \quad (1.1)$$

на отрезке $[0, 1]$. Основной задаче соответствует нулевая начальная позиция $(0, 0)$, т.е. $x(0) = 0$. В целях согласования с рассмотренной ранее задачей [10, 14] полагаем, что в качестве управлений (полезного и помехового соответственно) допустимо использовать любые борелевские функции из $[0, 1]$ в $[-2, 2]$ и в $[-1, 1]$ соответственно. В первом случае множество всех программных управлений обозначаем через $\mathcal{U}$ (элементы $\mathcal{U}$ – полезные борелевские функции из $[0, 1]$ в $[-2, 2]$ и только они). Во втором случае аналогичное множество возможных помех $v(\cdot)$ обозначаем через $\mathcal{V}$.

Если движение системы Σ (1.1) рассматривается на отрезке $[t_*, 1]$, где $0 \leq t_* \leq 1$, из состояния $x_* \in \mathbf{R}$, то также используем в качестве управлений функции из множеств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ соответственно, хотя фактически "работают" лишь их сужения на $[t_*, 1]$: если $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, то траектория $x(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) = (x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)))_{t \in [t_*, 1]}$ системы Σ соответствует, очевидно, функции

$$t \mapsto x_* + \int_{t_*}^t u(\xi) d\xi + \int_{t_*}^t v(\xi) d\xi : [t_*, 1] \rightarrow \mathbf{R} \quad (1.2)$$

Здесь используются интегралы Лебега либо, что проще, – интегралы в указанном ранее смысле ([26], с. 69) при оснащении $[0, 1]$ стандартной σ -алгеброй борелевских множеств.

Конечно, для уравнения (1.1) использование столь общих конструкций по сути дела излишне, однако в их рамках будет удобно обращаться к общей процедуре МПИ [10, 14]. В сравнении с рассмотренными ранее задачами [8–11, 13, 14] имеем здесь случай, в котором использование управлений – мер также излишне, так как эффект действия последних реализуется с помощью борелевских управлений $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$.

В этой связи для требуемого далее конкретного случая приведем упрощенное определение оператора $\mathcal{A}_M$ [10, 14], достаточное для целей проводимого анализа. Здесь M – целевое множество в задаче наведения ([3], гл. III), определяемое условием

$$M \doteq \{(1, x) : x \in \mathbf{R}, |x| \geq 1\} \quad (1.3)$$

Разумеется, условие (1.3) определяет подмножество пространства позиций $\mathbf{D} \doteq [0, 1] \times \mathbf{R}$. В связи с общей процедурой [10, 14] (см. также [5], с. 178) заметим, что далее рассматривается задача управления без фазовых ограничений, что, в принятых ранее обозначениях [10, 14], соответствует случаю $N = \mathbf{D}$ (в более общих конструкциях [10, 14] через N обозначалось множество, определяющее фазовые ограничения соответствующей задачи управления). С учетом упомянутых обстоятельств заметим, что оператор $\mathcal{A}_M$, подобный введенному ранее [10, 14], действует в семействе

$\mathcal{D}$ всех подмножеств $\mathbf{D}$ и при $H \in \mathcal{D}$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_M(H) \doteq \{ (t_*, x_*) \in H \mid \forall v(\cdot) \in \mathcal{V} \exists u(\cdot) \in \mathcal{U} \\ \exists \vartheta \in [t_*, 1] : ((\vartheta, x(\vartheta, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \in M) \& \\ \& ((\xi, x(\xi, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \in H, \forall \xi \in [t_*, \vartheta]) \} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Пусть $\mathcal{F}$ – семейство всех замкнутых подмножеств $\mathbf{D}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}$; при $H \in \mathcal{F}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_M(H) = \{ (t_*, x_*) \in H \mid \forall v(\cdot) \in \mathcal{V} \exists u(\cdot) \in \mathcal{U} : \\ (|x(1, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))| \geq 1) \& \\ \& ((\xi, x(\xi, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \in H, \forall \xi \in [t_*, 1]) \} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из выражения (1.5) следует, что для множеств из $\mathcal{F}$ значения оператора $\mathcal{A}_M$, определяемого условием (1.4), совпадают со значениями оператора $\mathcal{A}$, введенного ранее ([5], с. 178, 179). Здесь учитываем естественную замкнутость M (1.3) и $\mathbf{D}$, а также тот факт, что $\mathcal{F}$ – инвариантное подпространство $\mathcal{A}_M$. Стало быть, на языке, используемом при записи условия (1.4), для $M = \{(1, x) : x \in \mathbf{R}, |x| \geq 1\}$ в виде итерационной последовательности W_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), т.е.

$$(W_0 \doteq \mathbf{D}) \& (W_k = \mathcal{A}_M(W_{k-1}), \forall k \in \mathcal{N}) \quad (1.6)$$

где $\mathcal{N} \doteq \{1, 2, \dots\}$, имеем свойство сходимости к множеству позиционного поглощения W_∞ : множество W_∞ совпадает с пересечением всех множеств W_k ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Рассмотрим теперь конкретное построение процедуры (1.6), используя предложенную ранее методику [14, 24]. Суть ее состоит в следующем: все итерации в (1.6) имеют одну и ту же форму, но различаются значениями некоторого параметра, поэтому процедуру (1.6) можно свести к итерациям этого параметра. Введем множество

$$\mathcal{W} \doteq \{(t, x) \in \mathbf{D} \mid t \leq |x|\} \in \mathcal{D} \quad (1.7)$$

а также отображение $\mathbf{H}$ из [0.1] в $\mathcal{D}$, для которого

$$\mathbf{H}(\vartheta) \doteq \mathcal{W} \cup ([0, \vartheta] \times \mathbf{R}), \quad \vartheta \in [0, 1] \quad (1.8)$$

Рассматриваем $\mathbf{H}$ (1.8) как функцию формы множеств в (1.6).

Покажем, что $W_k = \mathbf{H}(\vartheta_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Соответствующая последовательность $(\vartheta_k)_{k=0}^\infty$ будет указана (см. также [24]). Заметим, что в силу определения (1.8)

$$(W_0 = \mathbf{D} = \mathbf{H}(1)) \& (\mathcal{W} = \mathbf{H}(0)) \quad (1.9)$$

Построение последовательности $(\vartheta_k)_{k=0}^\infty$ в силу соотношения (1.9) можно рассматривать как некоторый переход от 1 к 0 в пространстве параметров.

Отметим, что при $\vartheta \in [0, 1]$ может быть определено множество $\mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta))$.

