

УДК 531.314.2:517.972.6

© 2002 г. Л.Д. Акуленко, С.А. Кумакшев, С.В. Нестеров

ЭФФЕКТИВНОЕ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ МЕТОДОМ УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТИ

Излагается новый численно-аналитический метод решения нелинейных вариационных задач механики, позволяющий учитывать дополнительные изопериметрические условия и граничные условия различных типов. В отличие от известных подходов метод основан на использовании невязки искомых функций по абсциссам, в которых они удовлетворяют требуемым условиям. Метод имеет наглядную геометрическую интерпретацию и позволяет более уверенно судить о сходимости итерационного алгоритма, имеющего квадратичный характер. С помощью построенного алгоритма проведены расчеты одно- и многомодовых течений вязкой несжимаемой жидкости в плоском конфузоре (задача Джеффри–Гамеля) для широкого диапазона определяющих параметров (угла раствора и числа Рейнольдса).

1. Постановка задачи. Изложим существо предлагаемого численно-аналитического метода решения изопериметрических задач на примере простейшей классической задачи вида [1, 2]

$$J[y] = \int_0^l F(x, y, y') dx \rightarrow \min_y, \quad I[y] = \int_0^l N(x, y, y') dx = 0 \quad (1.1)$$

$$y = y(x), \quad y(0) = y(l) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (y, y') \in G$$

Некоторые более общие случаи задания граничных значений x , y и величины l простым преобразованием сводятся к рассматриваемому. Считается, что функции F, N достаточно гладкие и удовлетворяют требованиям применимости необходимых условий оптимальности в форме краевой задачи для уравнений Эйлера–Лагранжа [1, 2]. В результате приходим к соотношениям, определяющим искомую гладкую функцию $y(x)$ и неизвестный множитель Лагранжа λ

$$L[K] = 0, \quad y = y(x, \lambda), \quad y(0, \lambda) = y(l, \lambda) = 0$$

$$z' = N, \quad z = z(x, \lambda), \quad z(0, \lambda) = z(l, \lambda) = 0 \quad (1.2)$$

$$K = K(x, y, y', \lambda) \equiv F + \lambda N, \quad L[\cdot] \equiv \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} (\cdot) - \frac{\partial}{\partial y} (\cdot)$$

Таким образом, требуется решить нелинейную краевую задачу (1.2) относительно y, z и выбрать среди найденных решений оптимальное согласно условиям (1.1). Вычислительный аспект проблемы заключается в определении неизвестных параметров $\gamma = y'(0)$ и λ , т.е. недостающих данных для интегрирования соответствующей (1.2) задачи Коши.

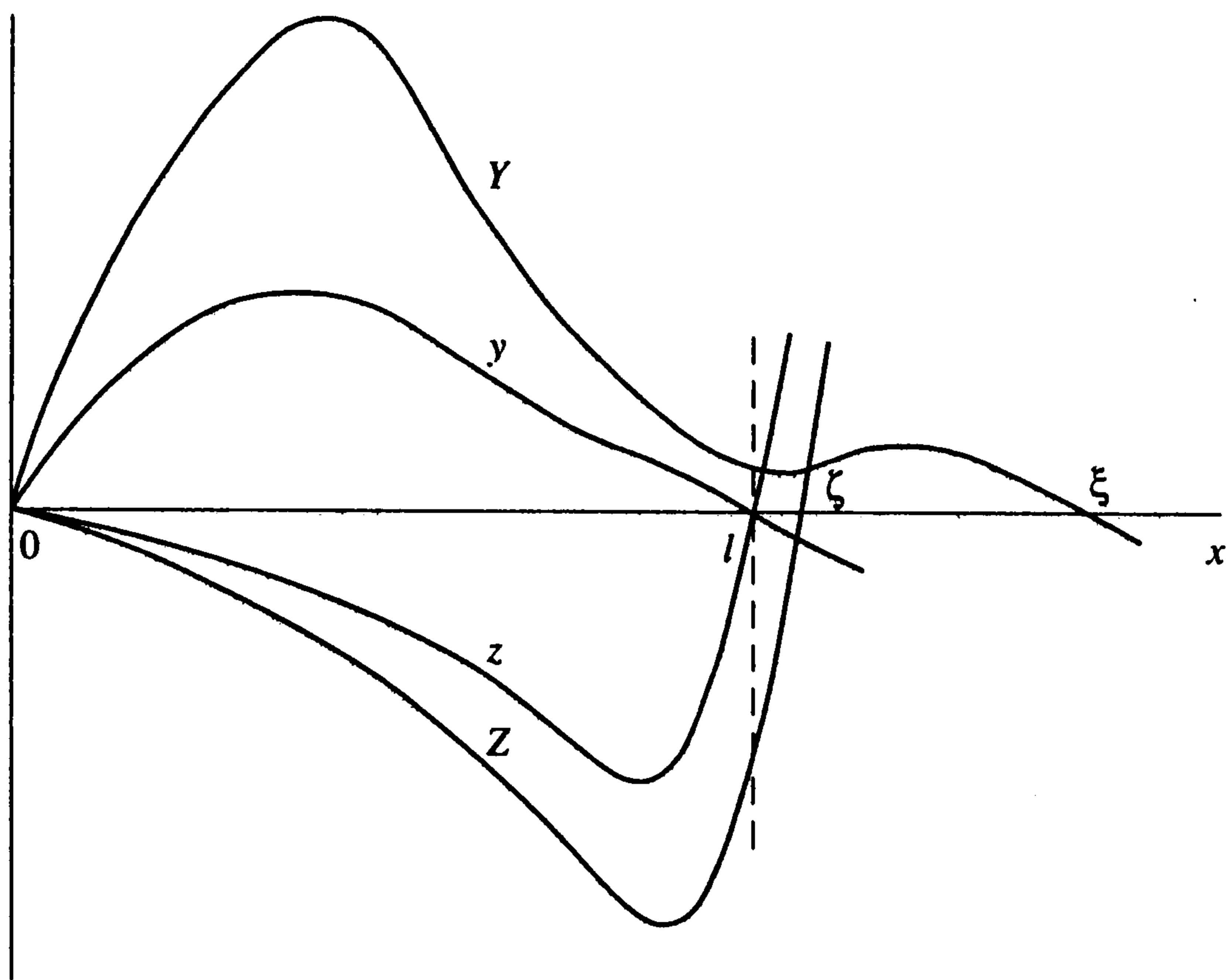
Эффективные численные методы исследования нелинейных краевых задач типа (1.2), пригодные для исследования существенно нелинейных механических систем в широком диапазоне изменения определяющих параметров, отсутствуют. Имеющиеся многочисленные методы пристрелки, прогонки, градиентного спуска, последовательных приближений или касательных, квазилинеаризации и др. и их многочисленные модификации [1–7] приводят к принципиальным трудностям. Отметим следующие: расходимость или чрезвычайно медленная сомнительная сходимость итераций (вырождение матрицы чувствительности, "овражные" эффекты), значительные затраты процессорного времени и практически отсутствие контроля сходимости и реальной точности приближенных решений. Главная причина такого положения, по-видимому, заключается в игнорировании важного свойства краевых задач, а именно, существенной зависимости решения от длины интервала l . Во всех предлагаемых подходах интервал изменения аргумента x фиксирован и не варьируется в процессе исследований приближенных решений. Применяемые процедуры используют только невязки искомых функций в фиксированных точках (для данной задачи (1.2) при $x = l$ и $x = 0$). Исследование поведения приближенных решений на основе интегрирования соответствующих задач Коши и определения их невязок по x не проводится и не используется при уточнении недостающих данных (в частности γ и λ).

Целесообразность использования одного из основных свойств приближенного решения краевой задачи (1.2) – невязки по аргументу x – проиллюстрируем графически (см. фиг. 1). Здесь Y, Z – решение задачи Коши, соответствующей уравнениям (1.2) и при $x = 0$ удовлетворяющее условиям $Y = 0, Y' = \gamma^*, Z = 0, \lambda = \lambda^*$ (γ^*, λ^* – некоторые оценки параметров γ, λ). Функции y, z при $x = 0$ удовлетворяют условиям $y(0) = z(0) = 0; y'(0) = \gamma^0$, параметр $\lambda = \lambda^0$, где γ^0, λ^0 – искомые точные значения. Исследование невязки Y при $x \geq l$ свидетельствует о слабой чувствительности Y по отношению к параметру γ . Хотя невязка по Y численно невелика, значение γ^* нельзя считать хорошим приближением, так как величина наиболее близкого к l корня функции $Y(x, \gamma^*, \lambda^*)$ (обозначим его через ξ) существенно отличается от l : $|\xi - l| \sim l$ (невязка по x велика). Наоборот, зависимость функции Z от параметра λ может быть сильной, т.е. малому изменению λ соответствует значительное изменение невязки $Z(l, \gamma^*, \lambda^*)$. Например, эта невязка может быть относительно большой, а по абсциссе x – малой (значение ζ корня функции Z близко к l , т.е. $|\zeta - l| \ll l$). В определенном смысле можно считать, что λ^* есть "хорошее" приближение λ .

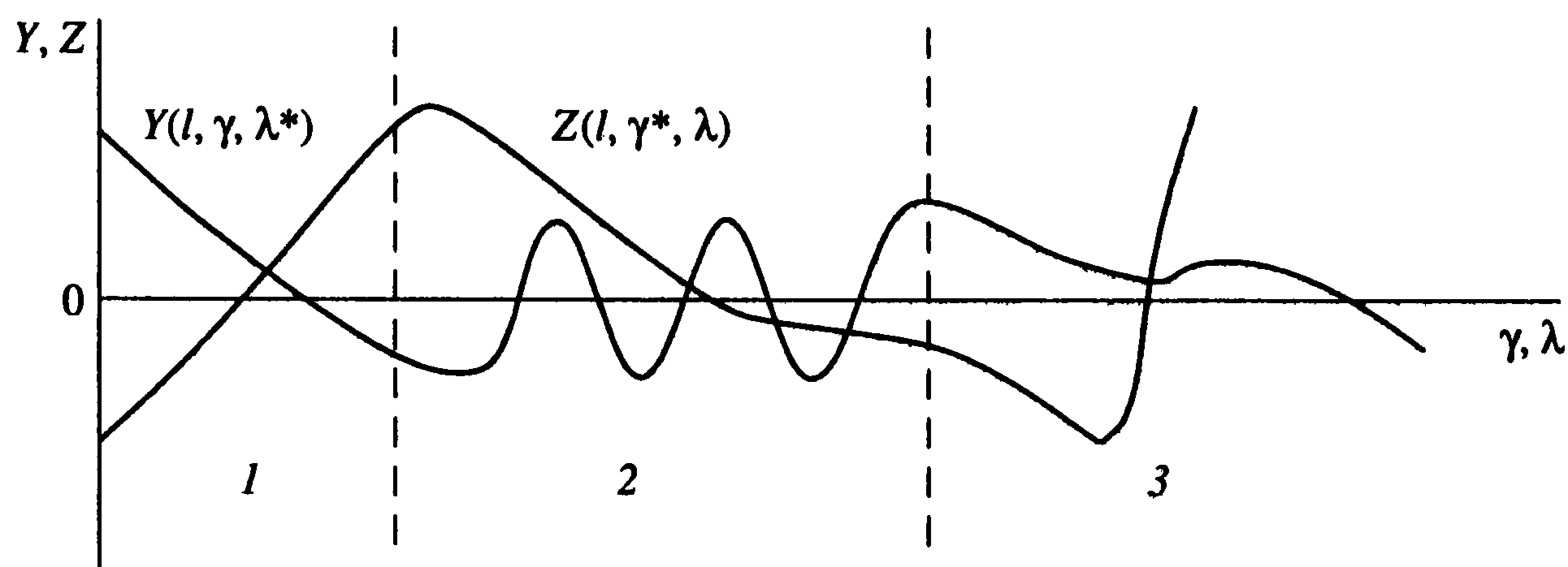
Таким образом, анализ поведения решения $Y(x, \gamma^*, \lambda^*), Z(x, \gamma^*, \lambda^*)$ дает дополнительные сведения о его чувствительности к изменению искомых параметров γ, λ . Без такого анализа трудно судить о существовании решения краевой задачи в окрестности найденных каким-либо способом оценок γ^*, λ^* . Наиболее естественными и распространенными способами построения оценок γ^*, λ^* являются вариационно-функциональный подход на основе методов Релея–Ритца и Бубнова–Галеркина [3–4].

