

УДК 62–50

© 2002 г. Ю.И. Бердышев

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО СБЛИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ГРУППОЙ ДВИЖУЩИХСЯ ТОЧЕК

Исследуется задача о наискорейшем последовательном обходе нелинейным управляемым объектом третьего порядка группы движущихся точек. Определяется структура оптимальной траектории. Используются необходимые условия оптимальности управления и моментов сближения в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина и условий выравнивания гамильтониана. При этом не предполагается разбиение рассматриваемой задачи на ряд последовательно решаемых "двухточечных задач".

Отличие исследуемой задачи от рассматривавшихся ранее состоит в наличии не одной, а нескольких целевых точек, подлежащих последовательному во времени обходу при заданном порядке обхода. Сложность этой задачи состоит в том, что ее нельзя разбить на ряд последовательно решаемых двухточечных задач, состоящих в переводе из одной точки в другую. Здесь при переходе из одной точки в другую необходимо учитывать информацию о всех последующих точках, подлежащих обходу, так как игнорирование этой информации может привести к значительной потере качества управления [1]. Используются необходимые условия оптимальности управления и временных параметров в форме принципа максимума и выравнивания гамильтониана, полученные для задачи последовательного управления [1], частным случаем которой является исследуемая задача. Предполагается, что управляемый объект обходит точки в порядке возрастания их номеров (начальной точке присваивается нулевой номер) и каждые две соседние по номеру целевые точки в любой момент времени достаточно удалены друг от друга: расстояние между ними превосходит четыре минимальных радиуса разворота. При этих условиях из принципа максимума следует, что оптимальная траектория может состоять лишь из дуг окружностей минимального радиуса и отрезков прямых, их соединяющих. При этом в общих точках дуг и отрезков содержащие их окружности и прямые касаются друг друга; последняя целевая точка – конец последнего отрезка, а все остальные целевые точки принадлежат соответствующим дугам окружностей. Условия выравнивания преобразуются в соотношения, из которых следует, что целевые точки, лежащие на дугах, должны находиться в определенных местах. Таким образом, принцип максимума и условия выравнивания позволяют однозначно определить оптимальную траекторию.

Близкая по постановке задача рассматривалась ранее [2], причем при заданном отрезке функционирования системы минимизировалось максимальное из рассогласований между целевыми точками и положениями управляемого объекта на плоскости в некоторые моменты времени. Минимизация осуществлялась за счет выбора управления и этих моментов времени.

1. Постановка задачи. Движение нелинейного управляемого объекта в трехмерном фазовом пространстве на достаточно большом отрезке времени $T = [t_0, t^0]$ (t_0, t^0 – заданные числа, $t_0 < t^0$) описывается системой уравнений

$$\dot{x} = \cos \alpha, \quad \dot{y} = \sin \alpha, \quad \dot{\alpha} = u; \quad |u| \leq 1 \quad (1.1)$$

Здесь x, y, α – координаты фазового вектора системы (1.1), u – управляющий параметр, удовлетворяющий указанному ограничению. Состояние (x_0, y_0, α_0) объекта

(1.1) в начальный момент времени t_0 предполагает заданным

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad \alpha(t_0) = \alpha_0 \quad (1.2)$$

Как известно [3, 4], система (1.1) описывает простейшее движение самолета (автомобиля) в горизонтальной плоскости Oxy . При этом x, y – координаты самолета, отождествляемого с точкой на плоскости, α – угол, составляемый вектором скорости $V = (\dot{x}, \dot{y})$ с осью x , u – параметр, характеризующий скорость изменения угла α .

Эта модель использовалась для постановок как игровых задач [5–11], так и задач управления [12–19]. В частности, синтезировано [12] оптимальное управление, обеспечивающее наискорейшее попадание самолета из начального состояния в фиксированную точку плоскости движения. Эта же задача была решена [13] для более сложной модели движения, описываемой нелинейной системой четвертого порядка.

Заметим, что ранее [3–19] рассматривалась, как правило, система уравнений, которая отличается от (1.1) наличием постоянного коэффициента V_0 в правой части двух первых уравнений (1.1) и постоянного коэффициента K в правой части третьего уравнения (1.1). Но от этих коэффициентов можно избавиться за счет сжатия или растяжения координат x, y и времени t .

Далее, момент $t^0, t^0 > t_0$, предполагается достаточно большим.

В качестве класса допустимых управлений выберем множество U всех кусочно-непрерывных (непрерывных справа) скалярных функций $U : T \rightarrow \{u : |u| \leq 1\}$. Каждое управление $U \in U$ порождает движение, исходящее из начальной точки (x_0, y_0, α_0) , которое будем обозначать через

$$(x_u, y_u, \alpha_u) = ((x_u(t), y_u(t), \alpha_u(t))), \quad t \in T$$

Под траекторией системы (1.1), порожденной управлением U , далее понимаем множество $((x_u(t), y_u(t)), t \in T)$ в плоскости Oxy .

