

УДК 62–50

© 2002 г. Г.И. Ибрагимов

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Рассматривается игровая задача, динамика которой описывается уравнением в частных производных. Управления игроков, аддитивно представляющие правую часть уравнения, подчинены интегральным ограничениям. Цель преследующего игрока, информированного о мгновенном значении управления убегающего, – приведение системы в невозмущенное состояние. Для решения задачи используется метод декомпозиции системы, развитый [1] для управляемой системы. Найдено оптимальное время преследования и в явном виде построены оптимальные управления игроков.

Ранее [2] получено условие разрешимости рассматриваемой задачи преследования. Работа продолжает предыдущие исследования [1–5].

1. Постановка задачи. Пусть в пространстве $L_2(\Omega)$ задан дифференциальный оператор A вида [1]

$$Az = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial z}{\partial x_j} \right), \quad x \in \Omega; \quad a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \quad (1.1)$$

где Ω – ограниченная область в R^n . Областью определения $D(A)$ оператора A является $\dot{C}^2(\Omega)$ (пространство дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций). Коэффициенты a_{ij} удовлетворяют следующему условию: существует постоянная $\gamma \neq 0$, такая, что

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \gamma^2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n, \quad x \in \Omega \quad (1.2)$$

означающему эллиптичность оператора A . Обозначив

$$(z, y)_A = (Az, y), \quad z, y \in \dot{C}^2(\Omega)$$

можно показать, что $(\cdot, \cdot)_A$ удовлетворяет всем требованиям скалярного произведения.

Таким образом, $\dot{C}^2(\Omega)$ превратится в гильбертово пространство, но оно будет неполным относительно нормы, порожденной скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_A$.

Пополнив пространство $\dot{C}^2(\Omega)$ относительно нормы

$$\|z\|_A = \sqrt{(Az, z)}, \quad z \in \dot{C}^2(\Omega)$$

получим полное гильбертово пространство, называемое энергетическим пространством оператора A ; обозначим его H_A .

Известно [6], что оператор A с условием (1.2) имеет дискретный спектр, т.е. имеет бесконечную последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \dots, 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ обобщенных собственных чисел с единственным пределом в бесконечности и последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ обобщенных собственных элементов, полную в пространстве $L_2(\Omega)$. Не нарушая общности, положим $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера.

Используя эти данные, построим следующие пространства (они, конечно, связаны с оператором A) [7]. Пусть

$$l_r = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) : \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i^2 < \infty \right\}, \quad H_r(\Omega) = \left\{ f \in L_2(\Omega) : f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i, \alpha \in l_r \right\}$$

В пространствах $l_r, H_r(\Omega)$ определим скалярные произведения следующим образом:

$$(\alpha, \beta)_r = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i \beta_i, \quad \alpha, \beta \in l_r \quad \left(\|\alpha\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \alpha_i^2 \right)^{1/2} \right)$$

Аналогично

$$(f, g)_r = (\alpha, \beta)_r; \quad f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i, \quad g = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \varphi_i \quad (\|f\| = \|\alpha\|)$$

Заметим, что $H_0(\Omega) = L_2(\Omega)$ и $H_r(\Omega) \subset H_s(\Omega)$ при $s < r$.

Через $C(0, T; H_r(\Omega))$ ($L_2(0, T; H_r(\Omega))$) обозначим пространство, состоящее из непрерывных (суммируемых с квадратом) функций на $[0, T]$ со значениями в $H_r(\Omega)$, где T – положительная постоянная.

Уравнения, встречающиеся в дальнейшем, будем понимать в смысле теории распределений (обобщенных функций) [7].

Рассмотрим дифференциальную игру

$$dz(t)/dt + Az(t) = -u(t) + v(t) \quad (1.3)$$

$$u(\cdot), v(\cdot) \in L_2(0, T; H_r(\Omega)), \quad z(0) = z_0 \neq 0, \quad z_0 \in H_{r+1}(\Omega)$$

Оператор A задан в виде (1.1).

Было доказано [7] существование и единственность решения $z(t)$ задачи (1.3) в пространстве $C(0, T; H_{r+1}(\Omega))$, если $z_0 \in H_{r+1}(\Omega)$ при некотором $r \geq 0$.