Отметим также одно обстоятельство, которое для несколько иной (но подобной) задачи было установлено ранее [14] (см. также обзор в [5], § 4); подобное утверждение было приведено [24] для более общего случая: если $\vartheta \in [0, 1]$, то

$$\mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta)) = \mathbf{H}(\vartheta/2) \quad (1.10)$$

В целях полноты изложения рассмотрим обоснование соотношения (1.10). Фиксируем $\vartheta \in [0, 1]$. Пусть $(t_*, x_*) \in \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta))$. Тогда, в частности, $(t_*, x_*) \in \mathbf{H}(\vartheta)$. Покажем, что $(t_*, x_*) \in \mathbf{H}(\vartheta/2)$. Для этого рассмотрим отдельно два возможных в силу определения (1.8) случая: либо $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}$, а в этом случае $(t_*, x_*) \in \mathbf{H}(\vartheta/2)$, либо

$$(t_*, x_*) \in \mathbf{H}(\vartheta) \setminus \mathcal{W} \quad (1.11)$$

Отдельного рассмотрения требует лишь случай (1.11). Тогда $|x_*| < t_*$. Вместе с тем из соотношений (1.8), (1.11) имеем $t_* \in [0, v]$. По выбору (t_*, x_*) из определения (1.8) получаем

$$\forall v(\cdot) \in \mathcal{V} \exists u(\cdot) \in \mathcal{U} : (1 \leq |x(1, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))|) \& \\ \&((\xi, x(\xi, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta), \quad \forall \xi \in [t_*, 1]) \quad (1.12)$$

(напомним, что $|x_*| < t_* \leq \vartheta$). Зафиксируем $\bar{v}(\cdot) \in \mathcal{V}$. Подберем, используя соотношение (1.12), $\bar{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ так, что

$$(1 \leq |x(1, t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))|) \& \\ \&((\xi, x(\xi, t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta), \quad \forall \xi \in [t_*, 1]) \quad (1.13)$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\vartheta \leq |x(\vartheta, t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))| \quad (1.14)$$

В самом деле, при $\vartheta = 1$ неравенство (1.14) есть первое утверждение в соотношении (1.13). Пусть $\vartheta < 1$. Тогда $\vartheta \in [t_*, 1[$ и вместе с тем $\forall \tau \in]\vartheta, 1[: (\tau, x(\tau, t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta)$.

Стало быть, $(\tau, x(\tau, t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))) \in \mathcal{W}$ (см. (1.8)), при $\tau \in]\vartheta, 1[$ имеем, следовательно, $\tau \leq |x(\tau, t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))|$.

Полагаем

$$\vartheta_k \doteq \vartheta + (1 - \vartheta)/k, \quad \forall k \in \mathcal{N}$$

Тогда $(\vartheta_k)_{k \in \mathcal{N}}$ – последовательность в $]\vartheta, 1[$, сходящаяся к ϑ справа. В силу условия

$$\vartheta_k \leq |x(\vartheta_k, t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))|, \quad \forall k \in \mathcal{N}$$

используя непрерывность траектории, получаем неравенство (1.14) и в случае $\vartheta < 1$.

Полезно отметить, что

$$x(t_*, t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot)) = x_*, \quad |x(t_*, t_*, x_*, \bar{u}(\cdot), \bar{v}(\cdot))| < t_*$$

что в сравнении с неравенством (1.14) дает $t_* \neq \vartheta$, т.е. $t_* < \vartheta$. Напомним также, что $|x_*| < t_*$.

Введем обозначения

$$I_f(\vartheta) \doteq \int_{t_*}^{\vartheta} f(t) dt, \quad f = u, v, \bar{u}, \bar{v}, \dots$$

Из неравенства (1.14) имеем

$$\vartheta \leq |x_* + I_{\bar{v}}(\vartheta)| + |I_{\bar{u}}(\vartheta)| \leq |x_* + I_{\bar{v}}(\vartheta)| + 2(\vartheta - t_*) \quad (1.15)$$

(напомним, что функция $\bar{v}(\cdot)$ выбиралась произвольно). Итак, в силу неравенства (1.15)

$$|x_* + I_{\bar{v}}(\vartheta)| + 2(\vartheta - t_*) \geq \vartheta, \quad \forall v(\cdot) \in \mathcal{V}$$

Из неравенства (1.15), в частности, следует, что

$$\forall v(\cdot) \in \mathcal{V} \exists u(\cdot) \in \mathcal{U} : |x_* + I_{\bar{v}}(\vartheta) + I_u(\vartheta)| \geq \vartheta \quad (1.16)$$

(разумеется, это соотношение извлекается и из неравенства (1.14)).

Рассмотрим следующие два возможных случая:

- 1) $\exists v(\cdot) \in \mathcal{V} : x_* + I_{\bar{v}}(\vartheta) = 0$,
- 2) $|x_* + I_{\bar{v}}(\vartheta)| > 0, \quad \forall v(\cdot) \in \mathcal{V}$.

В случае 1, возвращаясь к соотношениям (1.15) и (1.16), получаем $t_* \leq \vartheta/2$.

В случае 2 имеем $x_* \neq 0$. Подберем управление $v_*(\cdot) \in \mathcal{V}$ следующим образом: полагаем $v_*(t) \equiv -\operatorname{sgn} x_*$. Тогда

$$x_* + I_{v_*}(\vartheta) = [|x_*| - (\vartheta - t_*)] \operatorname{sgn} x_* \quad (1.17)$$

Допустим, что $|x_*| < \vartheta - t_*$, причем, как уже отмечалось, $\vartheta - t_* > 0$. Введем постоянное управление по правилу

$$v_{**}(t) \equiv -x_*/(\vartheta - t_*), \quad v_{**}(\cdot) \in \mathcal{V}$$

(уже знаем, что $|v_{**}(t)| < 1$). Тогда

$$x_* + I_{v_{**}}(\vartheta) = x_* - x_* = 0$$

что невозможно в случае 2. Стало быть, $|x_*| - (\vartheta - t_*) \geq 0$ и, как следствие,

$$|x_* + I_{v_*}(\vartheta)| = |x_*| - (\vartheta - t_*)$$

Используя следствие неравенства (1.15), получаем $|x_*| \geq t_*$, что невозможно. Итак, случай 2 невозможен. Таким образом, установлено, что $t_* \leq \nu/2$, и, стало быть, $(t_*, x_*) \in \mathbf{H}(\vartheta/2)$. Вложение

$$\mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta)) \subset \mathbf{H}(\vartheta/2) \quad (1.18)$$

установлено.

Покажем, что на самом деле правая и левая части соотношения (1.18) равны.