На плоскости Oxy задана группа точек $W_i(t)$ (всюду далее, если не оговорено иное, $i = 1, 2, \dots, m$), движущихся по известным траекториям

$$W_i(t) = g_i(t), \quad t_0 \leq t \leq t^0$$

($g_i : T \rightarrow R^2$ – заданные вектор-функции). Для определенности и упрощения вычислений будем полагать, что каждая точка $W_i(t)$ равномерно движется по соответствующей прямой L_i , проходящей через точки $(x_0, y_0), W_i(t_0)$, удаляясь от точки (x_0, y_0) . В этом случае вектор-функции $g_i(t)$ можно представить в виде

$$g_i(t) = W_i(t_0) + v_i(t - t_0), \quad t_0 \leq t \leq t^0$$

где v_i – заданный двумерный вектор скорости, направленный от точки (x_0, y_0) к точке $W_i(t_0)$. Пусть v_{i1}, v_{i2}, v_i – координаты и величина этого вектора, $v_i < 1$; β_i – угол между осью Ox и вектором v_i ; $X_i(t), Y_i(t)$ – координаты точки $W_i(t)$ в момент времени $t, t \in T$.

Будем полагать, что расстояние между двумя соседними точками $W_i(t_0), W_{i+1}(t_0)$ ($i = 0, 1, \dots, m-1$) больше четырех единиц.

Определение. Будем говорить, что управление $U \in U$ обеспечивает сближение системы (1.1) с точками $W_i(t)$, если найдутся такие моменты t_i , что будут иметь место соотношения

$$x_u(t_i) = X_i(t_i), \quad y_u(t_i) = Y_i(t_i)$$

Исходная задача состоит в определении управления $U \in U$, обеспечивающего сближение системы (1.1) с точками $W_i(t)$ за наименьшее время, а также в определении самих моментов t_i времени сближения.

Порядок обхода задаем соотношением

$$t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \leq t^0 \quad (1.3)$$

т.е. точки обслуживаются в порядке возрастания их номеров.

2. Необходимые условия оптимальности управлений и моментов времени. Далее используем необходимые условия оптимальности программного управления и набора временных параметров в форме принципа максимума Л.С. Понтрягина [20] и условий выравнивания гамильтониана, установленные [1] для задач последовательного управления. Для полноты изложения приведем их здесь, но с той лишь разницей, что в качестве допустимых управлений будем использовать множество кусочно-непрерывных функций, а не множество обобщенных программных управлений-мер [21–25]. Последние применялись [1] для обеспечения существования оптимального управления и корректного выполнения краевого и промежуточных условий. Ниже существование оптимального кусочно-непрерывного управления в основной задаче предполагается априори.

Напомним, что ранее [1] рассматривалось движение управляемой системы в n -мерном евклидовом пространстве X на заданном отрезке времени T (см. разд. 1), описываемое векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0; \quad u(t) \in P, \quad t \in T \quad (2.1)$$

Здесь $x \in X$ – фазовый вектор системы (2.1), u – r -мерный управляющий параметр, удовлетворяющий указанному геометрическому ограничению, $P \subset R^r$ – компакт; n, r – заданные натуральные числа. Как обычно [21–25], на функцию $f: T \times X \times P \rightarrow X$ накладываем три условия: непрерывность по совокупности переменных, наличие непрерывных частных производных $\partial f_i / \partial x_j$ (x_j – координаты вектора x ; f_i – координаты вектор-функции f ($j = 1, 2, \dots, n$)), продолжимость решений, означающую, что существует число $a > 0$, для которого

$$\|f(t, x, u)\|_n \leq a(1 + \|x\|_n) \quad \forall t \in T, \quad x \in X, \quad u \in P$$

$\|x\|_n$ – евклидова норма вектора $x \in R^n$.

Пусть R – числовая прямая, $\mathbb{T}$ – множество всех m -мерных векторов t , координаты t_i которых удовлетворяют ограничению (1.3), U – множество всех кусочно-непрерывных (непрерывных справа) r -мерных вектор-функций $U: T \rightarrow P$; $\varphi_u = (\varphi_u(t), t \in T)$ – движение, исходящее из начальной точки $x(t_0)$, порожденное управлением $U \in U$; $S(t_i^*, t | U^*)$ – фундаментальная матрица решений системы в вариациях [26]

$$\dot{y} = -L'(t)y \left(L(t) = \frac{\partial f(t, x, u)}{\partial x} \Big|_{u=U^*(t), x=\varphi_{u^*}(t)} \right)$$

на движении φ_{u^*} , порожденном некоторым управлением $U^*(t_i^* - \text{некоторый момент времени, } t \leq t_i^*)$; $\Phi_i: T \times X \rightarrow R$; $K_i: T \times X \rightarrow R^s$ ($s < n$) – непрерывные и непрерывно дифференцируемые (гладкие) по совокупности переменных функции). Полагаем

$$J(t, U) = \sum_{i=1}^m \Phi_i(t_i, \varphi_u(t_i)) \quad (t, U) \in \mathbb{T} \times U$$

Обозначим через W множество всех пар $(t, U) \in \mathbb{T} \times U$, удовлетворяющих соотношениям

$$K_i(t_i, \varphi_u(t_i)) = 0$$

Предполагается, что это множество не пусто.

Основная задача состоит в минимизации критерия качества $J(t, U)$ на множестве W . Иначе говоря, требуется подобрать такую пару (t, U) , которая обеспечивает попадание управляемой системы на многообразия

$$M_i = \{(t, x) : K_i(t, x) = 0\}$$

в моменты времени t_i , а сумма значений функций Φ_i , вычисленных в точках $(t_i, \varphi_u(t_i))$, принимает минимальное значение.

Близкие по смыслу задачи в игровой постановке рассматривались в [27–29].