Функции $u(t), v(t), 0 \leq t \leq T$, называются управлениями первого (преследующего) и второго (убегающего) игроков соответственно. Они стеснены ограничениями

$$\|u(\cdot)\| \leq \rho, \quad \|v(\cdot)\| \leq \sigma \quad (1.4)$$

где ρ, σ – неотрицательные постоянные. Управления $u(t), v(t), 0 \leq t \leq T$, удовлетворяющие условиям (1.4), называются допустимыми.

Определения. 1°. Будем говорить, что в игре (1.3), (1.4) из начальной точки z_0 возможно завершение преследования за время $T = T(z_0) \geq 0$, если можно выбрать значение $u(t)$ таким образом, что для любого допустимого управления убегающего $v(\cdot)$ выполнено равенство $z(t') = 0$ при некотором $t' \in [0, T]$, где $z(\cdot)$ – решение уравнения (1.3) при управлениях u, v . При этом для построения управления преследующего $u(t)$ в каждый момент времени $t \in [0, T]$ разрешается знание $z(t)$ и значение $v(t)$. Число T называется гарантированным временем преследования. Цель преследующего – минимизировать гарантированное время преследования, а цель убегающего – максимизировать.

2°. Если существует допустимое управление убегающего $v(\cdot)$, такое, что для любого допустимого управления преследующего $u(\cdot)$ верно соотношение $z(t) \neq 0$ при $t \in [0, T)$, то гарантированное время преследования T называется оптимальным

временем преследования. При этом для построения $u(t)$ в каждый момент времени $t \in [0, T]$ разрешается использовать $z(t)$ и значения

$$\rho(t) = (\rho^2 - F(t))^{1/2}, \quad \sigma(t) = (\sigma^2 - G(t))^{1/2}$$

где

$$F(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \int_0^t u_i^2(s) ds, \quad G(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \int_0^t v_i^2(s) ds$$

$u_i(t) = (u(t), \varphi_i)$, $v_i(t) = (v(t), \varphi_i)$ ($i = 1, 2, \dots$) – коэффициенты фурье-функций $u(t)$, $v(t)$.

Задача Для каждой начальной точки найти оптимальное время преследования в игре (1.3), (1.4).

2. Решение задачи. Пусть $t = \vartheta$ – решение уравнения

$$\Sigma(t) \doteq \lambda_1^r r_1(t) z_{10}^2 + \lambda_2^r r_2(t) z_{20}^2 + \dots = (\rho - \sigma)^2, \quad r_i(t) = 2\lambda_i / (e^{2\lambda_i t} - 1) \quad (2.1)$$

где $z_{k0} = (z_0, \varphi_k)$ – коэффициенты фурье-функции z_0 .

Можно проверить, что левая часть уравнения (2.1) – убывающая функция переменной t , $t \geq 0$, и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ и к бесконечности при $t \rightarrow 0$. Следовательно, уравнение (2.1) имеет единственное решение.

Теорема. Если $\rho > \sigma$, то число ϑ – оптимальное время преследования в игре (1.3), (1.4).

Доказательство. 1°. *Построение управления преследующего.* Пусть $v(\cdot)$ – произвольное управление убегающего. Представим решение $z(t)$ и функции $u(t)$, $v(t)$ в виде ряда Фурье

$$z(t) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t) \varphi_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{r+1} \int_0^{\vartheta} |z_k(t)|^2 dt < \infty, \quad z_k(\cdot) \in L_2 \quad (2.2)$$

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \varphi_k, \quad F(\vartheta) \leq \rho^2, \quad v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \varphi_k, \quad G(\vartheta) \leq \sigma^2, \quad u_k(\cdot), v_k(\cdot) \in L_2 \quad (2.3)$$

Подставив разложения (2.2), (2.3) в уравнение (1.3) и приравнявая соответствующие коэффициенты полной системы $\{\varphi_k\}$, получим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_k(t) + \lambda_k z_k(t) = -u_k(t) + v_k(t), \quad z_k(0) = z_{k0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Интегрируя каждое уравнение этой системы с соответствующим начальным условием, получим

$$z_k(t) = e^{-\lambda_k t} \left(z_{k0} - \int_0^t (u_k(s) - v_k(s)) e^{\lambda_k s} ds \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

где $z_{k0} = (z_0, \varphi_k)$ – коэффициенты фурье-функции z_0 .