Следует отметить, что исследование поведения невязок и построение численного решения многомерных краевых задач приводит к существенным трудностям [3–7]. Они значительны также для одномерных нелинейных, в частности негладких систем. Особые трудности вызывает нерегулярный случай большого числа корней уравнений для искомых параметров типа γ, λ , определяемых краевыми условиями, например, для колебательных систем [8–10].

Различный характер поведения невязок $Y(l, \gamma, \lambda^*)Z(l, \gamma^*, \lambda)$ как функций γ и λ соответственно представлен фиг. 2. Начальная зона 1 соответствует регулярной ситуации (в малой окрестности γ^*, λ^* имеется искомое решение). В зоне 2 наблюдается слабая зависимость Z от λ и быстрые осцилляции Y по γ , а в зоне 3 относительно резко изменяется невязка по Z , но слабо – по Y ; участки 2, 3 не являются регулярными в вычислительном аспекте. В ряде случаев требуется дополнительное упрощение задачи на основе применения асимптотических методов малого параметра (методов сингулярных возмущений [11–13] или усреднения [10]).



Фиг. 1



Фиг. 2

Ниже предлагается численно-аналитический метод ускоренной сходимости решения краевых задач типа (1.2), основанный на учете невязок приближенных решений по аргументу x . Этот подход, как свидетельствует вычислительная практика, обладает высокой точностью и устойчивостью вычислений, которые позволяют эффективно контролировать сходимость приближенных численных расчетов и строить искомые решения в сложных нерегулярных ситуациях для широкой области изменения определяющих систему параметров.

2. Стандартная процедура типа метода касательных и его модификация. Изложим применительно к задаче (1.2) метод типа Ньютона для численного нахождения неизвестных параметров γ, λ , определяющих соответствующую задачу Коши. Введем функции чувствительности v, w и u, s ; они описываются линейными соотношениями

$$L[K'_y v + K'_y v'] = 0, \quad w' = N'_y v + N'_y v'$$

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 1, \quad w(0) = 0$$

$$L[K'_y u + K'_y u' + N] = 0, \quad s' = N'_y u + N'_y u' \quad (2.1)$$

$$u(0) = u'(0) = s(0) = 0$$

$$v = \frac{\partial y}{\partial \gamma}, \quad w = \frac{\partial z}{\partial \gamma}; \quad u = \frac{\partial y}{\partial \lambda}, \quad s = \frac{\partial z}{\partial \lambda}$$

Штрих с индексом y или y' означает частную производную соответственно по y или y' . Если функция $y(x)$ известна, то решение задачи Коши (2.1) строится численно, причем для v, w и u, s интегрирование проводится независимо. Искомая функция $y(x)$ определяется соотношениями

$$L[K] = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \gamma; \quad y = y(x, \gamma, \lambda), \quad y(l, \gamma, \lambda) = 0$$

$$z' = N, \quad z(0) = 0; \quad z = z(x, \gamma, \lambda), \quad z(l, \gamma, \lambda) = 0 \quad (2.2)$$

Пусть известно начальное приближение (оценка) γ^*, λ^* параметров γ, λ и имеет место регулярная ситуация (см. разд. 1. и фиг. 2 (зона 1)). Тогда может быть применена рекуррентная процедура уточнения значений γ, λ типа метода Ньютона, основанная на высокоточном интегрировании задач Коши (2.1), (2.2).

Рассмотрим первый шаг этой процедуры. Согласно выражениям (2.2), при учете соотношений (2.1) имеем приближенные выражения для y, z вида

$$y(x, \gamma, \lambda) \equiv y(x, \gamma^* + \delta\gamma, \lambda^* + \delta\lambda) = Y^*(x) + V^*(x)\delta\gamma + U^*(x)\delta\lambda + O_2^y(\delta\gamma, \delta\lambda)$$

$$z(x, \gamma, \lambda) \equiv z(x, \gamma^* + \delta\gamma, \lambda^* + \delta\lambda) = Z^*(x) + W^*(x)\delta\gamma + S^*(x)\delta\lambda + O_2^z(\delta\gamma, \delta\lambda) \quad (2.3)$$

$$\delta\gamma \equiv \gamma - \gamma^*, \quad \delta\lambda \equiv \lambda - \lambda^*$$

$$Y^*, Z^*, V^*, W^*, U^*, S^* \equiv y, z, v, w, u, s \big|_{\gamma=\gamma^*, \lambda=\lambda^*}$$

Здесь Y^*, Z^* – решение задачи Коши (2.2) для известных γ^*, λ^* ; V^*, W^* и U^*, S^* – соответствующее решение (2.1); $O_2^{y,z}$ – член порядка $(\delta\gamma^2, \delta\lambda^2)$. Эти функции считаются известными с погрешностью $O(\delta\gamma^2 + \delta\lambda^2)$. Из краевых условий (2.2) следуют приближенные уравнения для определения $\delta\gamma, \delta\lambda$

$$V^*(l)\delta\gamma + U^*(l)\delta\lambda = -Y^*(l) + O_2^y$$

$$W^*(l)\delta\gamma + S^*(l)\delta\lambda = -Z^*(l) + O_2^z \quad (2.4)$$

В общей ситуации "малые" величины $Y^*(l), Z^*(l)$ и $\delta\gamma, \delta\lambda$ могут быть разных порядков. Для указанного выше регулярного случая, отбрасывая квадратичные члены, из системы (2.4) находим искомые $\delta\gamma, \delta\lambda$ с одинаковой по порядку погрешностью O_2

$$\delta\gamma^* = -\frac{Y^*(l)S^*(l) - Z^*(l)U^*(l)}{\Delta^*(l)}, \quad \delta\lambda^* = \frac{Y^*(l)W^*(l) - Z^*(l)V^*(l)}{\Delta^*(l)} \quad (2.5)$$

$$\Delta^*(l) = V^*(l)S^*(l) - U^*(l)W^*(l) \neq 0$$

Собственные значения матрицы коэффициентов при $\delta\gamma^*, \delta\lambda^*$ должны быть величинами одного порядка. Используя найденные явно выражения для добавок $\delta\gamma^*, \delta\lambda^*$ (2.5), получим уточненные значения искомых величин γ, λ :

$$\gamma^{(1)} = \gamma^{(0)} + \delta\gamma^{(0)}, \quad \lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} + \delta\lambda^{(0)}, \quad \gamma^{(0)} = \gamma^*, \quad \lambda^{(0)} = \lambda^*$$

$$|\gamma - \gamma^{(1)}| = O_2^y, \quad |\lambda - \lambda^{(1)}| = O_2^z \quad (2.6)$$

Таким образом, первый шаг итерации выполнен. На его основе посредством соотношений типа (2.1)–(2.6) выполняется следующий, второй шаг, т.е. определяются $\gamma^{(2)}$, $\lambda^{(2)}$ и т.д. Рекуррентная процедура метода касательных на $(n + 1)$ -м шаге сводится к совместному интегрированию задач Коши (2.2) при известных $\gamma = \gamma^{(n)}$, $\lambda = \lambda^{(n)}$ и совместному интегрированию задач Коши (2.1); в результате будут найдены искомые функции $Y^{(n)}(x)$, $Z^{(n)}(x)$ и функции чувствительности $V^{(n)}(x)$, $W^{(n)}(x)$, $U^{(n)}(x)$, $S^{(n)}(x)$. Использование выражения типа (2.3)

$$y(x, \gamma^{(n)}, \lambda^{(n)}) = Y^{(n)}(x) + V^{(n)}(x)\delta\gamma^{(n)} + U^{(n)}(x)\delta\lambda^{(n)} + O_2^y(\delta\gamma^{(n)}, \delta\lambda^{(n)}) \quad (2.7)$$

$$z(x, \gamma^{(n)}, \lambda^{(n)}) = Z^{(n)}(x) + W^{(n)}(x)\delta\gamma^{(n)} + S^{(n)}(x)\delta\lambda^{(n)} + O_2^z(\delta\gamma^{(n)}, \delta\lambda^{(n)})$$

при $x = l$ согласно соотношениям (2.2) приводят к уравнениям относительно $\delta\gamma^{(n)}$, $\delta\lambda^{(n)}$ вида (2.4), разрешая которые с погрешностью $O_2(\delta\gamma^{(n)}, \delta\lambda^{(n)})$, определяем искомые $\delta\gamma^{(n)}$, $\delta\lambda^{(n)}$ и уточненные значения $\gamma^{(n+1)}$, $\lambda^{(n+1)}$

$$\delta\gamma^{(n)} = -\frac{Y^{(n)}(l)S^{(n)}(l) - Z^{(n)}(l)U^{(n)}(l)}{\Delta^{(n)}(l)}$$

$$\delta\lambda^{(n)} = \frac{Y^{(n)}(l)W^{(n)}(l) - Z^{(n)}(l)V^{(n)}(l)}{\Delta^{(n)}(l)}$$

$$\Delta^{(n)}(l) = V^{(n)}(l)S^{(n)}(l) - U^{(n)}(l)W^{(n)}(l) \neq 0 \quad (2.8)$$

$$\gamma^{(n+1)} = \gamma^{(n)} + \delta\gamma^{(n)}, \quad |\gamma - \gamma^{(n+1)}| \leq O_2^{\gamma(n+1)}$$

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} + \delta\lambda^{(n)}, \quad |\lambda - \lambda^{(n+1)}| \leq O_2^{\lambda(n+1)}$$

Подстановка значений (2.8) в выражения (2.7) приводит к решению $(n + 1)$ -го приближения. Как отмечалось, хорошая сходимость процедуры имеет место в регулярном случае; в нерегулярных ситуациях процесс вычислений может расходиться, что часто имеет место в процедурах продолжения по параметру (см. разд. 5). Изложенная схема эквивалентна минимизации квадратичной невязки, например вида

$$E^2(\gamma, \lambda) = Y^2(l, \gamma, \lambda) + Z^2(l, \gamma, \lambda) \rightarrow \min_{\gamma, \lambda}, \quad \gamma \in \Gamma, \quad \lambda \in \Lambda \quad (2.9)$$

Отсутствие анализа невязки по l не позволяет уверенно судить о качестве вычислительного процесса и его сходимости (см. пример в разд. 5). Следует также отметить, что процесс вычислений и оценка точности значительно затрудняются вследствие многомерности рассматриваемой задачи: требуется интегрировать систему девятого порядка для $Y, Y', Z; V, V', W; U, U', S$. При этом приходится решать систему двух уравнений относительно γ, λ , определяемых численно, как правило, с разной точностью. В качестве конструктивного подхода к вычислению высокоточного значения γ^0, λ^0 следует воспользоваться численно-графическим методом на основе построения функций $\gamma(\lambda)$ и $\lambda(\gamma)$ в некоторой окрестности известной точки γ^*, λ^* , причем эти функции могут быть как однозначными, так и неоднозначными (см. ниже, разд. 3, 4). Каждая кривая строится отдельно на основе решения одномерных краевых задач с помощью быстро сходящегося метода ускоренной сходимости и процедуры продолжения по параметру. В малой окрестности точки пересечения кривых может быть применена аппроксимация высокого порядка. После уточнения значений γ, λ алгоритм вычислений продолжается рекуррентно. Для уверенного суждения о существовании решения краевой задачи необходимо определять и использовать невязку по абсциссе x . В практических расчетах такой подход в итоге оказывается эффективным [14, 15].