Пусть $(t^*, x^*) \in \mathbf{H}(\vartheta/2)$. В частности, $(t^*, x^*) \in \mathbf{H}(\vartheta)$. Тогда, в силу определения (1.8), имеем, что либо $(t^*, x^*) \in \mathcal{W}$, либо $t^* \leq \vartheta/2$. Заметим, что в первом случае определяем постоянное управление $u^* \in [-2, 2]$, полагая, что $u^* = +2$ при $x^* \geq 0$ и $u^* = -2$ при $x^* < 0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} |x(t, t^*, x^*, u^*(\cdot), v(\cdot))| &= |(x^* + u^*(t - t^*)) + I_v(t)| \geq |x^* + u^*(t - t^*)| - |I_v(t)| \geq \\ &\geq |x^*| + 2(t - t^*) - (t - t^*) = |x^*| + (t - t^*) \geq t^* + (t - t^*) \geq t, \quad \forall v(\cdot) \in \mathcal{V}, \quad t \in [t^*, 1] \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $u^*(\cdot) \in \mathcal{U}$ определяется как $u^*(t) \equiv u^*$, а $I_v(t)$ определяется (здесь и ниже) интегрированием на $[t^*, t]$. Стало быть, в случае $(t^*, x^*) \in \mathcal{W}$ верно включение

$$(t, x(t, t^*, x^*, u^*(\cdot), v(\cdot))) \in \mathcal{W}$$

$$\mathcal{W} \subset \mathbf{H}(\vartheta), \quad v(\cdot) \in \mathcal{V}, \quad t \in [t^*, 1]$$

Кроме того, из соотношения (1.19) следует, что

$$|x(1, t^*, x^*, u^*(\cdot), v(\cdot))| \geq 1$$

Поскольку выбор $v(\cdot)$ был произвольным, с учетом условия (1.4) имеем в случае $(t^*, x^*) \in \mathcal{W}$ свойство $(t^*, x^*) \in \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta))$.

Осталось рассмотреть случай, когда $(t^*, x^*) \notin \mathcal{W}$, т.е. $|x^*| < t^*$. Тогда $t^* \leq \vartheta/2$. Выберем произвольно $\hat{v}(\cdot) \in \mathcal{V}$ и, полагая $y^* \doteq x^* + I_{\hat{v}}(\vartheta)$, введем $\hat{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ по правилу: $\hat{u}(t) \doteq 2 \operatorname{sgn} y^*$ при всех $t \in [0, 1]$. Тогда имеем

$$x(t, t^*, x^*, \hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot)) = x(\vartheta, t^*, x^*, \hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot)) + \int_{\vartheta}^t \hat{u}(\tau) d\tau + \int_{\vartheta}^t \hat{v}(\tau) d\tau, \quad \forall t \in [\vartheta, 1] \quad (1.20)$$

Видно, что для траектории (1.20) справедливо неравенство

$$|x(t, t^*, x^*, \hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot))| \geq |y^*| + 2(t - t^*) - (t - \vartheta) \geq t + \vartheta - 2t^* \geq t, \quad \forall t \in [\vartheta, 1] \quad (1.21)$$

(здесь учтено, что $t^* \leq \vartheta/2$). Стало быть,

$$(t, x(t, t^*, x^*, \hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot))) \in \mathcal{W}, \quad t \in [\vartheta, 1]$$

Как следствие,

$$(t, x(t, t^*, x^*, \hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta) \quad (1.22)$$

уже при всех $t \in [t^*, 1]$ (см. (1.8)). Из неравенства (1.21) вытекает неравенство

$$|x(1, t^*, x^*, \hat{u}(\cdot), \hat{v}(\cdot))| \geq 1 \quad (1.23)$$

Из соотношений (1.22) и (1.23) имеем и при $(t^*, x^*) \notin \mathcal{W}$, что $\forall v(\cdot) \in \mathcal{V} \exists u(\cdot) \in \mathcal{U}$

$$(|x(1, t^*, x^*, u(\cdot), v(\cdot))| \geq 1) \& \\ \& ((t, x(t, t^*, x^*, u(\cdot), v(\cdot))) \in \mathbf{H}(\vartheta), \quad \forall t \in [t^*, 1])$$

Из соотношения (1.4) имеем во всех случаях $(t^*, x^*) \in \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta))$.

Итак, $\mathbf{H}(\vartheta/2) \subset \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(\vartheta))$. Учитывая вложение (1.18), получаем равенство (1.10).

Рассмотрим комбинацию соотношений (1.6), (1.9) и (1.10). Тогда $W_0 = \mathbf{H}(1)$ и

$$W_1 = \mathcal{A}_M(W_0) = \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(1)) = \mathbf{H}(1/2)$$

Дальнейшее построение последовательности $(W_k)_{k \in \mathcal{N}_0}$, где $\mathcal{N}_0 \doteq \{0\} \cup \mathcal{N}$, осуществляется по индукции: известно, что $W_0 = \mathbf{H}(1/2^0)$ и $W_1 = \mathbf{H}(1/2^1)$. Пусть число $n \in \mathcal{N}$ таково, что $W_n = \mathbf{H}(1/2^n)$. Из равенств (1.6), (1.10) имеем

$$W_{n+1} = \mathcal{A}_M(W_n) = \mathcal{A}_M(\mathbf{H}(1/2^n)) = \mathbf{H}(1/2^{n+1})$$

Итак, по индукции установлено, что

$$W_k = \mathbf{H}(1/2^k) = W \cup ([0, 1/2^k] \times \mathbf{R}), \quad \forall k \in \mathcal{N}_0 \quad (1.24)$$

В частности, $\mathcal{W}_\infty$ – пересечение всех множеств (1.24), $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_\infty$. Если же $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}_\infty \setminus \mathcal{W}$, то $t_* \in [0, 1/2^k]$ при всех $k \in \mathcal{N}_0$, и, стало быть, $t_* = 0$, а тогда $(t_*, x_*) = (0, x_*) \in \mathcal{W}$ в силу определения (1.7), что невозможно. Итак, $\mathcal{W}_\infty \setminus \mathcal{W} = \emptyset$, т.е. $\mathcal{W}_\infty = \mathcal{W}$ (см. [14]). Следовательно, построена "непрямая" (в принятой ранее терминологии [19–22]) версия МПИ для рассматриваемого конкретного примера.

2. Итерационное построение многозначной квазистратегии. В ряде работ ([16, 17] и др.) использовалась формализация игрового управления в классе так называемых квазистратегий, т.е. физически реализуемых откликов на помеховое управление. Произвольные отклики именовались [17] псевдостратегиями. Использовались [5, 8–11, 13, 14, 28, 29] (и это существенно с точки зрения конструктивного построения разрешающих процедур управления) многозначные квазистратегии, что сопровождалось, для нелинейных задач теории ДИ, расширением пространства управлений с использованием скользящих режимов.

Предлагались [18–22] итерационные методы построения многозначных квазистратегий, являющиеся по смыслу прямыми версиями МПИ (рассматривались [18–22] абстрактные задачи управления, необязательно сводящиеся к ДИ; сейчас не останавливаемся на процедурах [18–22] в полной общности). Ниже используется конкретизация конструкций [19–22] для случая рассматриваемой задачи наведения на M (1.3).

Положим в качестве основных траектории (1.2) при $t_* = 0$ и $x_* = 0$; "нулевую" позицию $(0, 0) \in \mathcal{D}$ выберем в качестве начальной. Действуя в соответствии с известной процедурой [23], введем естественный тип многозначной псевдостратегии (аналог рассмотренной ранее [17]), разрешающей задачу M -наведения.