Теорема 1. Пусть (t^*, U^*) – оптимальное решение основной задачи и $t_i^* < t_{i+1}^*$ при любом $i = 1, 2, \dots, m-1$. Тогда найдутся такие векторы $\Lambda_i^*, \Lambda_i^* \in R^s$, при которых функции $\bar{\Psi}_k^*(t)$, определяемые соотношениями

$$\psi_i^*(t) = (l_i^*)' S(t_i^*, t | U^*), \quad \bar{\Psi}_k^*(t) = \sum_{i=k}^m \psi_i^*(t) \quad (2.2)$$

$$l_i^* = -\text{grad } \Phi_i(t_i^*, \varphi_{u^*}(t_i^*)) - \frac{\partial K_i(t_i^*)}{\partial x} \bigg|_{(t_i^*, \varphi_{u^*}(t_i^*))} \Lambda_i^*$$

при любом $k = 1, 2, \dots, m$ почти всюду на отрезке $[t_{k-1}, t_k]$, будут удовлетворять соотношению

$$(\bar{\Psi}_k^*(t))' f(t, \varphi_{u^*}(t), U^*(t)) = \max_{u \in P} (\bar{\Psi}_k^*(t))' f(t, \varphi_{u^*}(t), u) \quad (2.3)$$

а в моменты t_k^* ($k = 1, 2, \dots, m-1$) равенству

$$\begin{aligned} & \max_{u \in P} (\bar{\Psi}_{k+1}^*(t_k^*))' f(t_k^*, \varphi_{u^*}(t_k^*), u) = \\ & = \max_{u \in P} (\bar{\Psi}_k^*(t_k^*))' f(t_k^*, \varphi_{u^*}(t_k^*), u) - \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \bigg|_{(t_k^*, \varphi_{u^*}(t_k^*))} - \frac{\partial K_k}{\partial t} \bigg|_{(t_k^*, \varphi_{u^*}(t_k^*))} \Lambda_k^* \end{aligned} \quad (2.4)$$

Последние соотношения будем далее называть условиями выравнивания.

Если к системе (2.1) добавить уравнение

$$\dot{x}_{n+1} = 1, \quad x_{n+1}(t_0) = t_0$$

а затем положить

$$\Phi_m = x_{n+1}(t_m), \quad \Phi_i \equiv 0, \quad i = 1, 2, \dots, m-1$$

то основная задача превратится в задачу на быстроедействие. Таким образом, теореме 1 можно использовать при решении задачи об оптимальном по быстроедействию обходе нелинейной системой (1.1) совокупности точек $W_i(t)$.

Предварительно заметим, что функция $\psi_i^*(t) = (l_i^*)' S(t_i^*, t | U^*)$ представима в стандартной форме [20] как решение векторного уравнения

$$\dot{\psi}_i = -L'(t)\psi_i \quad (2.5)$$

с краевым условием $\psi_i(t_i) = l_i^*$ (2.2).

Действительно, известно (см. [24], с. 134), что матрица $S(t_i^*, t | U^*)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dS'(t_i^*, t | U^*)}{dt} = -L'(t)S'(t_i^*, t | U^*) \quad (2.6)$$

Умножив правую и левую части последнего уравнения справа на l_i^* и учитывая равенство $S'(t_i^*, t | U^*) l_i^* = (l_i^*)' S(t_i^*, t | U^*)$, приходим к выводу, что функция ψ_i^* , определяемая формулой (2.2), удовлетворяет уравнению (2.5) с краевым условием $\psi_i^*(t_i^*) = l_i^*$.

3. Построение оптимальной траектории. Ранее [12, 13] с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина была решена задача о наибо́льшей скорости перевода системы (1.1) из начального положения (1.2) в начало координат $O = (0, 0)$ плоскости Oxy . Установлено [12, 13], что если начало координат лежит вне кругов C_0^+, C_0^- , ограниченных окружностями C^+, C^- единичного радиуса, касающимися прямой

$$(x - x_0) \sin \alpha_0 - (y - y_0) \cos \alpha_0 = 0 \quad (3.1)$$

в точке (x_0, y_0) , то оптимальная траектория (ОТ) состоит из дуги окружности C^+ либо дуги окружности C^- и отрезка прямой. Заметим, что именно такую структуру будет иметь последний участок ОТ, расположенный между точками W_{m-1}, W_m . Если же начало координат O лежит в одном из кругов C_0^+, C_0^- , то ОТ будет состоять из двух дуг окружностей. А именно если $O \in C_0^+$, то ОТ будет состоять из дуги окружности C^- и дуги окружности C_3 , которая касается C^- и проходит через начало координат.

Простота решения указанной задачи объясняется следующими обстоятельствами. Во-первых, при исходной системе (1.1) векторное уравнение (2.5) эквивалентно системе скалярных уравнений

$$\dot{\psi}_{i1} = 0, \quad \dot{\psi}_{i2} = 0, \quad \dot{\psi}_{i3} = \psi_{i1} \dot{y} - \psi_{i2} \dot{x} \quad (3.2)$$

относительно координат вектора ψ_i . Во-вторых, при $i = m = 1$ структура оптимального управления определяется соотношением

$$u = \text{sign } \psi_{13}, \quad \psi_{13} \neq 0$$

В-третьих, система (3.2) имеет аналитическое решение

$$\psi_{i1} = c_1, \quad \psi_{i2} = c_2, \quad \psi_{i3} = c_1 y - c_2 x + c_3$$

(c_1, c_2, c_3 – постоянные интегрирования, подлежащие определению). При этом из условия трансверсальности следует, что $c_3 = 0$. Таким образом, прямая $c_1 y - c_2 x = 0$ разбивает всю полуплоскость движения на две части, при движении в одной из которых $u = 1$, а в другой – $u = -1$.