Стандартная плохо сходящаяся процедура типа метода Ньютона (2.1)–(2.9) может быть модифицирована с учетом невязок решений $Y^{(n)}(x)$, $Z^{(n)}(x)$ в (2.7) по абсциссе x . Введем эти невязки аналогично скалярному случаю [14]

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(n)} &= 1 - \frac{\xi^{(n)}}{l}, \quad \xi^{(n)} = \arg \min_{\xi_i^{(n)}} |1 - \xi_i^{(n)}| \\ \xi_i^{(n)} &= \text{Arg}_x Y^{(n)}(x), \quad |\varepsilon^*| \ll 1 \\ \mu^{(n)} &= 1 - \frac{\eta^{(n)}}{l}, \quad \eta^{(n)} = \arg \min_{\eta_i^{(n)}} |1 - \eta_i^{(n)}| \\ \eta_i^{(n)} &= \text{Arg}_x Z(x), \quad |\mu^*| \ll 1\end{aligned}\tag{2.10}$$

В линейном приближении по $\varepsilon^{(n)}$, $\mu^{(n)}$ выражения для поправок $\delta\gamma^{(n)}$, $\delta\lambda^{(n)}$ преобразуются к виду

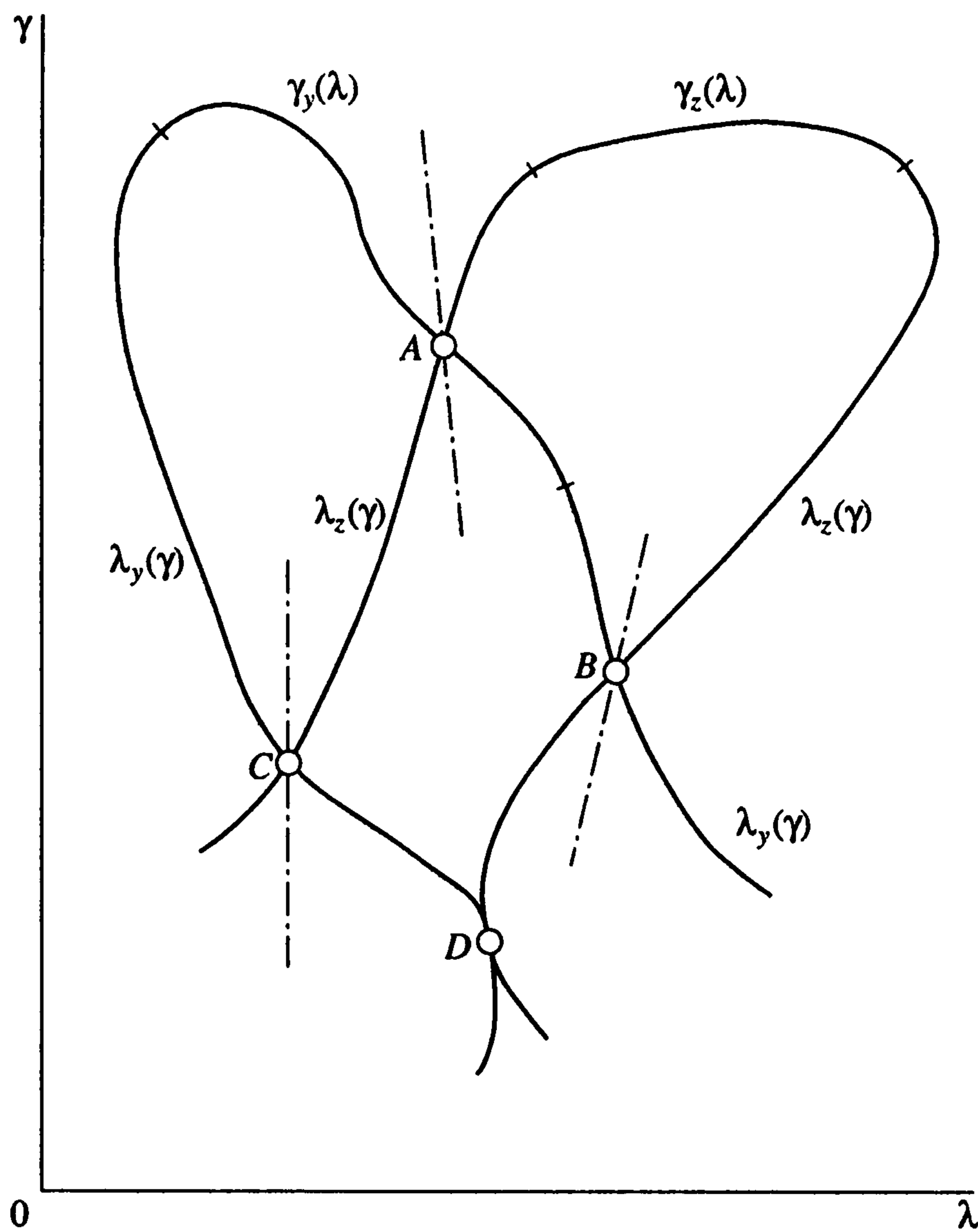
$$\begin{aligned}\delta\gamma^{(n)} &= -\frac{\varepsilon^{(n)}Y'^{(n)}(l)S^{(n)}(l) - \mu^{(n)}Z'^{(n)}(l)U^{(n)}(l)}{\Delta^{(n)}(l)} \\ \delta\lambda^{(n)} &= \frac{\varepsilon^{(n)}Y'^{(n)}(l)W^{(n)}(l) - \mu^{(n)}Z'^{(n)}(l)V^{(n)}(l)}{\Delta^{(n)}(l)} \\ \varepsilon^{(n+1)} &\sim (\varepsilon^{(n)})^2, \quad \mu^{(n+1)} \sim (\mu^{(n)})^2\end{aligned}\tag{2.11}$$

Выполнение операций (2.10) по определению невязок $\varepsilon^{(n)}$, $\mu^{(n)}$ позволяет более уверенно судить о существовании искомого решения $y(x)$, $z(x)$ вблизи $Y^{(n)}(x)$, $Z^{(n)}(x)$, а удовлетворение оценок (2.11) для $\varepsilon^{(n+1)}$, $\mu^{(n+1)}$ – о реальной скорости сходимости процесса к решению. Нарушение этих оценок свидетельствует о расхождении итерационной процедуры; при этом, однако, она может сходиться к другому решению (бифуркация).

3. Метод ускоренной сходимости на основе невязки по абсциссе. Во избежание расхождений изложенной в разд. 2 стандартной процедуры совместного определения искомых параметров γ , λ применим численно-аналитический подход на основе графических представлений. Он предполагает высокоточное построение кривых $\gamma(\lambda)$ и $\lambda(\gamma)$ посредством метода ускоренной сходимости, использующего невязку решений краевой задачи по абсциссе [14]. На начальном этапе каким-либо способом устанавливается факт существования решения краевой задачи (1.2) или (2.2) и оцениваются области (например, отрезки) значений параметров $\gamma \in \Gamma$, $\lambda \in \Lambda$, для которых это решение имеет место. Затем строятся функции $\gamma = \gamma(\lambda)$ и $\lambda = \lambda(\gamma)$ для соответствующих областей изменений аргументов (см. фиг. 3).

Изложим сперва схему построения функции $\gamma(\lambda)$ с требуемой сколь угодно высокой точностью для всех $\lambda \in \Lambda$, в частности $\lambda_0 = \lambda^*$, где λ^* – оценка λ , указанная в разд. 2. Построим решение краевой задачи для y (2.2) при фиксированном значении $\lambda = \lambda_0$ с помощью быстро сходящегося метода ускоренной сходимости [14]

$$\begin{aligned}\gamma^{(n+1)} &= \gamma^{(n)} + \varepsilon^{(n)}lK_0^{(n)}, \quad \varepsilon^{(n)} = 1 - \frac{\xi^{(n)}}{l} \\ \xi^{(n)} &= \xi^{(n)}(\lambda_0) = \arg_x Y(x, \gamma^{(n)}, \lambda_0) \\ K_0^{(n)} &= -\frac{Y'(\xi^{(n)}, \gamma^{(n)}, \lambda_0)}{V(\xi^{(n)}, \gamma^{(n)}, \lambda_0)} = -\frac{Y'(l, \gamma^{(n)}, \lambda_0)}{V(l, \gamma^{(n)}, \lambda_0)} + O(\varepsilon^{(n)}), \quad V(l, \gamma^*, \lambda_0) \neq 0 \\ \gamma^{(0)} &= \gamma^*, \quad \xi^{(0)}(\lambda_0) = \arg_x Y(x, \gamma^*, \lambda_0) \\ \varepsilon^{(0)}(\lambda_0) &= \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll 1; \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \varepsilon^{(n)} &\leq d(\varepsilon^{(n-1)})^2 \leq \dots \leq d^{-1}(d\varepsilon)^{\theta(n)}, \quad \theta(n) = 2^n, \quad d(\lambda_0) = \text{const}\end{aligned}\tag{3.1}$$



Фиг. 3

Искомое решение y, y' определяется с погрешностью $O(\epsilon^{(n+1)})$ на основе функций $Y(x, \gamma^{(n)}, \lambda_0)$, $Y' = dY/dx$. Как показывают вычислительная практика и теоретическая оценка точности, процедура решения (3.1) одномерной краевой задачи (2.2) для y при фиксированном значении $\lambda = \lambda_0$ ($\delta\lambda = 0$) и удачном выборе оценки γ^* ($\epsilon d \sim 0.1$) позволяет за две-три итерации получать искомые величины с относительной погрешностью порядка $10^{-4} - 10^{-8}$, достаточной для приложений. Увеличение числа итераций обычно не имеет смысла вследствие накопления ошибок округления. Выражение для добавки в $\gamma^{(n+1)}$ (3.1) может быть представлено через невязку по y , как в стандартном подходе метода Ньютона (см. разд. 2). При этом не требуется выполнения операции определения абсциссы $\xi^{(n)}(\lambda_0)$ с относительной погрешностью $O(\epsilon^{(n)2}) = O(\epsilon^{(n+1)})$. Однако при решении сложных нелинейных задач для уверенного суждения о существовании решения и анализа поведения невязки по абсциссе выполнение этой операции представляется полезным и важным [14].

Далее посредством процедуры продолжения по параметру λ берется достаточно близкое значение $\lambda = \lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda_1$, а в качестве начального приближения $\gamma^{(0)}(\lambda_1) = \gamma^{(n)}(\lambda_0) \approx \gamma(\lambda_0)$. Искомое решение с требуемой точностью строится посредством рекуррентного алгоритма (3.1): $\gamma^{(n)}(\lambda_1) \approx \gamma(\lambda_1)$ и т.д. На последующих шагах по параметру λ для ускорения сходимости процесса можно воспользоваться экстраполяцией (линейной, квадратичной, кубической) начального приближения $\gamma^{(0)}(\lambda_i)$, $\lambda_i \in \Lambda$ ($i = 0, 1, \dots$). Таким образом, кривая $\gamma_y(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, будет построена с требуемой точностью из решения краевой задачи (2.2) для y .

Отметим, что согласно соотношениям (3.1) должен быть отличен от нуля коэффициент чувствительности $V(x, \gamma, \lambda)$ решения $Y(x, \gamma, \lambda)$ в малой ε -окрестности точки $x = l$ для рассматриваемых значений $\gamma \in \Gamma$ и $\lambda \in \Lambda$. Это приводит к однозначности и гладкости функций $\gamma_y(\lambda)$. В противном случае, т.е. в области, где $V \approx 0$, строится обратная функция $\lambda_y(\gamma)$ (см. изложенное ниже и фиг. 3).