Если $(t_*, x_*) \in \mathcal{D}$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, то через

$$x_{\leftarrow}(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) = (x_{\leftarrow}(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)))_{t \in I_0}$$

обозначаем непрерывную функцию из $C \doteq C([0,1])$, для которой

$$(x_{\leftarrow}(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) \doteq x_*, \quad \forall t \in [0, t_*] \text{ \& } \\ \&(x_{\leftarrow}(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) \doteq x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)), \quad \forall t \in [t_*, 1])$$

Если $t_* \in [0,1]$, $x_* \in \mathbf{R}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, то [23]

$$\mathcal{S}((t_*, x_*), v(\cdot)) \doteq \{x_{\leftarrow}(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)) : u(\cdot) \in \mathcal{U}\} \quad (2.1)$$

Здесь введен пучок траекторий, продолжающих влево траектории (1.2), при зафиксированном помеховом управлении $v(\cdot)$. В частности, при $t_* = 0$ и $x_* = 0$ в (2.1) имеем пучок обычных траекторий. Аналогично известному подходу [18–22] введем требуемую многозначную псевдостратегию: в терминах семейства $\mathcal{P}(C)$ всех подмножеств C определяем оператор $\mathcal{C}$, действующий из $\mathcal{V}$ в $\mathcal{P}(C)$, по правилу

$$\mathcal{C}(v(\cdot)) \doteq \{x \in \mathcal{S}((0,0), v(\cdot)) \mid 1 \leq |x(1)|\} \quad (2.2)$$

В виде $\mathcal{C}$ имеем упомянутый выше многозначный вариант псевдостратегии [17].

Цель дальнейших построений – перевод этой "псевдостратегии" в многозначную квазистратегию, разрешающую в классе траекторий системы (1.1) задачу о гарантированной реализации условия $|x(1)| \geq 1$. В этой связи заметим, что

$$x_{\leftarrow}(\cdot, 0, 0, u(\cdot), v(\cdot)) = x(\cdot, 0, 0, u(\cdot), v(\cdot)), \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad v(\cdot) \in \mathcal{V} \quad (2.3)$$

Учитывая это, получаем

$$\mathcal{S}((0,0), v(\cdot)) = \{x(\cdot, 0, 0, u(\cdot), v(\cdot)) : u(\cdot) \in \mathcal{U}\}, \quad v(\cdot) \in \mathcal{V} \quad (2.4)$$

Стало быть, оператор $\mathcal{C}$ (2.2) можно определить (см. (2.4)) в терминах траекторий системы (1.1):

$$\mathcal{C}(v(\cdot)) = \{x(\cdot, 0, 0, u(\cdot), v(\cdot)) : u(\cdot) \in \mathcal{U}, \quad 1 \leq |x(1, 0, 0, u(\cdot), v(\cdot))|\}$$

Введем в рассмотрение множество $M(\mathcal{V}, C)$ всех отображений из $\mathcal{V}$ в $\mathcal{P}(C)$. Иными словами, $M(\mathcal{V}, C)$ – множество всех многозначных отображений из $\mathcal{V}$ в C . В частности, $\mathcal{C} \in M(\mathcal{V}, C)$. Следуя известной процедуре [19–22], введем специальный оператор, действующий в $M(\mathcal{V}, C)$ и реализующий перевод $\mathcal{C}$ в многозначную квазистратегию, гарантированно разрешающую основную задачу. Если $w \in \mathcal{V}$ и $t \in [0,1]$, то полагаем ([22], с. 25)

$$\Omega^0(w \mid t) \doteq \{\tilde{w} \in \mathcal{V} \mid w(\tau) = \tilde{w}(\tau), \quad \forall \tau \in [0, t]\} \quad (2.5)$$

Разумеется, $w = v(\cdot)$ и $\tilde{w} = \tilde{v}(\cdot)$ при $\tilde{w} \in \Omega^0(w \mid t)$ – борелевские функции из $[0,1]$ в $[-1,1]$.

Введем оператор

$$\Gamma : M(\mathcal{V}, C) \rightarrow M(\mathcal{V}, C) \quad (2.6)$$

по следующему правилу:

$$\Gamma(\alpha)(w) \doteq \{f \in \alpha(w) \mid \forall t \in [0,1] \forall \tilde{w} \in \Omega^0(w \mid t) \\ \exists \tilde{f} \in \alpha(\tilde{w}) : f(\tau) = \tilde{f}(\tau), \quad \forall \tau \in [0, t]\}, \quad \alpha \in M(\mathcal{V}, C), \quad w \in \mathcal{V} \quad (2.7)$$

С оператором (2.6), (2.7) связываем последовательность его конечных степеней

$$\Gamma^k : M(\mathcal{V}, C) \rightarrow M(\mathcal{V}, C), \quad k \in \mathcal{N}_0 \quad (2.8)$$

для которой, как обычно,

$$(\Gamma^0(\alpha) = \alpha, \quad \forall \alpha \in M(\mathcal{V}, \mathcal{C})) \& (\Gamma^k = \Gamma \circ \Gamma^{k-1}, \quad \forall k \in \mathcal{N})$$

где $\circ$ означает операцию суперпозиции. Последовательность степеней (2.8) дополним бесконечной степенью Γ^∞ (подробнее см. в [19–22]); именно,

$$\Gamma^\infty : M(\mathcal{V}, \mathcal{C}) \rightarrow M(\mathcal{V}, \mathcal{C}) \quad (2.9)$$

определяется по правилу

$$\Gamma^\infty(\alpha)(w) \doteq \bigcap_k \Gamma^k(\alpha)(w), \quad \alpha \in M(\mathcal{V}, \mathcal{C}), \quad w \in \mathcal{V}$$

Здесь и в дальнейшем (в аналогичных случаях) рассматривается пересечение по всем $k \in \mathcal{N}_0$.

В соответствии с полученным ранее результатом ([22], теорема 5.1) для достижения поставленной цели важно реализовать $(\Gamma^k(\mathcal{C}))_{k \in \mathcal{N}_0}$ и многозначное отображение $\Gamma^\infty(\mathcal{C})$. Полагаем, что $\mathcal{C}_k \doteq \Gamma^k(\mathcal{C})$, $\forall k \in \mathcal{N}_0$; кроме того, пусть $\mathcal{C}_\infty \doteq \Gamma^\infty(\mathcal{C})$. Тогда из определения последовательности (2.8) видно, что

$$(\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}) \& (\mathcal{C}_k = \Gamma(\mathcal{C}_{k-1}), \quad \forall k \in \mathcal{N}) \quad (2.10)$$

Это основной итерационный процесс. По определению Γ (2.9), имеем теперь для $\mathcal{C}_\infty = \Gamma^\infty(\mathcal{C})$ представление

$$\mathcal{C}_\infty(w) = \bigcap_k \mathcal{C}_k(w), \quad w \in \mathcal{V} \quad (2.11)$$

Разумеется, равенство (2.11) может использоваться для представления $\mathcal{C}_\infty$ как предела $(\mathcal{C}_k)_{k \in \mathcal{N}}$. Для этого отметим, что в силу соотношения (2.10) $\mathcal{C}_k(v(\cdot)) \subset \mathcal{C}_{k-1}(v(\cdot))$ при $k \in \mathcal{N}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$. В сочетании с представлением (2.11) это означает ([30], гл. I), что при $w \in \mathcal{V}$ имеет место монотонная сходимость $(\mathcal{C}_k(w))_{k \in \mathcal{N}} \downarrow \mathcal{C}_\infty(w)$. Такое свойство интерпретировалось [19–22] как поточечная сходимость в пространстве многозначных отображений: в принятых ранее обозначениях ([22], с. 225)

$$(\mathcal{C}_k)_{k \in \mathcal{N}} \Downarrow \mathcal{C}_\infty \quad (2.12)$$

Отметим, что конструкция оператора Γ соответствует принятой ранее [19–22], это позволяет использовать полученные ранее результаты в рассматриваемом конкретном случае.