Для сведения исходной задачи к основной задаче введем дополнительное уравнение

$$\dot{z} = 1, \quad z(t_0) = t_0$$

При любом $i = 1, \dots, m - 1$ функции $\Phi_i: T \times R^4 \rightarrow R$ полагаем тождественно равными нулю, а функцию $\Phi_m(t, x, y, \varphi, z)$ полагаем равной $z - t_0$. В рассматриваемом случае K_i – двумерные функции, компоненты которых $K_{ij} (j = 1, 2)$ определяются соотношениями

$$K_{i1} = x - (X_i(t_0) + (z - t_0) \nu_{i1}), \quad K_{i2} = y - (Y_i(t_0) + (z - t_0) \nu_{i2})$$

Поэтому векторы Λ_i^* , фигурирующие в формулировке теоремы 1 и подлежащие определению, будут двумерными. Их координаты далее будем обозначать через $-\Lambda_{i1}, -\Lambda_{i2}$. Тогда векторы l_i^* (см. теорему 1) будут определяться соотношениями

$$l_m^* = (\Lambda_{m1}, \Lambda_{m2}, 0, -\Lambda_{m1} \nu_{m1} - \Lambda_{m2} \nu_{m2} - 1)'$$

$$l_i^* = (\Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}, 0, -\Lambda_{i1} \nu_{i1} - \Lambda_{i2} \nu_{i2})', \quad i = 1, 2, \dots, m - 1$$

Здесь штрих означает транспонирование.

Как и ранее, обозначаем через ψ_{ij} ($j = 1, 2, 3, 4$) координаты вектор-функции $\psi_i(t)$, $t \in [t_0, t_i]$. В рассматриваемом случае изменение функции $\psi_i(t)$ на отрезке времени $[t_0, t_i]$ описывается системой (3.2), дополненной уравнением $\dot{\psi}_{i4} = 0$ с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \psi_{i1}(t_i) &= \Lambda_{i1}, \quad \psi_{i2}(t_i) = \Lambda_{i2}, \quad \psi_{i3}(t_i) = 0 \\ \psi_{i4} &= \begin{cases} -\Lambda_{i1}\nu_{i1} - \Lambda_{i2}\nu_{i2}, & i \neq m \\ -\Lambda_{i1}\nu_{i1} - \Lambda_{i2}\nu_{i2} - 1, & i = m \end{cases} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь Λ_{ij} ($j = 1, 2, \dots, 4$) – постоянные интегрирования, подлежащие определению.

Видно, что при любом управлении $U \in U$ и моменте времени $t \in [t_0, t_i]$ имеет место соотношение

$$\psi_{i3}(t) = \Lambda_{i1}(y_u(t) - Y_i(t_i)) - \Lambda_{i2}(x_u(t) - X_i(t_i)) \quad (3.4)$$

Пусть $\bar{\psi}_{kj}$ ($k = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, 3, 4$) – координаты вектора $\bar{\psi}_k^*$ (2.2). Из выражений (2.2), (3.4) имеем (далее суммирование ведется от $i = k$ до $i = m$)

$$\bar{\psi}_{k3} = \Sigma \Lambda_{i1}(y_u - Y_i(t_i)) - \Lambda_{i2}(x_u - X_i(t_i)), \quad \bar{\psi}_{k1} = \Sigma \Lambda_{i1}, \quad \bar{\psi}_{k2} = \Sigma \Lambda_{i2} \quad (3.5)$$

В соответствии с принципом максимума (2.3) на отрезке времени $[t_{k-1}, t_k]$ действует управление U , удовлетворяющее соотношению

$$U(t) = \text{sign } \bar{\psi}_{k3}(t), \quad \bar{\psi}_{k3}(t) \neq 0 \quad (3.6)$$

Положим

$$p_k = \Sigma (\Lambda_{i2} X_i(t_i) - \Lambda_{i1} Y_i(t_i))$$

Тогда (см. выражение (3.5))

$$\bar{\psi}_{k3}(t) = \bar{\psi}_{k1} y_u(t) - \bar{\psi}_{k2} x_u(t) + p_k$$

Ввиду соотношений (3.3)–(3.6) прямая

$$S_k = \{(x, y) : \bar{\psi}_{k1} y - \bar{\psi}_{k2} x + p_k = 0\} \quad (3.7)$$

делит всю плоскость движения на две части, в одной из которых (на отрезке времени $[t_{k-1}, t_k]$) управление $U(t) = 1$, а в другой – $U(t) = -1$. Возможно также движение и по прямой S_k (3.7) под действием управления $U(t) \equiv 0$, которое для исследуемой задачи является особым управлением [22].

Используя принцип максимума – соотношение (2.3) и его следствие – соотношение (3.6), можно показать, что ОТ состоит из дуг D_i ($i = 0, 1, \dots, m-1$) окружностей единичного радиуса и отрезков G_k ($k = 1, 2, \dots, m$) прямых (3.7), их соединяющих; при этом дуги и отрезки касаются друг друга в точках их соприкосновения. Кроме того, в общем случае первый участок ОТ – дуга D_0 , последний участок – отрезок G_m , заканчивающийся точкой W_m ; число дуг равно числу движущихся целей, при этом встреча управляемого объекта с целями $W_i(t)$ происходит на соответствующих дугах D_i , т.е. имеют место соотношения $W_i(t_i) \in D_i$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$). В основе доказательства указанного факта лежит установка невозможности, при выполнении соотношения (3.6), иной структуры ОТ, отличной от описанной.