С помощью аналогичного рекуррентного алгоритма определяется кривая $\lambda = \lambda_z(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, в результате решения краевой задачи для Z (2.2) при фиксированных значениях параметра γ . Как и выше, задается некоторое значение γ_0 , в частности $\gamma_0 = \gamma^* \in \Gamma$, где γ^* – оценка $\Delta\gamma = 0$ (см. разд. 2). Посредством быстро сходящегося метода ускоренной сходимости аналогично строится искомое решение с требуемой точностью

$$\begin{aligned}\lambda^{(m+1)} &= \lambda^{(m)} + \mu^{(m)} l \Gamma_0^{(m)}, \quad \mu^{(m)} = 1 - \frac{\zeta^{(m)}}{l} \\ \zeta^{(m)} &= \zeta^{(m)}(\gamma_0) = \arg_x Z(x, \gamma_0, \lambda^{(m)}) \\ \Gamma_0^{(m)}(\gamma_0) &= - \frac{N(\zeta^{(m)}, Y(\zeta^{(m)}, \gamma_0, \lambda^{(m)}), Y'(\zeta^{(m)}, \gamma_0, \lambda^{(m)}))}{S(\zeta^{(m)}, \gamma_0, \lambda^{(m)})} = \\ &= - \frac{N(l, Y(l, \gamma_0, \lambda^{(m)}), Y'(l, Y(l, \gamma_0, \lambda^{(m)})))}{S(l, \gamma_0, \lambda^{(m)})} + O(\mu^{(m)2})\end{aligned}\quad (3.2)$$

$$S(l, \gamma_0, \lambda^*) \neq 0, \quad Z' = N$$

$$\lambda^{(0)} = \lambda^*, \quad \zeta^{(0)}(\gamma_0) = \arg_x Z(x, \gamma_0, \lambda^*)$$

$$\mu^{(0)}(\lambda_0) = \mu, \quad |\mu| \ll 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\mu^{(m)} \leq h(\mu^{(m-1)})^2 \leq \dots \leq h^{-1}(h\mu)^{\theta(m)}, \quad \theta(m) = 2^m, \quad h(\gamma_0) = \text{const}$$

Решение краевой задачи для $z(2.2)$ определяется с погрешностью $O(\mu^{(m+1)})$ по ординате и абсциссе. Близость $Y(x, \gamma_0, \lambda^{(m)})$ к решению краевой задачи определяется величиной ε , т.е. близостью γ_0 к точному значению. Сходимость процедуры (3.2), аналогично (3.1), имеет квадратичный характер по отношению к параметру μ (точнее, μh). Отметим также, что выражение для добавки в $\lambda^{(m+1)}$ (3.2) может быть представлено через невязку по Z (см. выше). Однако при этом будут отсутствовать контроль невязки по абсциссе и факт выполнения граничного условия.

Далее аналогично вышеизложенному используется процедура продолжения по параметру $\gamma = \gamma_1 = \gamma_0 + \Delta\gamma_1$, где величина $\Delta\gamma_1$ достаточно мала, а в качестве начального приближения берется $\lambda^{(0)}(\gamma_1) = \lambda^{(m)}(\gamma_0)$, и т.д. Аргумент $\gamma \in \Gamma$ принимает последовательно ряд значений $\gamma = \gamma_j$ ($j = 0, 1, \dots$), достаточных для построения кривой $\lambda_z(\gamma)$ с требуемой точностью. Ускорение сходимости процесса и увеличение шага $\delta\gamma_j$ достигаются с помощью экстраполяции соответствующего порядка. В результате будет построена кривая $\lambda_z(\lambda)$, $\gamma \in \Gamma$, с требуемой для дальнейших вычислений точностью. При этом существенно предположение, что коэффициент чувствительности $S(l, \gamma, \lambda)$ решения $Z(x, \gamma, \lambda)$ отделен от нуля в малой μ -окрестности точки $x = l$ для рассматриваемых значений $\gamma \in \Gamma$ и $\lambda \in \Lambda$. Это обеспечивает однозначность и гладкость функции $\lambda_z(\gamma)$; в противном случае строится обратная функция $\gamma_z(\lambda)$ (см. ниже и фиг. 3).

После построения функций $\gamma_y(\lambda)$ и $\lambda_z(\gamma)$ численно или графически находится общая точка (γ^0, λ^0) как точка пересечения этих кривых. Она определяет искомое решение краевой задачи (2.2) и является корнем системы

$$\gamma = \gamma_y(\lambda), \quad \lambda = \lambda_z(\gamma), \quad \gamma^0 = \gamma_y(\lambda_z(\gamma^0)), \quad \lambda^0 = \lambda_z(\gamma^0). \quad (3.3)$$

Эта точка численно находится посредством полиномиальной интерполяции функций $\gamma_y(\lambda_i)$, $\lambda_z(\gamma_j)$ в окрестности точки пересечения (например, линейной интерполяции).

Отметим, что в достаточно малой окрестности искомого корня (γ^0, λ^0) может быть использована рекуррентная процедура перехода с кривой $\gamma = \gamma_y(\lambda)$ из точки $\gamma_i = \gamma_y(\lambda_i)$ на кривую $\lambda = \lambda_z(\gamma)$ в точку $\lambda_{i,1} = \lambda_z(\gamma_y(\lambda_i)) = \lambda_z(\gamma_i)$, а затем вновь на кривую $\gamma = \gamma_y(\lambda)$ в точку $\gamma_{i,1}$; и т.д. (см. окрестность точки A на фиг. 3). Процесс будет сходиться как геометрическая прогрессия к искомой точке с показателем χ , $0 < \chi < 1$, если биссектриса угла (показана на фиг. 3 штрихпунктиром) пересечения кривых $\lambda_z(\gamma)$ и $\gamma_y(\lambda)$ наклонена влево от вертикали (положительный угол) – сходимость типа устойчивый фокус или узел. В противном случае этот процесс не сходится. Если угол отрицателен (неустойчивый фокус или узел, точка B на фиг. 3), то к сходимости итераций приводит обратная процедура: переход с кривой $\lambda = \lambda_z(\gamma)$ из точки $\lambda_j = \lambda_z(\gamma_j)$ на кривую $\gamma = \gamma_y(\lambda)$ в точку $\gamma_{j,1} = \gamma_y(\lambda_z(\gamma_j)) = \gamma_y(\lambda_j)$, а затем вновь на кривую $\lambda = \lambda_z(\gamma)$ в точку $\lambda_{j,1}$ и т.д. В критическом случае нулевого угла (точка или центр) к квадратичной сходимости по малому параметру, характеризующему близость точек (γ_i, λ_j) и $(\gamma_{i+1}, \lambda_{j+1})$ к точке γ^0, λ^0 , может быть применен метод секущих (точка C на фиг. 3). По трем точкам $(\gamma_{i-1}, \lambda_{i-1})$, (γ_i, λ_i) , $(\gamma_{i+1}, \lambda_{i+1})$ можно применить метод парабол. Этот подход применим также в предыдущих случаях сходящегося (для точки A на фиг. 3) или расходящегося (для точки B на фиг. 3) итерационных процессов. Критическая ситуация, когда кривые (3.3) слипаются (точка D на фиг. 3), требует отдельного изучения.

Как отмечалось выше, при построении кривых $\gamma = \gamma_y(\lambda)$ (3.1) и $\lambda = \lambda_z(\gamma)$ (3.2) существенное значение имеет предположение о том, что $V(x, \gamma, \lambda)$ и $S(x, \gamma, \lambda)$ отличны от нуля в некоторой окрестности $x = l$ и $\gamma \in \Gamma$, $\lambda \in \Lambda$. В противном случае соответствующие добавки к $\gamma^{(n)}$ и $\lambda^{(n)}$, вообще говоря, будут не малыми, а кривые – неоднозначными и имеющими неограниченные производные. Тогда на соответствующих участках $\gamma \in \Gamma_0 \subseteq \Gamma$ и $\lambda \in \Lambda_0 \subseteq \Lambda$ имеет смысл построение обратных зависимостей: $\lambda = \lambda_y(\gamma)$ и $\gamma = \gamma_z(\lambda)$ (см. выше).

Рассмотрим ради определенности задачу построения кривой $\lambda = \lambda_y(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma_0$. Согласно соотношениям (2.1)–(2.3) из краевой задачи для u получим при фиксированном значении $\gamma_i \in \Gamma_0$, $\delta\gamma = 0$, рекуррентные соотношения для λ , аналогичные (3.1)

$$\begin{aligned} \lambda^{(n+1)} &= \lambda^{(n)} + \varepsilon^{(n)} \Pi_i^{(n)}, \quad \varepsilon^{(n)} = 1 - \frac{\xi^{(n)}}{l} \\ \xi^{(n)} &= \xi^{(n)}(\gamma_i) = \arg_x Y(x, \gamma_i, \lambda^{(n)}) \\ \Pi_i^{(n)} &= -\frac{Y'(\xi^{(n)}, \gamma_i, \lambda^{(n)})}{U(\xi^{(n)}, \gamma_i, \lambda^{(n)})} = -\frac{Y'(l, \gamma_i, \lambda^{(n)})}{U(l, \gamma_i, \lambda^{(n)})} + O(\varepsilon^{(n)}), \quad U(l, \gamma, \lambda) \neq 0 \\ \lambda^{(0)} &= \lambda^*, \quad \xi^{(0)} = \arg_x Y(x, \gamma, \lambda^{(0)}), \quad \varepsilon^{(0)} = \varepsilon, \quad |\varepsilon| \ll 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Предположение, что коэффициент чувствительности $U = \partial Y / \partial \lambda \neq 0$ при $x = l$ вполне естественно. В противном случае вытекает локальная независимость решения краевой задачи (2.2) для u от параметров γ и λ , что является крайне вырожденной ситуацией. Таким образом, согласно соотношениям (3.4) будет построена кривая $\lambda = \lambda_y(\gamma)$ (или часть кривой, примыкающей к части кривой $\gamma = \gamma_y(\lambda)$), которая совместно с кривой $\lambda = \lambda_z(\gamma)$ определяет искомую точку (γ^0, λ^0) , см. выше.

Приведем также кратко алгоритм построения кривой (или части кривой) $\gamma = \gamma_z(\lambda)$ для случая, когда величина $S(x, \gamma, \lambda)$ мала в рассматриваемой окрестности $x = l$, $\lambda_j \in \Lambda_0$. Согласно соотношениям (2.1)–(2.3) из краевой задачи для z получим при фиксированном λ_j , $\delta\lambda = 0$, рекуррентные соотношения для γ , аналогичные (3.2),

$$\begin{aligned}
\gamma^{(m+1)} &= \gamma^{(m)} + \mu^{(m)} l D_0^{(m)}, \quad \mu^{(m)} = 1 - \frac{\zeta^{(m)}}{l} \\
\zeta^{(m)} &= \zeta^{(m)}(\lambda_j) = \arg_x Z(x, \gamma^{(m)}, \lambda_j) \\
D_j^{(m)} &= -\frac{Z(\zeta^{(m)}, \gamma^{(m)}, \lambda_j)}{W(\zeta^{(m)}, \gamma^{(m)}, \lambda_j)} = -\frac{Z(l, \gamma^{(m)}, \lambda_j)}{W(l, \gamma^{(m)}, \lambda_j)} + O(\mu^{(m)}) \\
W(l, \gamma, \lambda_j) &\neq 0, \quad \gamma^{(0)} = \gamma^*, \quad \mu^{(0)} = \mu, \quad |\mu| \leq 1, \quad \zeta^{(0)} = \arg_x Z(x, \gamma^*, \lambda_j)
\end{aligned}
\tag{3.5}$$

Напомним, что согласно соотношениям (2.2) производная $Z' = N$. В результате посредством алгоритма (3.5) и процедуры продолжения по параметру $\lambda = \lambda_j \in \Lambda_0$ будет построена искомая кривая $\lambda = \gamma_z(\lambda)$, которая совместно с кривой $\gamma = \gamma_y(\lambda)$ определяет искомую точку (γ^0, λ^0) . Предположение $W \neq 0$ в рассматриваемой окрестности значений x, γ, λ естественно, так как в противном случае также имеет место крайне вырожденная ситуация: решение краевой задачи для Z окажется локально не зависящим от параметров γ и λ .