Укажем конкретизацию основных параметров общей постановки [19–22]. Именно, в качестве множества X (см. [19–22]) следует использовать отрезок $[0, 1]$, множество Y [19–22] определяем в виде $[-1, 1]$, семейство $\mathcal{X}$ [19–22] определяем в виде $\{[0, t] : t \in [0, 1]\}$, (Y, τ) [19–22] отождествляется с $(\mathbf{R}, \tau_{\mathbf{R}})$, где $\tau_{\mathbf{R}}$ – обычная $|\cdot|$ – топология вещественной прямой $\mathbf{R}$, в качестве множества Z [19–22] используем множество $\mathcal{C} = C([0, 1])$ всех непрерывных функций из $[0, 1]$ в $\mathbf{R}$, множество Ω [19–22] полагаем совпадающим с $\mathcal{V}$. В этих условиях имеем равенство

$$\Omega_0(w|A) = \Omega^0(w|t), \quad w \in \Omega, \quad A = [0, t], \quad t \in [0, 1]$$

Множество $\Omega_0(w|A)$ определено ранее ([21], с. 69).

В этих предположениях при учете определения (2.7) оператор Γ [19–22] дается выражениями

$$\Gamma(\alpha)(w) = \{f \in \alpha(w) \mid \forall A \in \mathcal{X} \forall \tilde{w} \in \Omega_0(w|A)$$

$$\begin{aligned}
& \exists \tilde{f} \in \alpha(\tilde{w}) : (f|A) = (\tilde{f}|A) = \\
& = \{f \in \alpha(w) \mid \forall t \in [0,1] \forall \tilde{w} \in \Omega^0(w|t) \\
& \exists \tilde{f} \in \alpha(\tilde{w}) : f(\tau) = \tilde{f}(\tau), \quad \forall \tau \in [0,t]\}, \quad \alpha \in M(\mathcal{V}, C), \quad w \in \mathcal{V}
\end{aligned}$$

Наконец, отметим, что многозначное отображение $\mathcal{C}$ (2.2) непременно является компактнозначным в смысле топологии равномерной сходимости пространства C (в более общих случаях нелинейных систем следует использовать обобщенные решения, как это делалось ранее [7–11, 13, 14]).

Итак, при $\nu(\cdot) \in \mathcal{V}$ множество $\mathcal{C}(\nu(\cdot))$ компактно в C с топологией равномерной сходимости. Вместе с тем в теоремах, приведенных ранее [19–22], использована другая топология, а именно топология поточечной сходимости в $Z = C$ (напомним, что (Y, τ) [19–22] здесь совпадает с (R, τ_R)).

Известно, однако [31], что топология поточечной сходимости в C слабее топологии равномерной сходимости, а тогда при $\nu(\cdot) \in \mathcal{V}$ множество $\mathcal{C}(\nu(\cdot))$ компактно и в смысле топологии поточечной сходимости пространства C . Итак, отображение $\mathcal{C}$ компактнозначно в C с топологией поточечной сходимости. Стало быть, выполнены все условия доказанной ранее теоремы ([22], теорема 5.1).

Приведем соответствующую конкретизацию этой теоремы. На непустом множестве $M(\mathcal{V}, C)$ введем (частичный) порядок $\subseteq$, полагая

$$\begin{aligned}
& \text{def} : (\alpha_1 \subseteq \alpha_2) \Leftrightarrow (\alpha_1(\nu(\cdot)) \subset \alpha_2(\nu(\cdot)), \quad \forall \nu(\cdot) \in \mathcal{V}) \\
& \forall \alpha_1 \in M(\mathcal{V}, C), \quad \forall \alpha_2 \in M(\mathcal{V}, C)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

В частности, в качестве определения α_2 в (2.13) может использоваться многозначное отображение $\mathcal{C}$.

Рассмотрим непустое множество $N \doteq \{\alpha \in M(\mathcal{V}, C) \mid \alpha = \Gamma(\alpha)\}$ (всех неподвижных точек Γ , т.е. множество всех неупреждающих многозначных отображений на $\Omega = \mathcal{V}$). Далее N понимается только в смысле последнего определения. Тогда (см. (2.13))

$$N_0[\mathcal{C}] \doteq \{\alpha \in N \mid \alpha \subseteq \mathcal{C}\} \tag{2.14}$$

есть множество всех неупреждающих мультиселекторов многозначного отображения $\mathcal{C}$. Элементы (2.14) подобны многозначным квазистратегиям [5, 8–14, 28, 29], но могут иметь в отдельных “точках” $\mathcal{V}$ своими значениями пустое множество $\emptyset$. В частности, элементом (2.14) является постоянное многозначное отображение $\alpha_\emptyset \in M(\mathcal{V}, C)$, для которого $\alpha_\emptyset(\nu(\cdot)) \equiv \emptyset$. С другой стороны, множество (2.14) имеет [21, 22] наибольший в $(M(\mathcal{V}, C), \subseteq)$ элемент $(na)[\mathcal{C}]$ в виде отображения из $\mathcal{V}$ в семейство всех подмножеств C , для которого ([22], § 5)

$$(na)[\mathcal{C}](\nu(\cdot)) \doteq \bigcup_{\alpha \in N_0[\mathcal{C}]} \alpha(\nu(\cdot)), \quad \forall \nu(\cdot) \in \mathcal{V} \tag{2.15}$$

Известно [21, 22], что $(na)[\mathcal{C}] \in N_0[\mathcal{C}]$ и при этом

$$\alpha \subseteq (na)[\mathcal{C}], \quad \forall \alpha \in N_0[\mathcal{C}]$$

Таким образом, $(na)[\mathcal{C}]$ – требуемый $\subseteq$ -наибольший элемент $N_0[\mathcal{C}]$.