Управление преследующего определим так:

$$u_i(t) = \begin{cases} u_{i0}(t) + v_i(t), & i = 1, 2, \dots, \quad 0 \leq t \leq \vartheta \\ 0, & t > \vartheta \end{cases}, \quad u_{i0}(t) = e^{\lambda_i t} r_i(\vartheta) z_{i0}$$

Допустимость построенного управления преследующего вытекает из соотношений

$$F^{1/2}(\vartheta) \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \int_0^{\vartheta} u_{i0}^2(t) dt \right)^{1/2} + G^{1/2}(\vartheta) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r \int_0^{\vartheta} r_i^2(\vartheta) e^{2\lambda_i t} z_{i0}^2 dt \right)^{1/2} + \sigma = \Sigma^{1/2}(\vartheta) + \sigma = \rho - \sigma + \sigma = \rho$$

(использовано определение числа ϑ .)

2°. *Возможность завершения игры.* Используя выражение (2.4), имеем

$$z_k(\vartheta) = e^{-\lambda_k \vartheta} \left(z_{k0} - \int_0^{\vartheta} r_k(\vartheta) e^{\lambda_k s} e^{\lambda_k s} z_{k0} ds \right) = e^{-\lambda_k \vartheta} (z_{k0} - z_{k0}) = 0$$

3°. *Построение управления убегающего.* Управление убегающего определим следующим образом:

$$v_i(t) = r_i(\vartheta) \frac{\sigma}{\rho - \sigma} e^{\lambda_i t} z_{i0}, \quad 0 \leq t \leq \vartheta, \quad \text{если } \rho(t) > \sigma(t) \quad (2.5)$$

Если же $\rho(\tau) = \sigma(\tau)$ впервые в некоторый момент τ , $0 < \tau < \vartheta$, то управление убегающего отождествляем с управлением V_0 , которое определено ниже (см. формулу (2.10)).

Допустимость управления убегающего вытекает из соотношений

$$G(t) \leq \frac{\sigma^2}{(\rho - \sigma^2)} \int_0^{\vartheta} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^r r_i^2(\vartheta) e^{2\lambda_i t} z_{i0}^2 dt = \frac{\sigma^2}{(\rho - \sigma)^2} \Sigma(\vartheta) = \sigma^2$$

и построения управления V_0 .

4°. *Невозможность завершения преследования на промежутке $[0, \vartheta]$.*

Лемма. Среди всех управлений $u = u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots)$, $0 \leq t \leq \tau$, таких, что

$$\int_0^{\tau} u_k(s) e^{\lambda_k s} ds = z_{k0}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

управление

$$u(t): u_k(t) = r_k(\tau) e^{\lambda_k t} z_{k0}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

доставляет минимум функционалу $F(\tau)$.

Доказательство. Обе части равенства (2.6), умножив на $\lambda_k^r r_k(\tau) z_{k0}$, суммируем по k . Получим

$$\begin{aligned} \Sigma(\tau) &= \int_0^{\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^r r_k(\tau) u_k(s) e^{\lambda_k s} z_{k0} ds \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^r \int_0^{\tau} r_k^2(\tau) e^{2\lambda_k s} z_{k0}^2 ds \right)^{1/2} F^{1/2}(\tau) = \Sigma^{1/2}(\tau) F^{1/2}(\tau) \end{aligned}$$

(использовано неравенство Коши–Буняковского). Следовательно,

$$\Sigma^{1/2}(\tau) \leq F^{1/2}(\tau) \quad (2.8)$$

Таким образом, для любого управления $u(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, удовлетворяющего равенствам (2.6), выполняется неравенство (2.8).

С другой стороны, можно проверить, что для управления (2.7) соотношение (2.8) справедливо со знаком равенства.

Пусть убегающий применяет построенное выше управление (2.5). Сначала покажем, что, пока выполняется неравенство $\rho(t) > \sigma(t)$, $t \in [0; \vartheta]$, невозможно завершить

игру. Предположим противное. Пусть в некоторый момент времени t' , $0 < t' < \vartheta$, для которого

$$\rho(t') \geq \sigma(t') \quad (2.9)$$

игра завершена, т.е. $z(t') = 0$.