Как указывалось ранее, эти алгоритмы могут быть преобразованы к стандартной форме (см. разд. 2), не требующей определения невязок решений задач Коши для Y, Z по x . Однако такой подход не обеспечивает сходимости вычислительного процесса при решении существенно нелинейных краевых задач из-за различного характера поведения переменных y, z и точности их вычислений. Учет невязки по абсциссе позволяет стабилизировать процесс вычислений и проводить соответствующий контроль выполнения краевых условий; он практически не замедляет этот процесс.

4. Модификация метода ускоренной сходимости.

Другие краевые условия. Для решения прикладных задач значительный интерес представляют другие типы граничных условий. Например, на одном из концов или на обоих для переменной y должны выполняться условия "второго рода": $y'(0) = 0$ или (и) $y'(l) = 0$, см. (1.1). Изложим сперва алгоритм метода ускоренной сходимости для случая $y'(0) = 0, y(l) = 0$. Тогда в соотношениях (2.1) условия для новой функции чувствительности $v = \partial y / \partial \theta$ имеют вид $v(0) = 1, v'(0) = 0$; здесь введен параметр $\theta \in \Theta$, подлежащий определению из краевой задачи для y (2.2) с условиями $y(0) = \theta, y'(0) = 0$. Функция чувствительности $w = \partial Z / \partial \theta$, а остальные имеют прежнее определение. В соотношениях (2.3)–(2.8) делаются переобозначения $\gamma \rightarrow \theta, \Delta \gamma \rightarrow \Delta \theta$.

Алгоритмы построения кривых $\theta = \theta_y(\lambda), \lambda = \lambda_z(\theta)$ или (и) $\lambda = \lambda_y(\theta), \theta = \theta_z(\lambda)$ имеют вид (3.1), (3.2) или (и) (3.4), (3.5) с указанными выше переобозначениями: $\gamma \rightarrow \theta \in \Theta$ (или (и) $\theta \in \Theta_0 \subseteq \Theta$), $\Delta \gamma_j \rightarrow \Delta \theta_j$ (или (и) $\Delta \gamma_i \rightarrow \Delta \theta_i$). Таким образом, существенное отличие в решении краевой задачи заключается в изменении начальных данных при интегрировании задачи Коши для Y, V^* .

Случай граничных условий вида $y(0) = y'(l) = 0$ сводится к рассмотренному посредством введения нового аргумента $\chi = l - x$ и переобозначению функций F и N в соотношениях (1.1), (1.2) и далее.

Если же на обоих концах требуется выполнение условий $y'(0) = y'(l) = 0$, то алгоритмы, представленные в разд. 2, 3, должны быть модифицированы. Как и выше, вместо γ вводится неизвестный параметр θ , а краевое условие для его определения принимает вид $y'(l, \theta, \lambda) = 0$. В стандартном алгоритме (2.3)–(2.9) осуществляются преобразования: $V \rightarrow V', U \rightarrow U'$. Алгоритмы (3.1), (3.2), (3.4) (3.5) построения кривых $\theta_{y,z}(\lambda)$ и $\lambda_{z,y}(\theta)$ модифицируются следующим образом:

$$K_i^{(n)} = -\frac{Y''(\xi^{(n)}, \theta^{(n)}, \lambda_i)}{V'(\xi^{(n)}, \theta^{(n)}, \lambda_i)}, \quad \xi^{(n)}(\lambda_i) = \arg_x Y'(x, \theta^{(n)}, \lambda_i)$$

$$\Gamma_j^{(m)} = -\frac{Z'(\zeta^{(m)}, \theta_j, \lambda^{(m)})}{S(\zeta^{(m)}, \theta_j, \lambda^{(m)})}, \quad \zeta^{(m)}(\theta_j) = \arg_x Z(x, \theta_j, \lambda^{(m)}) \quad (4.1)$$

$$\Pi_i^{(n)} = -\frac{Y''(\xi^{(n)}, \theta_i, \lambda^{(n)})}{U'(\xi^{(n)}, \theta_i, \lambda^{(n)})}, \quad \xi^{(n)}(\theta_i) = \arg_x Y'(x, \theta_i, \lambda^{(n)})$$

$$D_j^{(m)} = -\frac{Z'(\zeta^{(m)}, \theta^{(m)}, \lambda_j)}{W(\zeta^{(m)}, \theta^{(m)}, \lambda_j)}, \quad \zeta^{(m)}(\lambda_j) = \arg_x Z(x, \theta^{(m)}, \lambda_j)$$

Таким образом, согласно алгоритмам (4.1) основное отличие заключается в определении невязок по x и определении коэффициентов добавок. Кроме того, по-другому ставится задача Коши для Y, V .

Отметим, что алгоритмы могут быть модифицированы в случае более общих граничных условий "третьего рода"

$$[\alpha(x)y + \beta(x)y']_{x=0,l} = 0, \quad [\alpha^2 + \beta^2]_{x=0,l} \neq 0 \quad (4.2)$$

Соответствующие выражения становятся весьма громоздкими и по этой причине не приводятся.

Для приложений может представлять интерес случай нелинейных граничных условий, обобщающих соотношения (4.2),

$$\varphi(x, y, y')|_{x=0,l} = 0, \quad [\varphi_y'^2 + \varphi_{y'}'^2]_{x=0,l} \neq 0 \quad (4.3)$$

Алгоритмы решения краевой задачи (1.2) с условиями (4.3) могут быть также модифицированы соответствующим образом и представлены в форме рекуррентных вычислительных процедур. Их общий вид, однако, содержит весьма громоздкие выражения, которые имеет смысл приводить в конкретных случаях рассматриваемых функций F, N, φ .

Сочетание метода ускоренной сходимости и метода штрафов. Для массовых прикладных расчетов после проведения исследований согласно разд. 3 может оказаться целесообразным использование метода штрафов в сочетании с методом ускоренной сходимости на основе вычисления и анализа невязки по абсциссе. Вместо строгого удовлетворения граничным условиям по переменным Y и Z на каждом шаге итерации минимизируется величина невязки по методу штрафов [3–5], например в виде

$$\Xi^2(x) = c_Y^2 Y^2(x, \gamma, \lambda) + c_Z^2 Z^2(x, \gamma, \lambda) \rightarrow \min_x \quad (4.4)$$

Здесь c_Y^2, c_Z^2 – весовые коэффициенты, подлежащие выбору.

Проанализируем поведение величины Ξ^2 вблизи значений $x = l$ и γ, λ , близких к искомым γ^0, λ^0 . Отметим, что при $\gamma = \gamma^0, \lambda = \lambda^0$ абсолютный минимум достигается при $x = l$. Для переменных Y, Z справедливы тогда приближенные представления

$$Y(x) \approx Y(l) + Y'(l)(x - l), \quad Z(x) \approx Z(l) + Z'(l)(x - l) \quad (4.5)$$

Здесь и далее зависимость от параметров γ, λ не указывается ради сокращения записи.

Подставим выражения (4.5) в (4.4) и проведем элементарную операцию минимизации функции $\Xi^2(x)$ по x . Для оптимального значения $x = \eta$ получим соотношения

$$\begin{aligned} \eta - l &= -d^{-1}(c_Y^2 Y(l)Y'(l) + c_Z^2 Z(l)Z'(l)) \\ \Xi^2(\eta) &= E_Y^2(\eta) + E_Z^2(\eta) = c_Y^2 c_Z^2 d^{-1} G^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$d = c_Y^2 Y'^2(l) + c_Z^2 Z'^2(l), \quad G = Y(l)Z'(l) - Y'(l)Z(l)$$

$$E_Y^2 = c_Y^2 c_Z^4 Z'^2(l) d^{-2} G^2, \quad E_Z^2 = c_Z^2 c_Y^4 Y'^2(l) d^{-2} G^2$$

Весовые коэффициенты $c_{Y,Z}^2$ могут быть выбраны с учетом относительной важности для решения краевой задачи удовлетворения граничным условиям по y (решение исходной краевой задачи) и по Z (выполнений изопериметрических условий). Пусть взято отношение этих невязок в виде $v^2 = E_Y^2 / E_Z^2$; тогда из (4.6) следуют выражения

$$c_Y^2 = \frac{v^2}{Y'^2(l)} \approx \frac{\epsilon^2 l^2 v^2}{Y^2(l)}, \quad Y(l) \neq 0$$

$$c_Z^2 = \frac{1}{Z'^2(l)} \approx \frac{\mu^2 l^2}{Z^2(l)}, \quad Z(l) \neq 0$$
(4.7)

причем параметры ϵ и μ определены согласно соотношениям (3.1) и (3.2). Коэффициенты c_Y^2 и c_Z^2 могут уточняться на каждом шаге итерации соответствующего рекуррентного алгоритма ускоренной сходимости.

Опишем этот алгоритм; он строится с помощью функций чувствительности $q = \partial y / \partial l$ и $r = \partial z / \partial l$ посредством соотношений

$$q = \gamma'v + \lambda'u, \quad r = \gamma'w + \lambda's, \quad \gamma = \gamma(l), \quad \lambda = \lambda(l)$$

$$q(l) = -y'(l), \quad r(l) = -z'(l) = -N(l, 0, y'(l))$$
(4.8)

Штрихами обозначены производные по l . Уточнение искомых параметров $\gamma(l)$ и $\lambda(l)$ производится последовательными приближениями по схеме

$$\gamma^{(n+1)} = \gamma^{(n)} + \delta^{(n)} l K^{(n)}, \quad K^{(n)} = -\frac{Y'_{(n)}(l)S_{(n)}(l) - Z'_{(n)}(l)U_{(n)}(l)}{\Delta_{(n)}(l)}$$

$$\lambda^{(n+1)} = \lambda^{(n)} + \delta^{(n)} l \Gamma^{(n)}, \quad \Gamma^{(n)} = \frac{Y'_{(n)}(l)W_{(n)}(l) - Z'_{(n)}(l)V_{(n)}(l)}{\Delta_{(n)}(l)}$$
(4.9)

$$\delta^{(n)} = 1 - \frac{\eta^{(n)}}{l}, \quad \eta^{(n)} = \arg_x [c_Y^2 Y_{(n)}(x) Y'_{(n)}(x) + c_Z^2 Z_{(n)}(x) Z'_{(n)}(x)]$$

$$\frac{d^2 E^2}{d\eta^{(n)2}} \neq 0$$

Определитель $\Delta_{(n)}$ имеет вид (2.8); он вычисляется на основе значений коэффициентов чувствительности в соотношениях (4.8). Функции $Y_{(n)}(x)$, $Z_{(n)}(x)$, $V_{(n)}(x)$, $U_{(n)}(x)$, $W_{(n)}(x)$, $S_{(n)}(x)$ зависят также от параметров $\gamma^{(n)}$, $\lambda^{(n)}$, вычисленных на предыдущем шаге итераций. Эта зависимость не указывается ради сокращения записи.

Следует отметить, что алгоритм (4.9) обладает ускоренной сходимостью для критерия E^2 по отношению к исходному малому параметру $\delta = \delta(\gamma^*, \lambda^*)$

$$\delta^{(n)} \leq \alpha (\delta^{(n-1)})^2 \leq \dots \leq \alpha^{-1} (\alpha \delta)^{\theta(n)}, \quad \theta(n) = 2^n$$

$$\eta^*(\gamma^*, \lambda^*) = \arg_x [c_Y^2 Y(x, \gamma^*, \lambda^*) Y'(x, \gamma^*, \lambda^*) + c_Z^2 Z(x, \gamma^*, \lambda^*) Z'(x, \gamma^*, \lambda^*)]$$

$$\delta = 1 - \eta / l, \quad |\delta| \leq 1, \quad \alpha = \text{const}$$
(4.10)

Считается, что η – простой корень уравнения $E^{2'} = 0$. Аналогичный (4.9), (4.10) алгоритм может быть предложен также для более общих граничных условий (4.2), (4.3). При этом соответствующим образом изменяется критерий E^2 , характеризующий невязку в граничных условиях.