Согласно полученным ранее результатам ([22], теорема 5.1, см. также [21], теорема 4.1.6) имеет место равенство $\Gamma^\infty(\mathcal{C}) = (na)[\mathcal{C}]$. Учитывая соотношения (2.10), (2.11), имеем для многозначного отображения (2.15) представление

$$(na)[\mathcal{C}] = \mathcal{C}_\infty \tag{2.16}$$

Отметим, что представление (2.16) непременно является многозначной квазистратегией, т.е. при $\nu(\cdot) \in \mathcal{V}$ непременно $\mathcal{C}_\infty(\nu(\cdot)) \neq \emptyset$.

В самом деле, введем в рассмотрение постоянное управление $U_\uparrow \in \mathcal{U}$, полагая, что $U_\uparrow(t) \doteq 2$ при $t \in [0, 1]$. Теперь введем отображение $\alpha_\uparrow$ из $\mathcal{V}$ в $\mathcal{C}$, полагая, что

$$\begin{aligned} \alpha_\uparrow(\nu(\cdot))(t) &\doteq x(t, 0, 0, U_\uparrow, \nu(\cdot)) = \\ &= \int_0^t U_\uparrow(\tau) d\tau + \int_0^t \nu(\tau) d\tau, \quad \forall \nu(\cdot) \in \mathcal{V}, \quad \forall t \in [0, 1] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Из определения (2.17) следует, что $\alpha_\uparrow$ – неупреждающее отображение в указанном ранее смысле [16, 17, 27], т.е. (однозначная) квазистратегия. Введем “фиктивное” многозначное отображение $\alpha^\uparrow \in \mathcal{M}(\mathcal{V}, \mathcal{C})$ по правилу: при $\nu(\cdot) \in \mathcal{V}$ выполняется условие $\alpha^\uparrow(\nu(\cdot)) = \{\alpha_\uparrow(\nu(\cdot))\}$. Ясно, что $\alpha^\uparrow \in \mathcal{N}$. Вместе с тем, из определения (2.17) следует, что

$$\alpha_\uparrow(\nu(\cdot))(1) \geq \int_0^1 U_\uparrow(t) dt - 1 = 2 - 1 = 1, \quad \forall \nu(\cdot) \in \mathcal{V} \quad (2.18)$$

Стало быть, в силу равенства (2.4)

$$\alpha_\uparrow(\nu(\cdot)) \in \mathcal{S}((0, 0), \nu(\cdot)), \nu(\cdot) \in \mathcal{V}$$

удовлетворяет неравенству (2.18), т.е. (в согласии с равенством (2.4)) $\alpha_\uparrow(\nu(\cdot)) \in \mathcal{C}(\nu(\cdot))$. Как следствие, $\alpha^\uparrow \subseteq \mathcal{C}$, а тогда, в силу неупреждаемости $\alpha^\uparrow$, имеем из определения (2.14), что $\alpha^\uparrow \in \mathcal{N}_0[\mathcal{C}]$ и, стало быть, $\alpha^\uparrow \subseteq (\text{na})[\mathcal{C}]$.

Итак,

$$\alpha_\uparrow(\nu(\cdot)) \in (\text{na})[\mathcal{C}](\nu(\cdot)), \quad \forall \nu(\cdot) \in \mathcal{V}$$

Таким образом, в представлении (2.16) $\mathcal{C}_\infty(\nu(\cdot)) \neq \emptyset$.

Поскольку $(\text{na})[\mathcal{C}]$ – многозначная квазистратегия, $(\text{na})[\mathcal{C}]$ является неупреждающим многозначным отображением с непустыми значениями. Кроме того, из свойства $(\text{na})[\mathcal{C}] \in \mathcal{N}_0[\mathcal{C}]$ следует, что эта многозначная квазистратегия разрешает задачу наведения на $\mathbf{M}$ (1.3) (см. определение $\mathcal{C}$). Наконец, в силу определения (2.15) данная квазистратегия является наибольшей в $(\mathcal{M}(\mathcal{V}, \mathcal{C}), \subseteq)$ среди всех квазистратегий, разрешающих основную задачу наведения. Соотношение (2.15) определяет многозначную квазистратегию $(\text{na})[\mathcal{C}]$ как предел итерационной процедуры, имеющей смысл прямой версии МПИ.

Известно, что во многих случаях (для конкретных ДИ) процедуры на основе МПИ доставляют решение ДИ за конечное число итераций ([5, 8, 9] и др.). В то же время иногда [15] необходимо построение всей последовательности итераций. Сказанное выше относится, однако, к “непрямым” вариантам МПИ, т.е. к несколько иным итерационным процедурам. Для “прямых” версий МПИ были построены примеры [19, 22], где решение достигается за две итерации, считая и нулевое приближение.

С использованием приведенных ранее [23] утверждений покажем, что в рассматриваемом случае “прямая” версия МПИ требует (как и прежде [15]) построения всей бесконечной последовательности итераций. Для этой цели введем более удобное представление оператора $\mathcal{A}_M$. Условимся о следующих обозначениях. Если H –

подмножество $\mathbf{D}$, $z_* = (t_*, x_*) \in \mathbf{D}$ и $\nu(\cdot) \in \mathcal{V}$, то через $\Pi(\nu(\cdot) | z_*, H)$ обозначаем множество всех $h \in S(z_*, \nu(\cdot))$, таких, что

$$\exists \vartheta \in [t_*, 1] : ((\vartheta, h(\vartheta)) \in M) \& ((t, h(t)) \in H, \forall t \in [t_*, \vartheta]) \quad (2.19)$$

Далее, как и ранее [23], полагаем, что оператор $A : \mathcal{P}(\mathbf{D}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{D})$ определен по правилу

$$A(H) \doteq \{z \in H \mid \Pi(\nu(\cdot) | z, H) \neq \emptyset, \forall \nu(\cdot) \in \mathcal{V}\}, \quad H \in \mathcal{P}(\mathbf{D}) \quad (2.20)$$

Определения (2.19), (2.20) соответствуют данным ранее [23] при условии, что (в принятых ранее обозначениях [23]): $t_0 = 0$, $\vartheta_0 = 1$, $\Omega = \mathcal{V}$. В силу соотношений (1.4), (2.1) и (2.19) имеем очевидное равенство $A = \mathcal{A}_M$, т.е. $A(H) \equiv \mathcal{A}_M(H)$.

3. Построение многозначной квазистратегии с помощью двойственных конструкций метода программных итераций. Воспользуемся соотношением (1.24) и известными положениями [23] для проверки свойства

$$(\text{na})[\mathcal{C}] \neq \mathcal{C}_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad (3.1)$$

В этой связи заметим, что отображение S , переводящее $\mathbf{D} \times \mathcal{V}$ в семейство $\mathcal{P}'(\mathbf{C}) \doteq \mathcal{P}(\mathbf{C}) \setminus \{\emptyset\}$ всех непустых подмножеств $\mathbf{C}$ и определяемое выражением (2.1), удовлетворяет всем указанным ранее условиям [23]. Тогда ([23], лемма 5.1)

$$\Gamma(\Pi(\cdot | (0, 0), H)) = \Pi(\cdot | (0, 0), A(H)), \quad H \in \mathcal{P}(\mathbf{D}) \quad (3.2)$$

В силу соотношений (1.3), (2.2), (2.19) имеем

$$\Pi(\nu(\cdot) | (0, 0), \mathbf{D}) = \{h \in S((0, 0), \nu(\cdot)) \mid |h(1)| \geq 1\} = \mathcal{C}(\nu(\cdot)), \quad \forall \nu(\cdot) \in \mathcal{V} \quad (3.3)$$

Это означает, что $\Pi(\cdot | (0, 0), \mathbf{D}) = \mathcal{C}$.