Теперь покажем, что положение точки $W_i(t_i)$ на соответствующей дуге D_i однозначно определяется условием выравнивания (2.4), из которого следует необходимость ортогональности векторов $V(t_i) - v_i(t_i)$, Λ_i^* , где $V(t_i)$, $v_i(t_i)$ – соответственно векторы скорости управляемого объекта и i -й цели в точке их встречи, вектор Λ_i^* определен в теореме 1.

Предварительно заметим, что в рассматриваемом случае функции $\Phi_i: R^{n+1} \rightarrow R$; $K_i: R^{n+1} \rightarrow R^2$ явно от времени не зависят. Поэтому два последних слагаемых в правой части (2.4) должны отсутствовать. При исходной и вспомогательной системах (1.1), (3.2) условия выравнивания (2.4) имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{k+11} \cos \alpha_u(t_k^*) + \bar{\Psi}_{k+12} \sin \alpha_u(t_k^*) + |\bar{\Psi}_{k+13}(t_k^*)| = \bar{\Psi}_{k1} \cos \alpha_u(t_k^*) + \\ + \bar{\Psi}_{k2} \sin \alpha_u(t_k^*) + |\bar{\Psi}_{k3}(t_k^*)| - (v_{k1} \Lambda_{k1} + v_{k2} \Lambda_{k2}), \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

(v_{k1}, v_{k2} – координаты вектора скорости v_k k -й цели).

Ввиду соотношений (3.4), (3.5) справедливы равенства

$$\Psi_{k3}(t_k^*) = 0, \quad \bar{\Psi}_{k3}(t_k^*) = \bar{\Psi}_{k+13}(t_k^*) + \Psi_{k3}(t_k^*), \quad |\bar{\Psi}_{k+13}(t_k^*)| = |\bar{\Psi}_{k3}(t_k^*)| \quad (3.9)$$

Из соотношений (3.8), (3.9) вытекает равенство

$$\Lambda_{k1}(\cos \alpha_u(t_k^*) - v_{k1}) + \Lambda_{k2}(\sin \alpha_u(t_k^*) - v_{k2}) = 0 \quad (3.10)$$

имеющее следующий геометрический смысл: в момент t_k^* встречи управляемого объекта с k -й целью векторы скорости $V(t) - v_k(t)$, Λ_k^* ортогональны. Этот факт и требовалось доказать.

Замечание. Если целевые точки $W_i(t)$ неподвижны, то с использованием указанного факта можно показать, что точки $W_i(t)$ делят соответствующие дуги D_i пополам.

4. Пример. Укажем формулы для построения ОТ системы (1.1) в случаях, когда $m = 1$ и $m = 2$. Для упрощения вычислений, не ограничивая общности, можно далее считать, что $t_0 = x_0 = y_0 = \alpha_0 = 0$.

При $m = 1$ ОТ будет состоять из дуги D_0 окружности и отрезка прямой. Длину дуги α этой ОТ можно определить из уравнения

$$\lambda_{mb} + \alpha = \lambda_{m1} / v_1 \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{mb} = \sqrt{(x_m - x_b)^2 + (y_m - y_b)^2}, \quad \lambda_{m1} = \sqrt{(x_m - x_1)^2 + (y_m - y_1)^2} \\ x_m = \frac{x_b \sin \alpha - y_b \cos \alpha}{\sin \alpha - \operatorname{tg} \beta_1 \cos \alpha}, \quad y_m = x_m \operatorname{tg} \beta_1; \quad \beta_1 \neq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$x_b = \sin \alpha, \quad y_b = 1 - \cos \alpha$$

$x_1 = X_1(0)$, $y_1 = Y(0)$ – координаты точки $W_1(t)$ в момент времени $t = 0$.

Уравнение (4.1) получается следующим образом. Вначале определяются координаты x_m, y_m точки M пересечения прямых

$$L_1 : y \cos \beta_1 = x \sin \beta_1 \quad (4.3)$$

$$S_1 : (x - x_b) \sin \alpha - (y - y_b) \cos \alpha = 0 \quad (4.4)$$

(прямая S_1 касается в точке $B = (x_b, y_b)$ окружности, содержащей дугу D_0). Затем время $t_1 = \lambda_{m1}/v_1$ движения первой цели между точками $W_1(0)$, M приравнивается к времени $t = \lambda_{mb} + \alpha$ движения управляемого объекта между точками W_0 ($W_0 = (0, 0)$), M по дуге и отрезку.

Теперь рассмотрим случай, когда $m = 2$. Возможны четыре случая взаимного расположения прямых L_1, L_2 , определяемых углами β_1, β_2 , и вектора скорости управляемого объекта в начальный момент времени. Рассмотрим лишь один из них, а именно, когда (см. фиг. 1)

$$0 \leq \beta_1 \leq \pi, \quad \beta_1 - \pi \leq \beta_2 \leq \beta_1 \quad (4.5)$$

Вспомогательная задача 1. При заданном моменте времени $t, t \geq t_1$ ($t_1 = \lambda_{m1}/v_1$) сближения управляемого объекта с первой движущейся целью построить траекторию сближения, состоящую из двух дуг окружностей единичного радиуса и соединяющего их отрезка прямой.