Принципиальное отличие предлагаемого алгоритма (4.4)–(4.10) заключается в минимизации невязки $E^2(x)$ по x при известных приближенных значениях параметров γ, λ с последующим их уточнением. В стандартном алгоритме (см. разд. 2 и (2.9)) происходит минимизация $E^2(\gamma, \lambda)$ по γ, λ при фиксированном значении $x = l$; на основе этой минимизации происходит уточнение γ, λ , что, как известно, может приводить к расходимости рекуррентной процедуры вследствие "овражных эффектов".

5. Расчет стационарного течения несжимаемой вязкой жидкости в плоском кон-фузоре (задача Джефффри–Гамеля). Переходя к нормированному аргументу x и функции $y(x)$, приведем соответствующие [15] уравнения нелинейной краевой задачи для профиля скорости и условия постоянства расхода жидкости к виду [16]

$$y'' + a^2 y - by^2 = \lambda, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad a = 4\beta, \quad b = 2\beta \text{Re} \quad (5.1)$$

$$z' = y - 1, \quad z(0) = z(1) = 0, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad \text{Re} > 0, \quad p = (\lambda - a^2 y)/(a^2 b)$$

Здесь 2β – угол раствора, Re – число Рейнольдса; p – профиль давления. Произвольная постоянная λ имеет смысл множителя Лагранжа для соответствующей (5.1) изопериметрической вариационной задачи вида (1.1) с функциями

$$F = \frac{1}{2} \left(y'^2 - a^2 y^2 + \frac{2}{3} by^3 \right), \quad N = y - 1 \quad (5.2)$$

Задача (5.1) при $\text{Re} = 0$ механического содержания не имеет; однако ее решение полезно как начальное приближение в процедуре метода возмущений для достаточно малых значений $\text{Re} > 0$ с последующим продолжением по параметру Re при фиксированном значении a [16]. Случай $a = 0$ отвечает течению Пуазейля [15]; при $a \ll 1$ и $\text{Re} \sim 1$ приближенное решение строится разложениями по параметру a . В случае $b \gg 1$ может быть построено [15] асимптотическое первое приближение $y^{(1)}(x)$, из которого следует, что $\gamma^{(1)} = y^{(1)'}(0) = \sqrt{4b/3}$, $\lambda^{(1)}(0) = y^{(1)''}(0) = -b$ [16]. Решение задачи (5.1) используется как порождающее при исследовании более сложных процессов: тепломассопереноса, вязкопластических течений и др.

Для приложений значительный интерес представляют течения с умеренно большими значениями числа Re для сравнительно малых величин угла раствора 2β , что требует привлечения вычислительных алгоритмов. Для практически важных значений $\text{Re} \sim 0.1-10^3$, $\beta \sim 0.1$, в частности $\beta^\circ = 5^\circ-10^\circ$, необходима разработка эффективных численно-аналитических подходов к решению задачи (5.1). Разработанный в разд. 2–4 модифицированный метод ускоренной сходимости типа метода Ньютона в сочетании с процедурой продолжения по параметрам позволяет за одну-две итерации посредством относительно небольших вычислительных затрат получать высокоточные значения искомых величин. В результате получается практически точное решение с относительной погрешностью $10^{-5}-10^{-7}$, которая может быть при необходимости уменьшена. Алгоритм метода заключается в вычислении недостающих значений $\gamma = y'(0)$ и $\lambda = y''(0)$, определяющих функций $y(x)$, $z(x)$ как решение задачи Коши (5.1) для фиксированных a, b , т.е. β, Re .

1°. Сперва рассматривается простейший (классический) случай одномодового симметричного относительно $\theta = 0$ ($x = 1/2$) течения [15]. На начальном этапе алгоритма предполагаются известными достаточно точные оценки γ_0, λ_0 указанных величин γ, λ . Они могут быть найдены с помощью вариационного подхода на основе функционалов (1.1), (5.2) и удачно подобранной пробной функции $y^*(x)$ [14, 16]. Как показывают расчеты, функция $y(x, a, b)$ имеет довольно простой вид. Весьма удобна процедура продолжения по параметрам β, Re (или a, b). В частности, для фиксированного значения $a = 4\beta > 0$ предлагается взять величины

$$\gamma_0 = 8\beta^2 l \sin 2\beta, \quad \lambda_0 = -32\beta^3 l \cos 2\beta$$

как начальные приближения $\gamma_0(b_1)$, $\lambda_0(b_1)$ при $b_1 > 0$ достаточно малом. Посредством рекуррентного алгоритма ускоренной сходимости (см. разд. 2, 3) с требуемой точностью определяются $\gamma_1 = \gamma(b_1)$, $\lambda_1 = \lambda(b_1)$, которые принимаются в качестве начальных приближений $\gamma_0(b_2)$, $\lambda_0(b_2)$ и т.д. Наличие множеств $\{\gamma_k\}$, $\{\lambda_k\}$ достаточно точных значений γ_k , λ_k ($k = 1, 2, \dots$) позволяет увеличить интервал $\delta b_{k+1} = b_{k+1} - b_k$ посредством полиномиальной (обычно линейной или квадратичной) экстраполяции начальных приближений $\gamma_0(b_{k+1})$, $\lambda_0(b_{k+1})$.

Итерационный алгоритм уточнения искомых величин $\gamma(b)$, $\lambda(b)$ на первом и последующих шагах заключается в интегрировании двух задач Коши для систем шестого порядка или одной – девятого. Эти задачи описываются общими уравнениями для y, z (5.1) с условиями

$$y(0) = z(0) = 0, \quad y'(0) = \gamma_n(b), \quad \lambda = \lambda_n(b), \quad n = 0, 1, \dots, \quad b \in \{b_k\} \quad (5.3)$$

и уравнениями для функций чувствительности v, w и u, s , т.е. производных решения $y(x)$, $z(x)$ по γ и по λ соответственно

$$v'' + a^2 v - 2byv = 0, \quad w' = v, \quad v(0) = w(0) = 0, \quad v(1) = 1 \quad (5.4)$$

$$u'' + a^2 u - 2byu = 1, \quad s' = u, \quad u(0) = u'(0) = s(0) = 0$$

Задачи Коши (5.1), (5.3) и (5.4) интегрируются совместно или порознь и определяются функции $y_n(x)$, $z_n(x)$. Для уточнения величин $\gamma_n(b)$, $\lambda_n(b)$, требуется знание функций $y_n, z_n, v_n, w_n, u_n, s_n$ в конечной точке $x = 1$ при $b \in \{b_k\}$. Стандартная схема метода Ньютона имеет вид (см. разд. 2)

$$\gamma_{n+1}(b) = \gamma_n(b) + \delta\gamma_n(b), \quad \lambda_{n+1}(b) = \lambda_n(b) + \delta\lambda_n(b)$$

$$\delta\gamma_n = -[y_n(1)s_n(1) - z_n(1)u_n(1)]\Delta_n^{-1}(1) \quad (5.5)$$

$$\delta\lambda_n = [y_n(1)w_n(1) - z_n(1)v_n(1)]\Delta_n^{-1}(1); \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\Delta_n(x) = v_n(x)s_n(x) - u_n(x)w_n(x), \quad \Delta_n(1) \neq 0$$

Рекуррентный процесс по n (5.5) продолжается до достижения требуемой точности, т.е. достаточной малости невязок $y_n(1)$, $z_n(1)$. Сходимость алгоритма требует обстоятельной проверки на каждом шаге и связана с величинами указанных невязок и определителя $\Delta_n(1)$ матрицы коэффициентов чувствительности. Специфической особенностью предложенной модификации метода ускоренной сходимости является дополнительная проверка сходимости процесса по абсциссам ξ_n , η_n , т.е. по величинам $|\epsilon_n|$, $|\mu_n|$

$$\epsilon_n = 1 - \xi_n, \quad \mu_n = 1 - \eta_n; \quad \xi_n = \arg y_n(x), \quad \eta_n = \arg z_n(x) \quad (5.6)$$

Значения ξ_n , η_n (5.6) представляют собой ближайшие к $x = 1$ корни (нули) функций $y_n(x)$, $z_n(x)$. Конструктивно проверяемые условия $|\epsilon_0|$, $|\mu_0| \ll 1$, $|\epsilon_n|$, $|\mu_n| \rightarrow 0$ свидетельствуют о существовании искомого решения краевой задачи (5.1) и о сходимости алгоритма (5.1), (5.3)–(5.5), имеющей ускоренный (квадратичный) характер, при этом для величин ϵ_n , μ_n (5.6) справедливы оценки

$$|\epsilon_{n+1}| \sim \epsilon_n^2, \quad |\mu_{n+1}| \sim \mu_n^2, \quad y_n(1) = -\gamma_n \epsilon_n, \quad z_n(1) = -\mu_n; \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.7)$$

Сходимость определяется малостью модуля величин $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, т.е. близостью к $x = 1$ абсцисс ξ_0 , η_0 , что обеспечивается удачным выбором начального приближения $\gamma_0(b)$, $\lambda_0(b)$, $b \in \{b_k\}$ и посредством величины шага δb_k или экстраполяцией. Кроме

того, требуется выполнение условия $|\Delta_n(1)| \geq \text{const} > 0$ (см. (5.5)). Заметное нарушение характера оценок (5.6), (5.7) требует дополнительного анализа, обычно связанного со свойством вырождения стандартного алгоритма (5.5): $\Delta_n(1) \approx 0$ (например, при $\beta \rightarrow \pi/2$, или $a \rightarrow 2\pi$). Совместное определение невязок $y_n(1)$, $z_n(1)$ и ϵ_n , μ_n позволяет проводить эффективные высокоточные вычисления искомых параметров $\gamma(b)$, $\lambda(b)$ для произвольного фиксированного значения a , т.е. $0 < \beta < \pi/2$. Аналогично реализуется процедура продолжения по параметру a , $a \in \{a_j\}$. При необходимости могут быть построены зависимости $\gamma(a, b)$, $\lambda(a, b)$ продолжением по параметрам a, b ($0 < \beta < \pi$, $0 \leq \text{Re} \leq \text{Re}^* < \infty$).