Из равенства $z(t') = 0$, учитывая соотношения (2.5), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{t'} u_k(s) e^{\lambda_k s} ds &= z_{k0} + \int_0^{t'} v_k(s) e^{\lambda_k s} ds = \\ &= z_{k0} + \frac{\sigma}{\rho - \sigma} \int_0^{t'} r_k(\vartheta) e^{2\lambda_k s} z_{k0} ds = z_{k0} + \frac{\sigma}{\rho - \sigma} \frac{r_k(\vartheta)}{r_k(t')} z_{k0} \end{aligned}$$

Согласно лемме, среди управлений $u(t)$, $0 \leq t \leq t'$, удовлетворяющих этому неравенству, управление $u(t)$

$$u_k(t) = e^{\lambda_k t} \left(r_k(t') + \frac{\sigma}{\rho - \sigma} r_k(\vartheta) \right) z_{k0}, \quad 0 \leq t \leq t'$$

доставляет минимум функционалу $F(t')$. Поэтому, учитывая определение числа ϑ , имеем

$$\begin{aligned} F(t') - G(t') &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda'_k \left(r_k(t') + \frac{\sigma}{\rho - \sigma} r_k(\vartheta) \right)^2 z_{k0}^2 \int_0^{t'} e^{2\lambda_k s} ds - \\ &- \frac{\sigma^2}{(\rho - \sigma)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda'_k r_k^2(\vartheta) \int_0^{t'} e^{2\lambda_k s} z_{k0}^2 ds = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda'_k \left(r_k(t') + 2 \frac{\sigma}{\rho - \sigma} r_k(\vartheta) \right) r_{k0}^2 = \\ &= \Sigma(t') + 2\sigma(\rho - \sigma) > \Sigma(\vartheta) + 2\sigma(\rho - \sigma) = \rho^2 - \sigma^2 \end{aligned}$$

Следовательно.

$$\rho' - F(t') < \sigma^2 - G(t')$$

или, что то же самое, $\rho^2(t') < \sigma^2(t')$, что противоречит неравенству (2.9). Таким образом, преследующий, сохраняя неравенство $\rho(t) > \sigma(t)$, не может завершить игру на промежутке $[0, \vartheta)$.

Пусть $\rho(\tau) = \sigma(\tau)$ впервые при некотором $\tau \in (0; \vartheta)$. Построим управление убегающего при $t \geq \tau$. Так как $z(\tau) \neq 0$, некоторые компоненты $z_k(\tau) \neq 0$, $k \in \{1, 2, \dots\}$. Не ограничивая общности предположим, что $z_1(\tau) \neq 0$. Считаем для определенности, что $z_1(\tau) > 0$. Обозначим

$$t_i = \tau + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad t_0 = \tau, \quad t_n = \vartheta; \quad \alpha_i = \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} |u_1(s)|^2 ds \right)^{1/2}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

h – положительное число, которое выбирается ниже. Управление убегающего при $t \geq \tau$ определим так:

$$v_1(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \leq t \leq t_1, \\ (\alpha_{i-1} e^{\lambda_1 t}) / g_i, & t_i < t \leq t_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots \\ 0, & t \geq \vartheta \end{cases} \quad (2.10)$$

$$v_k(t) = 0, \quad k = 2, 3, \dots$$

где

$$g_i = \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{2\lambda_1 s} ds \right)^{1/2} = \left(\frac{e^{2\lambda_1 h} - 1}{2\lambda_1} \right)^{1/2} e^{\lambda_1 t_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.11)$$

Это управление убегающего обозначим через V_0 . Тогда при $t \in [t_0, t_1)$, используя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$z_1(t) = z_1(\tau) - \int_{t_0}^t u_1(s) e^{\lambda_1 s} ds \geq z_1(\tau) - \left(\int_{t_0}^t u_1^2(s) ds \int_{t_0}^t e^{2\lambda_1 s} ds \right)^{1/2} \geq z_1(\tau) - g_0 \rho \quad (2.12)$$

При $t_1 < t < \vartheta$, согласно (2.10), имеем (считаем, что $t \in [t_k, t_{k+1}] \subset [\tau, \vartheta]$)