Решение. Пусть α – угол наклона прямой S_1 , содержащей первый прямолинейный участок искомой траектории. Тогда, во-первых, α – длина первой дуги искомой траектории, во-вторых, координаты x_b, y_b точки B касания первой дуги с прямой S_1 (фиг. 1) определяются последними двумя формулами (4.2), в-третьих, уравнение прямой S_1 имеет вид (4.4). Координаты x_m, y_m точки M встречи управляемого объекта с первой целью вычисляются по формулам

$$x_m = X_1(t_0) + v_1 t \cos \beta_1, \quad y_m = Y_1(t_0) + v_1 t \sin \beta_1$$

Тогда

$$d = |(y_m - y_b) \cos \alpha - (x_m - x_b) \sin \alpha| \quad (4.6)$$

– расстояние от точки M до прямой S_1 . Длина δ второй дуги искомой траектории определяется соотношениями

$$\delta : \cos \delta = 1 - d, \quad \sin \delta = \sqrt{d(2 - d)} \quad (4.7)$$

Координаты x_d, y_d точки касания D второй дуги с прямой S_1 и длина $|BD|$ прямолинейного участка искомой траектории вычисляются по формулам

$$x_d = x_m - d \sin \alpha - \sin \delta \cos \alpha, \quad y_d = y_m + d \cos \alpha - \sin \delta \sin \alpha \quad (4.8)$$

$$|BD| = \lambda_{db}$$

Поскольку скорость движения управляемого объекта по траектории равна единице, то, приравнявая длину всей траектории к времени движения, получим уравнение

$$\alpha + |BD| + \delta = t \quad (4.9)$$

которое можно использовать для определения угла α . Вычислив этот угол, получим решение вспомогательной задачи 1 в случае (4.5), так как координаты характерных точек B, M, D искомой траектории определяются формулами (4.2), (4.8).

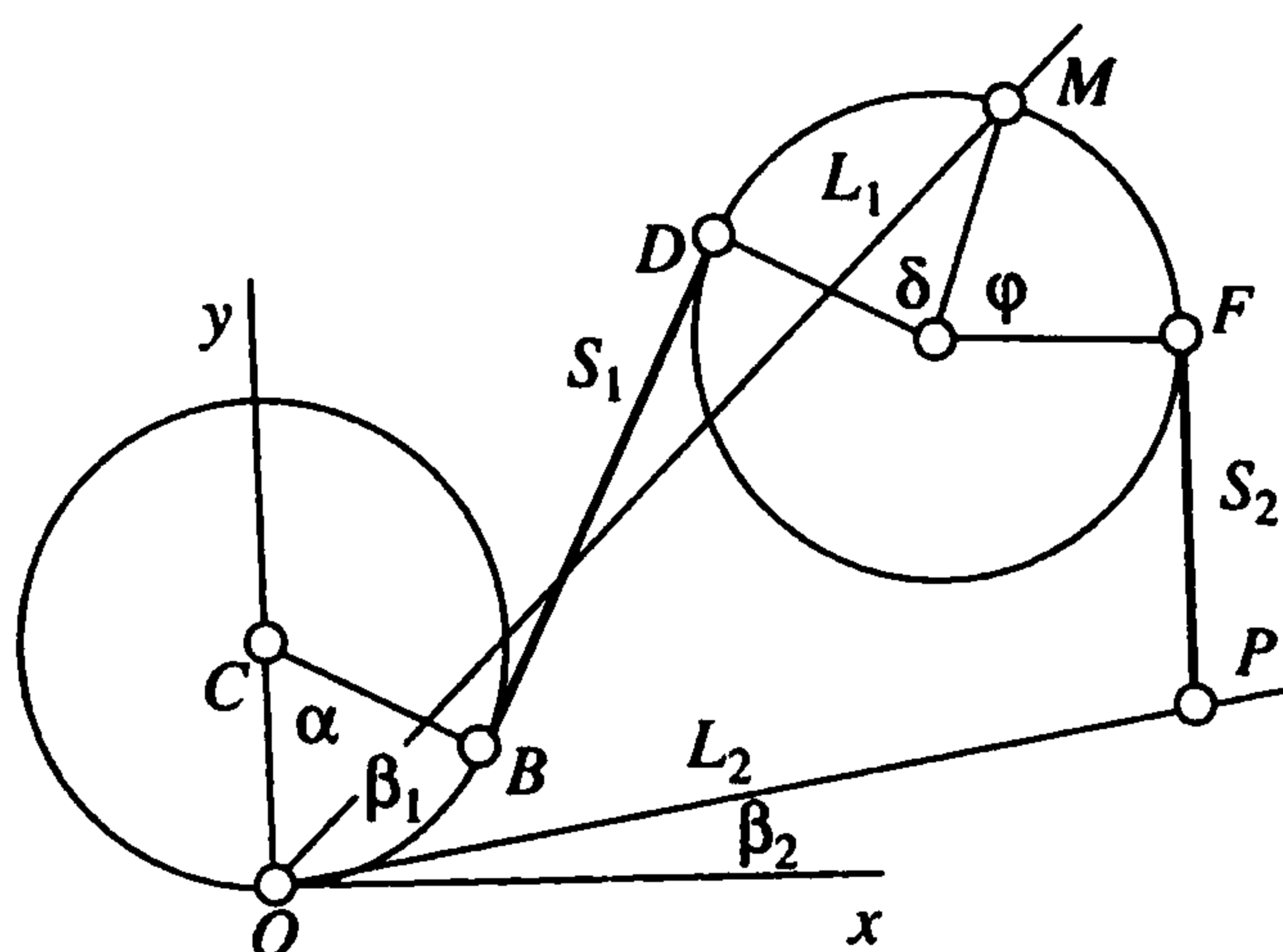
Параметры найденной траектории зависят от величины t . Выберем время t встречи с первой целью так, чтобы траектория W_0BDM была частью траектории, доставляющей решение следующей задачи.