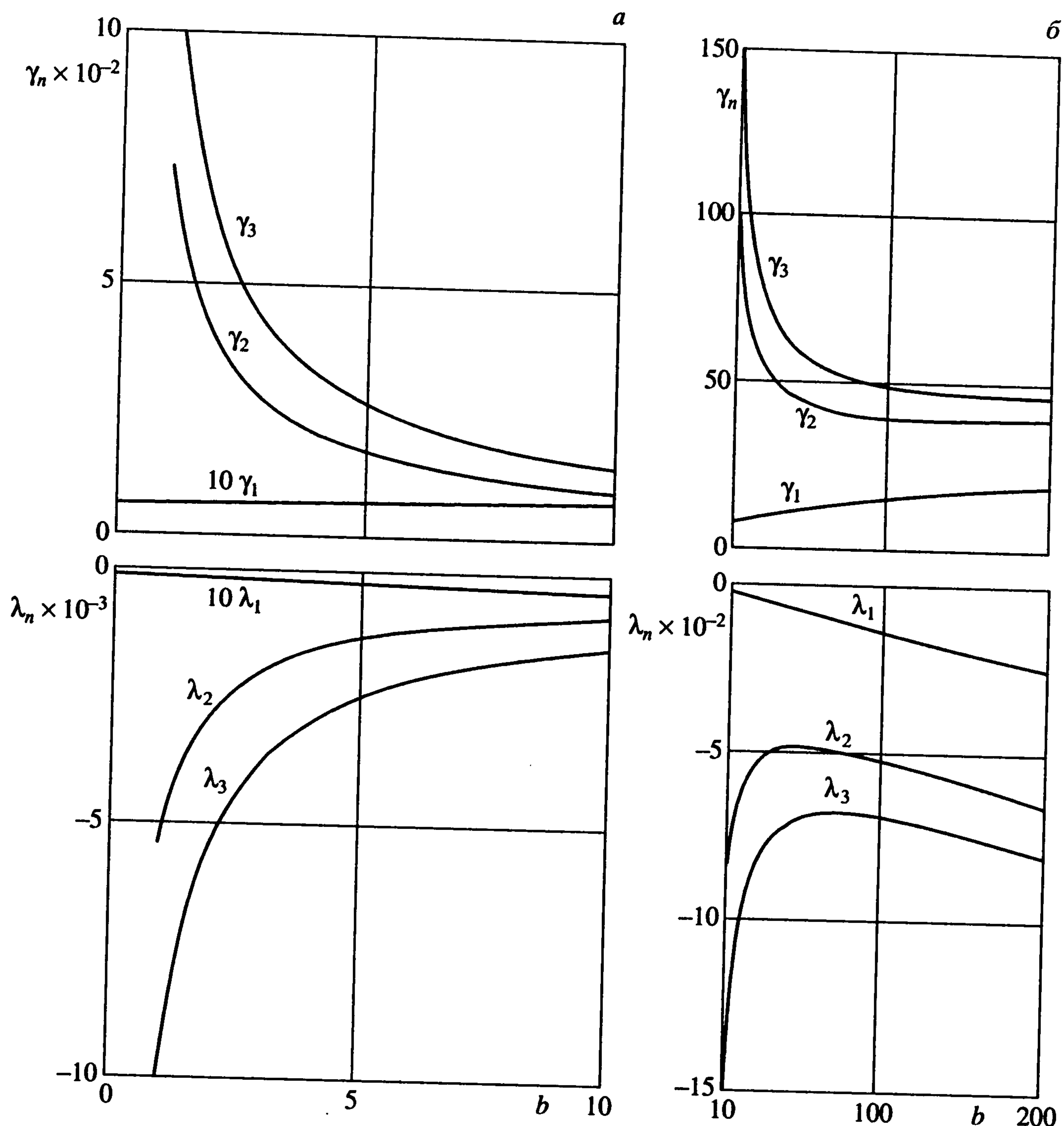
В процессе вычислений установлено, что за несколько итераций (обычно за две-три) без использования экстраполяции по b_k решение задачи (5.1) находится с относительной точностью 10^{-5} – 10^{-7} . Следует отметить, что в начале счета (при $b \ll 1$) величина $\Delta_n(1) \approx 0.1$; это требует достаточно малых начальных шагов $\delta b_k \approx 0.01$ по b . При росте b величина $\Delta_n(1)$ возрастает, что практически сразу ($b \sim 0.5$) позволяет увеличить шаг $\delta b_k \approx 0.1$ – 1 . Вычислительная практика показывает, что малость величин ϵ_0 , μ_0 является определяющим фактором быстрой сходимости итерационного алгоритма; обычно достаточно $\epsilon_0, \mu_0 \sim 0.1$.

С помощью рекуррентного алгоритма (5.1), (5.3)–(5.5) были проведены расчеты искомых величин γ , λ и функции $y(x)$ для фиксированных значений угла $\beta^\circ \in [1^\circ\text{--}89.999^\circ]$; параметр $b = 2\beta \text{ Re}$, $\beta = 2\pi\beta^\circ/360^\circ$, изменялся в пределах $b \in [0, 200]$. Расчеты проводились с указанной выше точностью 10^{-5} – 10^{-7} по невязкам $y(1)$, $z(1)$ и ϵ , μ . Результаты для характерного значения $\beta^\circ = 10^\circ$ представлены на фиг. 4–7, кривые 1. Кривые $\gamma(b)$, $\lambda(b)$ представлены на фиг. 4, а для $1 \leq b \leq 10$ и на фиг. 4, б для $10 \leq b \leq 200$. Они определяют решение задач Коши (5.1); соответствующие профили скорости $y(x)$ для $b = 1, 10, 200$ представлены фиг. 5–7. Давление $p(x)$ согласно соотношениям (5.1) линейно зависит от y .

2°. С помощью разработанного алгоритма удастся эффективно исследовать многомодовые (несимметричные и симметричные) течения вязкой жидкости. Существенные трудности построения многомодовых профилей скорости обусловлены вырождением задачи при $b \rightarrow 0$. Это приводит к неограниченным значениям искомых параметров $\gamma(b)$ и $\lambda(b)$, необходимых для интегрирования соответствующей задачи Коши (5.1). При некотором фиксированном значении параметра $b = b_0$ (обычно $b_0 \approx 10$) и номере выбранной моды ($n = 2, 3, \dots$) производится поиск неизвестных величин γ , λ и их вычисление с высокой точностью, обеспечивающей указанную выше невязку по краевым условиям. Затем с помощью процедуры продолжения по параметру b строятся универсальные кривые $\gamma(b)$, $\lambda(b)$ для $0 < b < b_0$ и $b_0 < b < \infty$. Трудности вычислений усугубляются тем, что величины $\gamma_n \gg \gamma_1$, $\lambda_n \gg \lambda_1$ (на несколько порядков) и достигают при $b = 1$ больших значений, например, $\gamma_3 \sim 10^4$, $\lambda_3 \sim 10^5$. Этими обстоятельствами можно объяснить отсутствие до настоящего времени убедительных результатов по определению и анализу многомодовых течений в задаче Джеффри–Гамеля.

Графическое представление численно-аналитического исследования многомодовых течений при $n = 2, 3$ дано на фиг. 4–7. Они сравниваются с соответствующими кривыми, отвечающими изложенному в п. 1° классическому решению ($n = 1$), которое было изучено ранее [16], в том числе для различных значений параметра a . Установлено, что при $n \geq 2$ нечетные моды n отвечают симметричным (относительно $x = 1/2$, т.е. $\theta = 0$) решениям, а четные n – несимметричным.

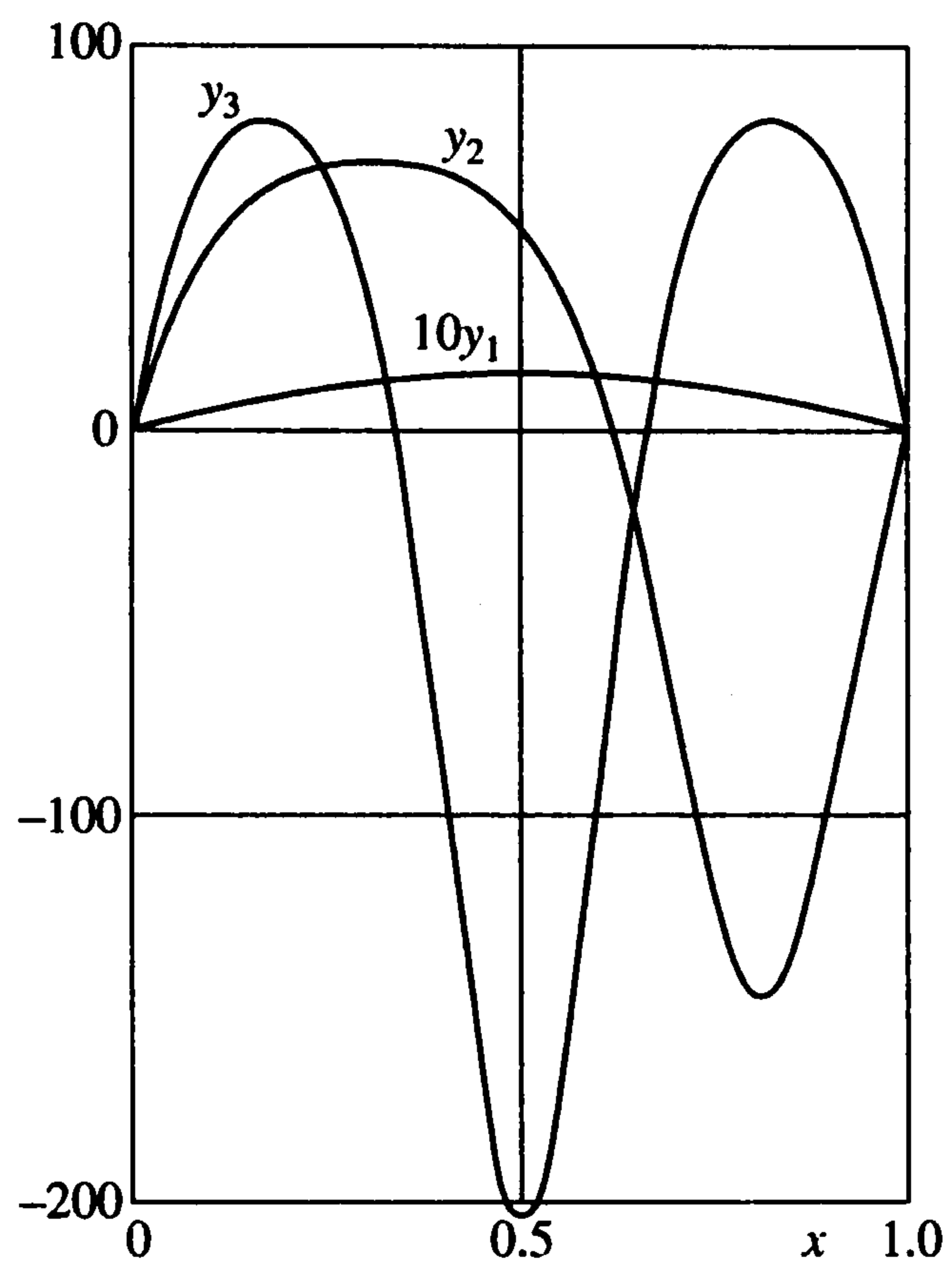
Анализ свидетельствует, что течения обладают определенными структурными свойствами. А именно, положительные максимумы ($n \geq 3$) и отрицательные минимумы ($n \geq 4$) функций $y_n(x, b)$ имеют практически одинаковые значения. Кроме того, во всех нулях $x_i (i = 1, \dots, n+1)$ функции $y_n(x, b)$ (при фиксированных n, b)