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_1(\tau) + \int_{t_0}^t [v_1(s) - u_1(s)] e^{\lambda_1 s} ds = \\ &= z_1(\tau) + \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_1(s) e^{\lambda_1 s} ds - \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} u_1(s) e^{\lambda_1 s} ds + \int_{t_k}^t v_1(s) e^{\lambda_1 s} ds - \\ &- \int_{t_k}^t u_1(s) e^{\lambda_1 s} ds \geq z_1(\tau) + \sum_{i=1}^{k-1} g_i \alpha_{i-1} - \sum_{i=0}^{k-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} u_1^2(s) ds \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{2\lambda_1 s} ds \right)^{1/2} - \\ &- \left(\int_{t_k}^t u_1^2(s) ds \int_{t_k}^t e^{2\lambda_1 s} ds \right)^{1/2} \geq z_1(\tau) + \sum_{i=1}^k g_i \alpha_{i-1} - \sum_{i=1}^k g_{i-1} \alpha_{i-1} - g_k (\alpha_k + \alpha_{k-1}) \geq \\ &\geq z_1(\tau) - \sum_{i=1}^k \Delta_{i-1} \alpha_{i-1} - 2g_k \rho; \quad \Delta_i = g_i - g_{i+1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Используя соотношения (2.11), имеем

$$|\Delta_{i-1}| = \left(\frac{e^{2\lambda_1 h} - 1}{2\lambda_1} \right)^{1/2} (e^{\lambda_1 h} - 1) e^{\lambda_1 t_{i-1}} \leq C h^{3/2} e^{\lambda_1 \vartheta} \quad (2.14)$$

где C – некоторое положительное число. Тогда, имея в виду неравенства

$$kh \leq \vartheta, \quad \alpha_i \leq \rho$$

из соотношений (2.13), (2.14) получаем

$$z_1(t) \geq z_1(\tau) - C h^{3/2} \sum_{i=1}^k e^{\lambda_1 \vartheta} \alpha_{i-1} - 2g_k \rho \geq z_1(\tau) - (C e^{\lambda_1 \vartheta} \vartheta h^{1/2} + 2g_k) \rho \quad (2.15)$$

Постоянную h можно выбрать так, чтобы выражения (2.12) и (2.15) были больше, чем $z_1(\tau)/2$. Тогда при таких h

$$z_1(t) \geq z_1(\tau)/2 > 0, \quad t \in [\tau, \vartheta]$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} J_i(\tau, t) &= J_1(\tau, t) \leq \lambda_1' \sum_{i=1}^k \int_{t_i}^{t_{i+1}} v_1^2(s) ds \leq \lambda_1' \sum_{i=1}^k \alpha_{i-1}^2 \leq \sum_{i=1}^k I_1(t_{i-1}, t_i) = \\ &= I_1(\tau, t_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} I_k(\tau, t) \leq \rho^2(\tau) = \sigma^2(\tau) \\ I_k(\tau, t) &= \lambda_k' \int_{\tau}^t |u_k(s)|^2 ds, \quad J_k(\tau, t) = \lambda_k' \int_{\tau}^t |v_k(s)|^2 ds \end{aligned}$$

Следовательно, управление (2.10) допустимо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л. Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 810–826.
2. Тухтасинов М. О некоторых задачах теории дифференциальных игр преследования в системах с распределенными параметрами // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 979–984.
3. Сатимов Н.Ю. О задачах преследования и убегания в дифференциальных играх // Мат. заметки. 1981. Т. 29. Вып. 3. С. 455–477.
4. Никольский М.С. О задаче преследования при различных ограничениях на управления догоняющего и убегающего // Теория оптимальных решений. Киев: Изд-во Ин-та кибернетики, 1975. С. 59–66.
5. Ибрагимов Г.И. Об одной игре оптимального преследования несколькими объектами одного // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 199–205.
6. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк., 1977. 431 с.
7. Авдонин С.А., Иванов С.А. Управляемость систем с распределенными параметрами и семейства экспонент. Киев: УМКВО, 1989. 242 с.

Ташкент
e-mail: gafurjan@uwed.freenet.uz

Поступила в редакцию
3.1.2001