Из выражений (3.2), (3.3) следует, в частности, что

$$\Gamma(\mathcal{C}) = \Gamma(\Pi(\cdot | (0, 0), \mathbf{D})) = \Pi(\cdot | (0, 0), A(\mathbf{D}))$$

Учитывая соотношения (1.24), (2.10) и равенство $A = \mathcal{A}_M$, получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \Gamma(\mathcal{C}_0) = \Gamma(\mathcal{C}) = \Pi(\cdot | (0, 0), A(\mathbf{D})) = \\ &= \Pi(\cdot | (0, 0), A(W_0)) = \Pi(\cdot | (0, 0), W_1) = \Pi(\cdot | (0, 0), \mathbf{H}(1/2)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) по индукции распространяется на любой номер $k \in \mathbb{N}$ в следующем смысле.

Предложение. Имеет место равенство

$$\mathcal{C}_k = \Pi(\cdot | (0, 0), \mathbf{H}(1/2^k)), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.5)$$

Доказательство. Воспользуемся полученным ранее результатом ([23], следствие 5.1 и теорема 5.1). Тогда [23]

$$\begin{aligned} \Gamma^k(\Pi(\cdot | (0, 0), \mathbf{D})) &= \Pi(\cdot | (0, 0), A^k(\mathbf{D})) = \\ &= \Pi(\cdot | (0, 0), \mathcal{A}_M^k(\mathbf{D})), \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Как следствие (см. (2.10)),

$$\Gamma^k(\mathcal{C}) = \Pi(\cdot | (0, 0), \mathcal{A}_M^k(\mathbf{D})) \quad (3.6)$$

При учете соотношений (2.10) и (3.6) получаем

$$\mathcal{C}_k = \Pi(\cdot | (0, 0), \mathcal{A}_M^k(\mathbf{D}))$$

Но из формул (1.6), (1.24) следует, что

$$\mathcal{A}_M^k(\mathbf{D}) = W_k = \mathbf{H}(1/2^k)$$

Учитывая соотношения (2.19) и (3.3), имеем из равенства (3.6)

$$\mathcal{C}_k = \Pi(\cdot | (0,0), \mathbf{H}(1/2^k)), \quad \forall k \in \mathcal{N}_0 \quad (3.7)$$

Рассмотрим теперь представление [23] для отображения $\mathcal{C}_\infty$, определяемого в соответствии с указанным ранее [22]. В самом деле, согласно полученному ранее результату ([23], следствие 5.2) и формуле (2.11), имеет место равенство

$$\mathcal{C}_\infty = \Pi(\cdot | (0,0), \mathbf{A}^\infty(\mathbf{D})) \quad (3.8)$$

Оператор $\mathbf{A}^\infty$ определяется в соответствии с указанным ранее [23]. Здесь существенно, что

$$\mathbf{A}^\infty(\mathbf{D}) = \bigcap_k \mathbf{A}^k(\mathbf{D}) = \bigcap_k \mathcal{A}_M^k(\mathbf{D}) = \bigcap_k W_k$$

При учете формулы (1.24) имеем

$$\mathbf{A}^\infty(\mathbf{D}) = \bigcap_k \mathbf{H}(1/2^k) = {}^wW_\infty = {}^wW \quad (3.9)$$

Но тогда из представлений (3.8), (3.9) получаем равенство

$$\mathcal{C}_\infty = \Pi(\cdot | (0,0), {}^wW) \quad (3.10)$$

Поскольку ${}^wW \subset \mathbf{H}(1/2^k)$ при $k \in \mathcal{N}_0$, из соотношений (2.19), (3.7) и (3.10) следует, что

$$\mathcal{C}_\infty(\nu(\cdot)) \subset \mathcal{C}_k(\nu(\cdot)), \quad \forall k \in \mathcal{N}_0 \quad \forall \nu(\cdot) \in \mathcal{V} \quad (3.11)$$

Теорема. Имеет место свойство

$$\mathcal{C}_\infty \neq \mathcal{C}_k, \quad \forall k \in \mathcal{N}_0 \quad (3.12)$$

Доказательство. Из соотношений (3.7), (3.10) имеем

$$(\mathcal{C}_k = \Pi(\cdot | (0,0), \mathbf{H}(1/2^k)), \quad \forall k \in \mathcal{N}_0) \& (\mathcal{C}_\infty = \Pi(\cdot | (0,0), {}^wW)) \quad (3.13)$$

В силу вложения (3.11) достаточно установить, что

$$\forall k \in \mathcal{N}_0 \exists \nu(\cdot) \in \mathcal{V} : \mathcal{C}_k(\nu(\cdot)) \setminus \mathcal{C}_\infty(\nu(\cdot)) \neq \emptyset \quad (3.14)$$

Будем использовать равенство (3.13). Фиксируем $n \in \mathcal{N}_0$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_n &= \Pi(\cdot | (0,0), \mathbf{H}(1/2^n)), \quad \mathbf{H}(1/2^n) = \\ &= {}^wW \cup ([0, 1/2^n] \times \mathbf{R}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

(представление множества $\mathbf{H}(1/2^n)$ следует из определения (1.8)).

Заметим, что точка $w \doteq (1/2^n, 1/2^n) \in {}^wW$. Если $\theta \in [0, 1/2^n]$, то рассмотрим функцию $f_\theta : [\theta, 1] \rightarrow [0, \infty[$, для которой $f_\theta(t) \doteq 2(t - \theta)$. Если $\theta \in [0, 1/2^n]$, то $1/2^n \in [\theta, 1]$ и корректно определяется значение $f_\theta(1/2^n) \in [0, \infty[$.