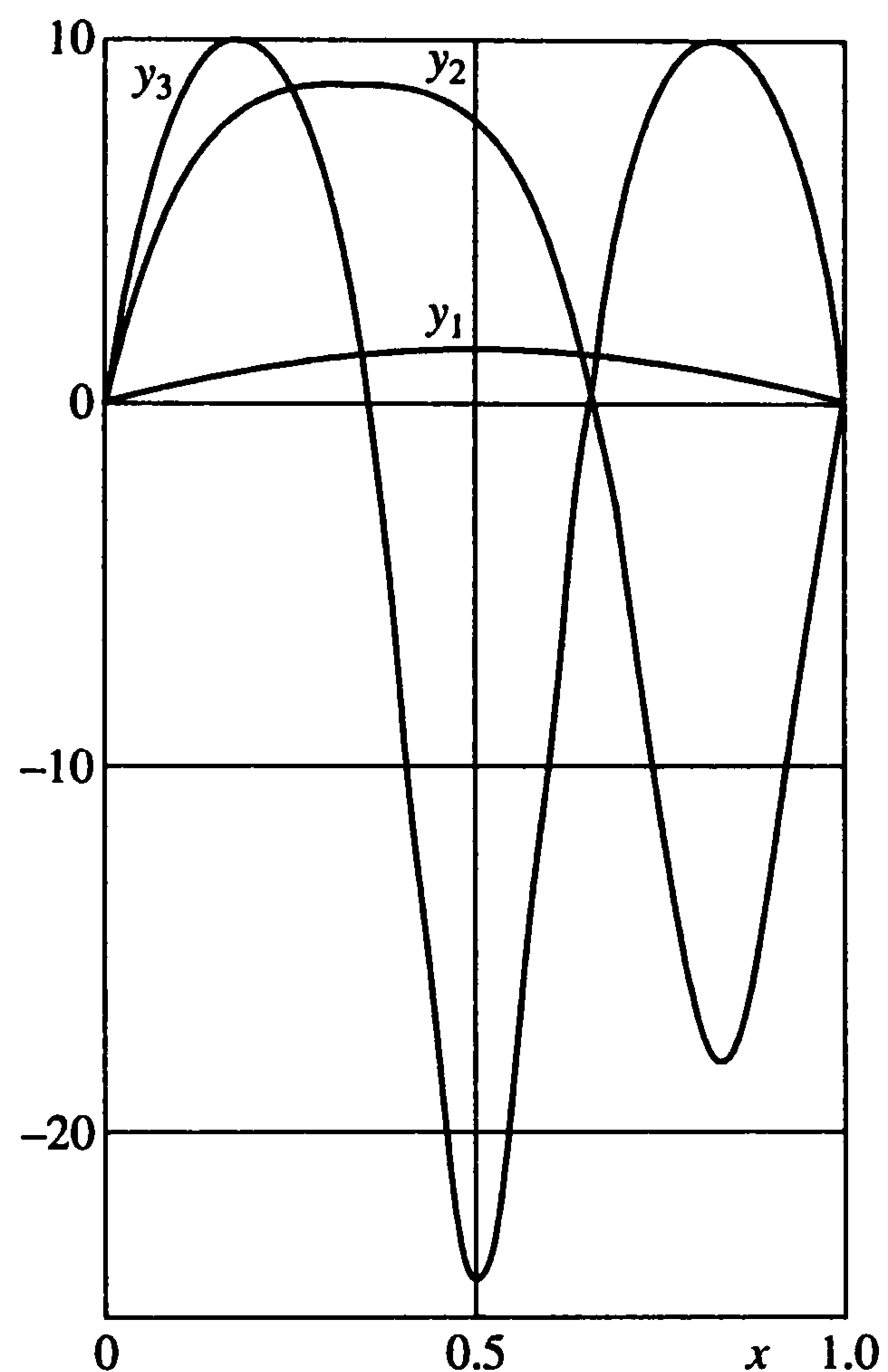
Фиг. 4

производные y'_n равны по абсолютной величине, т.е. $\gamma_n(b) = \pm y'_n(x_i, b)$. Таким образом, в определенном смысле многомодовое течение является комбинацией одномодового и двухмодового течений, что по-видимому, следует из общего свойства радиальности течений.

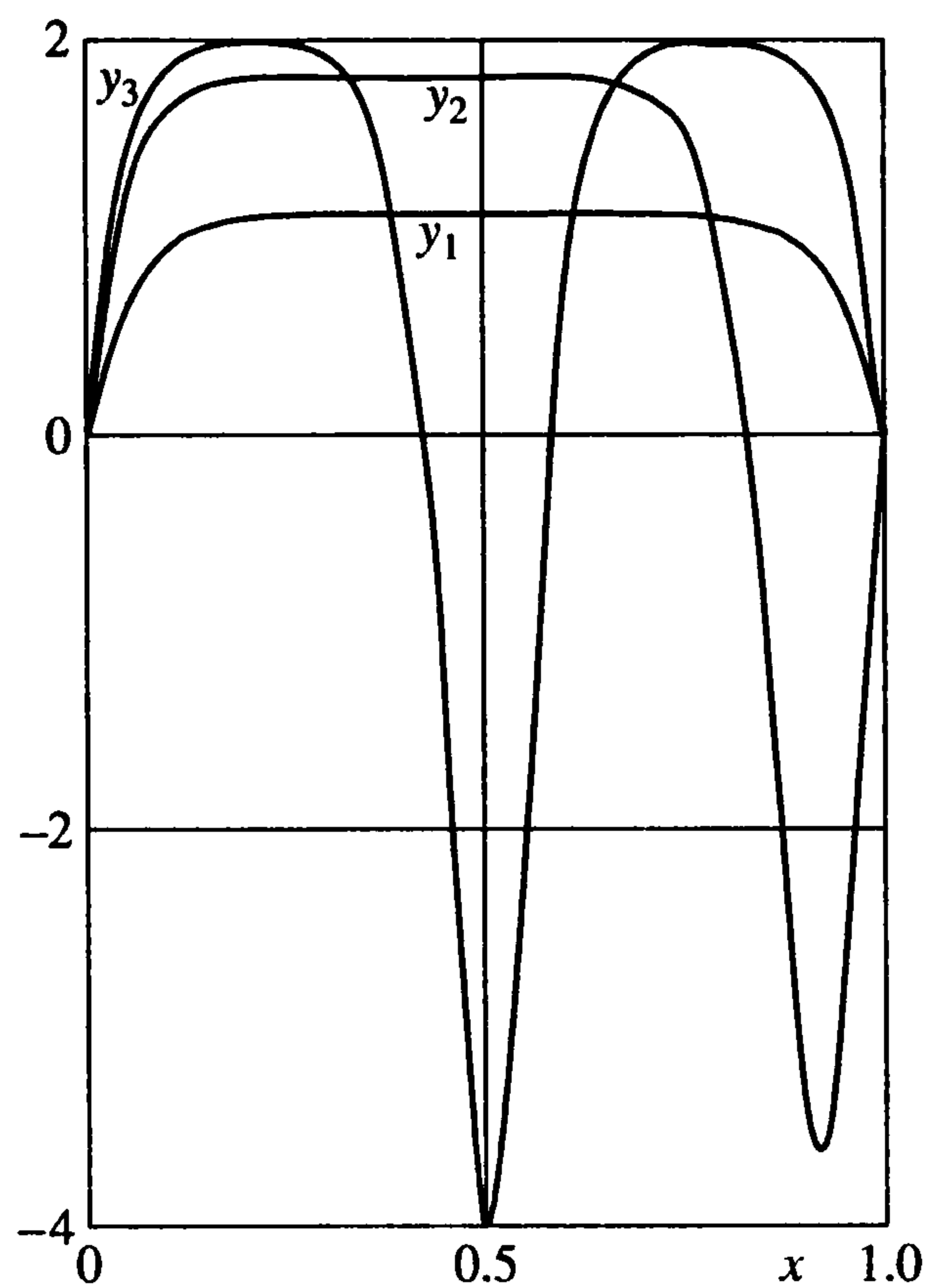
На фиг. 4, а, б в различных масштабах для $1 \leq b \leq 10$ и $10 \leq b \leq 200$ соответственно приведены графики функций $\gamma_n(b)$, $\lambda_n(b)$. Они определяют решения краевой задачи интегрированием задач Коши при фиксированном значении параметра a (т.е. угла β). Интересные свойства этих кривых проявляются вблизи $b = 0$, а графики имеют вертикальные асимптоты: $\gamma_n \rightarrow +\infty$, $\lambda_n \rightarrow -\infty$ при $b \rightarrow +0$. Напомним, что классическому одномодовому решению [16] отвечают конечные значения γ_1 , λ_1 . Следует также отметить большие абсолютные значения γ_n , λ_n для $b \sim 1$, причем разности $\gamma_n - \gamma_{n-1}$, $\lambda_{n-1} - \lambda_n$ неограниченно возрастают при $b \rightarrow +0$, а также при увеличении номера n . Каждая кривая γ_n достигает минимального значения при некотором довольно большом $b = b_n^\gamma \sim 10^2 - 10^3$ и весьма медленно стремится сверху к асимптоте



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

$\gamma^{(1)} = \sqrt{4b/3}$. Аналогично кривые λ_n достигают максимальных значений при некоторых $b = b_n^\lambda \sim 10^2$ и также весьма медленно стремятся снизу к асимптоте $\lambda^{(1)} = -b$. Отсюда следует важный в механическом аспекте вывод: все моды стационарных течений, в том числе основная ($n = 1$, см. [16]), имеют своим пределом по некоторой метрике для $0 < x < 1$ течение идеальной жидкости при $b \rightarrow \infty$ ($\text{Re} \rightarrow \infty$).

b	$-p_1^0$	$-p_2^0$	$-p_3^0$	$-\delta_1^* \times 10^5$	$-\delta_2^* \times 10^5$	$-\delta_3^* \times 10^5$
1	26.5219	5.32829	2.55111	5618	2626	2077
10	11105.5	167.974	6.67587	1322	1076	270
200	21817.9	296.093	8.23039	937	807	243

Кривые $\gamma_n(b)$, $\lambda_n(b)$ по существу являются основным результатом исследований, на основе которых интегрированием задачи Коши (5.1) получаются основные характеристики стационарных течений в конфузоре: профиль скорости $u(x)$, давление $p(x)$, компоненты тензора скоростей деформаций и напряжений и др. [16]. Форма кривых γ_n , λ_n довольно проста, однако их построение сопряжено с весьма трудоемкими высокоточными расчетами, которые существенно усложняются при $b \rightarrow +0$ и $b \rightarrow \infty$. В задаче имеют место резко выраженные "погранслойные" и "овражные" эффекты. Вычислительные алгоритмы на основе известных методов функционального анализа (Бубнова–Галеркина), конечных элементов, конечно-разностных методов не приводят к удовлетворительным результатам.

С целью иллюстрации многомодовых течений на фиг. 5–7 приведены профили скорости $u_n(x)$, $n = 2, 3$ для трех значений b : относительно малого $b = 1$, "среднего" $b = 10$ и сравнительно большого $b = 200$. При малых значениях параметра b (Re), имеют место большие колебания положительных и отрицательных значений скорости, т.е. функций $u_n(x)$. Им отвечают области втекания ($u_n > 0$) и вытекания ($u_n < 0$) жидкости. Увеличение параметра b (Re) приводит к снижению размаха колебаний и уменьшению возвратных течений. При больших значениях $b \sim 10^2$ – 10^3 наблюдаются явно выраженные формы, отвечающие конфузорному течению слабо вязкой жидкости. Отклонение от прямоугольного профиля течения невязкой (идеальной) жидкости по некоторой метрике стремится к нулю для $0 < x < 1$; вблизи $x = 0, 1$ ($\theta = \mp \beta$) имеют место типичные погранслойные явления.

Заметим, что согласно последнему соотношению (5.1) профили давления p и скорости течения u связаны линейной зависимостью [14, 15], причем основная составляющая равна $p_n^0 = \lambda_n / (a^2 b)$. Относительные вариации функции $p = p_n(x) = p_n^0 (1 + \delta_n(x))$ весьма малы и оцениваются величинами $\delta_n = -a^2 u_n / \lambda_n$. Расчеты свидетельствуют (см. таблицу), что основные величины давления и оценки экстремальных по x значений δ_n^* обладают этим свойством. Таким образом, существенная (качественная) перестройка течений обусловлена малыми вариациями давления, которые неограниченно убывают при увеличении параметра b , т.е. Re, причем $p_n \rightarrow -a^{-2}$ при $b \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00157, 02-01-00252, 02-01-06178).

ЛИТЕРАТУРА

1. Courant R., Hilbert D. Methoden der mathematischen Physik. Berlin: Springer, 1931 = Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1951. 476 с.
2. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению. М.: Гостехиздат, 1955. 248 с.
3. Collatz L. Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Berlin: Springer, 1964 = Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 447 с.
4. Bryson A.E., YU-Chi Ho. Applied optimal control. London etc.: Blaisdell Publ. Co. 1969 = Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.

5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 549 с.
6. Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.
7. Bellman R.E., Kalaba R.E. Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problems. N.Y.: Elsevier, 1965 = Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. М.: Мир, 1968. 183 с.
8. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris: Gauthier-Villars, 1892 = Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 771 с.
9. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
10. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
11. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
12. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.
13. Nayfeh A.H. Introduction to Perturbation Techniques. N.Y.: Wiley, 1981 = Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
14. Акуленко Л.Д., Нестеров С.В. Эффективное численно-аналитическое решение вариационных задач механики // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 5. С. 624–627.
15. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
16. Акуленко Л.Д., Георгиевский Д.В., Кумакшев С.А., Нестеров С.В. Численно-аналитическое исследование стационарного течения вязкой жидкости в плоском конфузоре // Докл. РАН. 2000. Т. 374. № 1. С. 44–48.

Москва

Поступила в редакцию
21.I.2002