Вспомогательная задача 2. В случае (4.5) определить траекторию сближения системы (2.1) с двумя движущимися точками W_1, W_2 , состоящую из двух дуг окружностей, двух отрезков прямых и имеющую наименьшую длину.

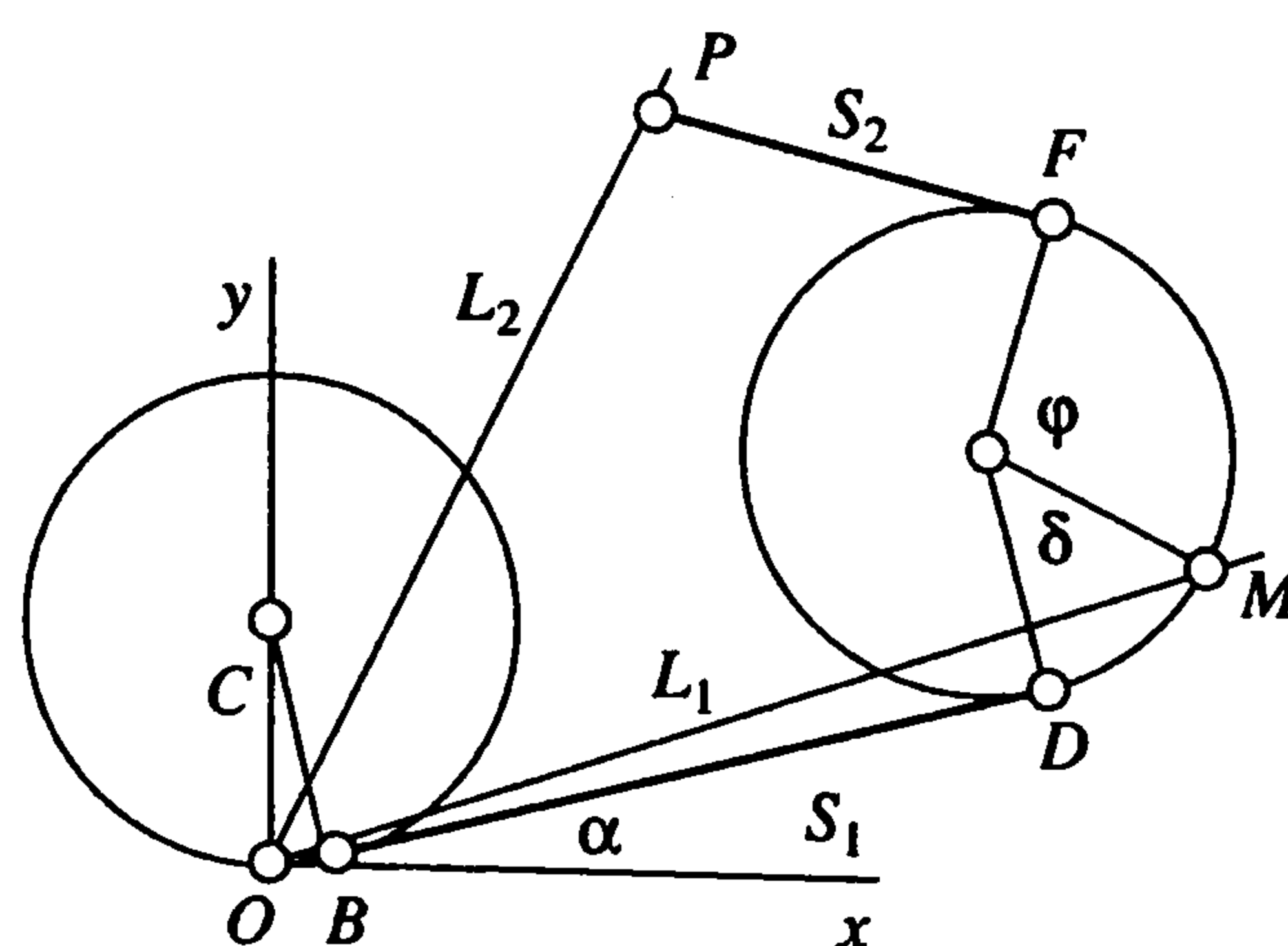
Пусть φ – длина второй части второй дуги искомой траектории; $\psi = \alpha - \delta - \varphi$. Тогда $\delta + \varphi$ – полная длина этой дуги. Координаты x_f, y_f точки F касания этой дуги с заключительным прямолинейным отрезком траектории определяются формулами

$$x_f = x_b + |BD| \cos \alpha + \sin \alpha - \sin \psi,$$

$$y_f = y_b + |BD| \sin \alpha - \cos \alpha + \cos \psi$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Прямая S_2 , содержащая второй прямолинейный участок, описывается уравнением

$$S_2 : (y - y_f) \cos \psi - (x - x_f) \sin \psi = 0$$

Координаты x_p, y_p точки P пересечения этой прямой с прямой

$$L_2 : y = x \operatorname{tg} \beta_2$$

вычисляются по формулам

$$x_p = y_f \cos \psi - x_f \sin \psi / (\cos \psi \operatorname{tg} \beta_2 - \sin \psi), \quad y_p = x_p \operatorname{tg} \beta_2$$

Для определения момента встречи t_2 управляемого объекта со второй целью и угла φ имеем два уравнения

$$x_2 + v_2 t_2 \cos \beta_2 = x_p, \quad \lambda_{pf} = t_2 - t - \varphi$$

Исключая из этих уравнений параметр t_2 , получим уравнение

$$\lambda_{pf} = (x_p - x_2) / (v_2 \cos \beta_2) - t - \varphi \quad (4.10)$$

для определения угла φ . После вычисления φ получим

$$t_2 = (x_p - x_2) / (v_2 \cos \beta_2) \quad (4.11)$$

Как было показано ранее, необходимым условием оптимальности построенной траектории является ортогональность векторов $V(t) - v_1(t)$, Λ_1^* , где $V(t)$, $v_1(t)$ — соответственно векторы скорости управляемого объекта и первой цели в точке M их встречи, вектор Λ_1^* определен в теореме 1.