Следующее простейшее уравнение $f_\theta(1/2^n) = 1/2^n$ имеет решение

$$\theta_0 = 1/2^{n+1} \quad (3.16)$$

Теперь можно установить, что для управления $O \in \mathcal{V}$, тождественно равного нулю,

$$\mathcal{C}_n(O) \setminus \mathcal{C}_\infty(O) \neq \emptyset \quad (3.17)$$

В самом деле, пусть функция $u_0(\cdot) = (u_0(t) \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1) \in \mathcal{U}$ такова, что

$$(u_0(t) \doteq 0, \forall t \in [0, \theta_0]) \& (u_0(t) \doteq 2, \forall t \in [\theta_0, 1]) \quad (3.18)$$

В силу равенства (2.4) заключаем, что траектория $x_0(\cdot) = (x_0(t), 0 \leq t \leq 1)$, определяемая условием $x_0(\cdot) = x(\cdot, 0, 0, u_0(\cdot), O)$, есть элемент множества $S((0, 0), O)$:

$$x_0(\cdot) \in S((0, 0), O) \quad (3.19)$$

Из соотношения (1.2) вытекает, что

$$x_0(t) = x(t, 0, 0, u_0(\cdot), O) = \int_0^t u_0(t) dt, \quad \forall t \in [0, 1] \quad (3.20)$$

Отсюда имеем при $t \in [0, \theta_0]$ равенство $x_0(t) = 0$ и для $t \in [\theta_0, 1]$ получаем

$$x_0(t) = \int_{\theta_0}^t 2 dt = 2(t - \theta_0) = f_{\theta_0}(t) \quad (3.21)$$

Ясно, что в силу второго равенства (3.15) верно включение $(t, x_0(t)) \in \mathbf{H}(1/2^n)$ при $t \in [0, 1/2^n]$. Далее, используя соотношение (3.21), имеем

$$\begin{aligned} x_0(t) &= 2(t - \theta_0) = 2(t - 1/2^{n+1}) = \\ &= t + (t - 1/2^n) \geq t, \quad t \in [1/2^n, 1] \end{aligned}$$

Последнее означает, что в силу определения (1.7)

$$(t, x_0(t)) \in \mathcal{W}, \quad \forall t \in [1/2^n, 1]$$

Следовательно

$$(t, x_0(t)) \in \mathbf{H}(1/2^n), \quad \forall t \in [0, 1] \quad (3.22)$$

Далее, по определению f_{θ_0} имеем $x_0(1) = 2 - 1/2^n \geq 1$. Поэтому $(1, x_0(1)) \in M$. С учетом соотношений (2.19), (3.19) и (3.22) имеем свойство

$$x_0(\cdot) \in \Pi(O | (0, 0), \mathbf{H}(1/2^n))$$

т.е.

$$x_0(\cdot) \in \mathcal{C}_n(O)$$

С другой стороны, $x_0(\theta_0) = 0$ для момента $\theta_0 \in]0, 1[$, определенного равенством (3.16), поэтому $|x_0(\theta_0)| < \theta_0$, и следовательно, в силу определения (1.7)

$$(\theta_0, x_0(\theta_0)) \notin \mathcal{W} \quad (3.23)$$

Возвращаясь к условию (2.19), замечаем, что

$$x_0(\cdot) \notin \Pi(O | (0, 0), \mathcal{W})$$

и, как следствие, из равенства (3.13) имеем

$$x_0(\cdot) \notin \mathcal{C}_\infty(O) \quad (3.24)$$

Из свойства (3.23), (3.24) вытекает, что $x_0(\cdot) \in \mathcal{C}_n(O) \setminus \mathcal{C}_\infty(O)$. Тем самым, установлено соотношение (3.17).

Справедливость свойства (3.17) означает справедливость утверждения (3.14) в силу произвольного выбора n , что завершает доказательство теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00348, 01-01-96450) и Международного научно-технического центра (1293).

ЛИТЕРАТУРА

1. Isaacs R. Differential Games. N.Y. etc.: Wiley, 1965 = Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 518 с.
5. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
6. Красовский Н.Н. Дифференциальная игра сближения–уклонения. I. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 2. С. 3–18.
7. Красовский Н.Н. Дифференциальная игра сближения–уклонения. II. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 3. С. 22–42.
8. Ченцов А.Г. О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224. № 6. С. 1272–1275.
9. Ченцов А.Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99. № 3. С. 394–420.
10. Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76.
11. Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения с информационной памятью // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 2. С. 306–308.
12. Чистяков С.В. К решению игровых задач преследования // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 5. С. 825–832.
13. Ченцов А.Г. Об игровой задаче сближения к заданному моменту времени // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1978. Т. 42. № 2. С. 455–467.
14. Ченцов А.Г. Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения–уклонения. Свердловск, 1979. 102 с. Рукоп. Деп. в ВИНТИ 4.06.1979. № 1933-79.
15. Ченцов А.Г. Об одном примере нерегулярной дифференциальной игры // ПММ. 1977. Т. 40. Вып. 6. С. 1113–1116.
16. Roxin E. Axiomatic approach in differential games // J. Optimiz. Theory and Appl. 1969. V. 3. № 3. P. 153–163.
17. Elliott R.J., Kalton N.J. The existence of value in differential games // Mem. Amer. Math. Soc. 1972. № 126. 67 p.
18. Ченцов А.Г. Метод программных итераций в классе конечно-аддитивных управлений–мер // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. № 11. С. 1528–1536.
19. Ченцов А.Г. Итерационная реализация неупреждающих многозначных отображений // Докл. РАН. 1997. Т. 357. № 5. С. 595–598.
20. Ченцов А.Г. К вопросу о параллельной версии абстрактного аналога метода программных итераций // Докл. РАН. 1998. Т. 362. № 5. С. 602–605.
21. Ченцов А.Г. К вопросу об итерационной реализации неупреждающих многозначных отображений // Изв. вузов. Математика. 2000. № 3. С. 66–76.
22. Chentsov A. Nonanticipating selectors of set-valued mappings and iterated procedures // Funct. Differ. Equant. 1999. V. 6. № 3–4. P. 249–274.
23. Ченцов А.Г. К вопросу о согласованности различных версий метода программных итераций // Докл. РАН. 2000. Т. 372. № 5. С. 600–603.

24. Дятлов В.П., Ченцов А.Г. Управление с гибкими коррекциями при ограничении на общее число переключений // Гагаринские науч. чтения по космонавтике и авиации. 1987. М.: Наука, 1988. С. 70–75.
25. Дятлов В.П., Ченцов А.Г. Об одном классе линейных дифференциальных игр с ограниченным числом коррекций // Управление и оценивание в динамических системах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. С. 9–16.
26. Ченцов А.Г. Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач. Екатеринбург: Наука, 1993. 232 с.
27. Varaiya P., Lin J. Existence of saddle points in differential games // SIAM J. Control. 1969. V. 7. № 1. P. 141–157.
28. Krasovskii N.N., Chentsov A.G. On the design of differential games. I. // Probl. Control and Inform. Theory. 1977. V. 6. № 5–6. P. 381–395.
29. Krasovskii N.N., Chentsov A.G. On the designing of differential games. II. // Probl. Control and Inform. Theory. 1979. V. 8. № 1. P. 3–11.
30. Neveu J. Bases Mathematiques du Calcul des Probabilites. Paris: Masson, 1964 = Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 306 с.
31. Kelley J.L. General Topology. N.Y., etc.: Van Nostrand, 1957 = Келли Дж.Л. Общая топология. М.: Наука, 1981. 431 с.

Екатеринбург
chentsov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
18.X.2001