Можно показать, что требуемое условие выполнится, если момент t встречи управляемого объекта с первой целью будет определяться из уравнения

$$v_1 s^{-1/2} \sin(\delta + \beta_1 - \alpha) - \cos(\gamma + \delta) = 0 \quad (4.12)$$

где

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{d}{\operatorname{tg}[(\varphi + \delta)/2] - \sin \delta}, \quad s = 1 + v_1^2 - 2v_1 \cos(\delta + \beta_1 - \alpha)$$

Зависимость угла α от параметра t определяется из уравнения (4.9). Зависимость расстояния d и угла δ от величин t , α определяется соотношениями (4.6), (4.7), а угол φ —

из уравнения (4.10). Вычислив момент t , решим Вспомогательную задачу 2. В рассматриваемом случае (4.5) в силу единственности момента t , удовлетворяющего уравнению (4.12), построенная траектория будет оптимальной.

На фиг. 2 приведен вид оптимальной траектории в случае, когда

$$0 \leq \beta_1 \leq \pi, \quad \beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_1 + \pi$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00348, 01-01-96450).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бердышев Ю.И. К задаче последовательного обхода нелинейным управляемым объектом совокупности гладких многообразий // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 1999. № 2. С. 3–27.
2. Бердышев Ю.И. Об одной задаче последовательной оптимизации без декомпозиции во времени // Кибернетика. 1987. № 4. С. 32–35.
3. Isaacs R. Differential Games. N.Y. ets.: Wiley, 1965 = Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 497 с.
4. Хамза М.Х., Колас И., Рунгальдер В. Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования // Управление космическими аппаратами и кораблями. М.: Наука, 1971. С. 410–418.
5. Cockayne E. Plane pursuit with curvature constraints // SIAM J. Appl. Math. 1967. V. 15. № 6. P. 1511–1516.
6. Salmon D.M. Policies and controller design for a pursuing vehicle // IEEE Trans. Automat. Control. 1969. V. 14. № 5. P. 482–488.
7. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 270 с.
8. Симакова Э.Н. Об одной задаче преследования на плоскости // Автоматика и телемеханика. 1968. № 7. С. 19–23.
9. Meier L. A new technique for solving pursuit-evasion differential games // IEEE Trans. Automat. Control. 1969. V. 14. № 5. P. 352–359.
10. Patsko V.S., Turova V.L. Homicidal chauffeur game: computation of level sets of the value function // (Annals of the International Society of Dynamic Games; 6). 2001. V. 6. P. 296–322.
11. Пацко В.С., Пятко С.Г., Кумков С.И., Федотов А.А. Оценивание траекторного движения воздушного судна на основе информационных множеств. СПб., Екатеринбург: ИММ УрО РАН. 1999. 68 с.
12. Бердышев Ю.И. Синтез оптимального управления для одной системы 3-го порядка // Вопросы анализа нелинейных систем автоматического управления: Тр. ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1973. Вып. 12. С. 91–101.
13. Бердышев Ю.И. Синтез оптимального по быстродействию управления для одной нелинейной системы четвертого порядка // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 6. С. 985–994.
14. Pesvaradi T. Optimal horizontal guidance law for Aircraft in the terminal area // IEEE Trans. Automat. Control. 1972. V. 17. № 6. P. 763–772.
15. Алешков Ю.З. Оптимальный вывод точки на траектории, соответствующую требуемому методу наведения // Вестн. ЛГУ. Математика, механика, астрономия. 1963. № 19. Вып. 4. С. 85–91.
16. Большевцев Э.М. Одна задача оптимального управления // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1968. № 1. С. 91–98.
17. Кукушкин А.П. Исследование структуры оптимальных по быстродействию траекторий в плоском поле тяготения // Вопросы оптимизации нелинейных систем автоматического управления: Тр. ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1975. Вып. 20. С. 48–70.
18. Проблемы механики управляемого движения: Оптимизация управления космическими аппаратами. Сб. статей. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 1976. 159 с.
19. Репях Н.А. Локально оптимальный синтез управления летательным аппаратом // Проблемы механики управляемого движения. Пермь, 1972. № 1. С. 182–195.

20. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
21. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
22. Warga J. Optimal Control of Differential and Functional Equations. N.Y.: Acad. Press, 1972 = Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 623 с.
23. Гамкрелидзе Р.В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1977. 254 с.
24. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
25. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 287 с.
26. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 550 с.
27. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under Lack of Information. Boston etc.: Birkhauser, 1995. 322 p.
28. Красовский А.Н. О позиционном минимаксном управлении // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 4. С. 602–610.
29. Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю. Задача конфликтного управления с наследственной информацией // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 885–900.

Екатеринбург

Поступила в редакцию
5.X.2001

e-mail: berd@imm.uran.ru