

УДК 539.3 : 534.1

© 2002 г. Д. Бардзокас, М.Л. Фильштинский

**АНТИПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ
ДЛЯ ЦИЛИНДРА С ТУННЕЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ,
ВОЗБУЖДАЕМОГО ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ
ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ**

Рассматривается антиплоская смешанная граничная задача электроупругости о колебаниях бесконечного пьезокерамического цилиндра, ослабленного туннельной криволинейной трещиной. С использованием специальных интегральных представлений решений граничная задача сводится к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений второго рода с разрывными ядрами. Приводятся результаты численной реализации алгоритма, характеризующие амплитудно-частотные характеристики кусочно-однородного цилиндра и поведение компонентов электроупругого поля в области и на границе цилиндра в условиях обратного пьезоэлектрического эффекта.

Методом рядов изучались статические и динамические антиплоские задачи электроупругости для кругового цилиндра с одним и двумя симметрично расположенными электродами [1]. Методом сингулярных интегральных уравнений рассматривались колебания бесконечных пьезокерамических цилиндров с дефектами типа туннельных трещин и линейных жестких включений в условиях прямого пьезоэлектрического эффекта [2].

1. Постановка задачи. Рассмотрим отнесенный к декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, бесконечный в направлении оси симметрии материала x_3 пьезокерамический цилиндр, содержащий туннельную криволинейную трещину (разрез) L . На свободной от механических усилий поверхности цилиндра располагаются $2n$ бесконечно длинных в направлении оси x_3 тонких электродов с заданными разностями электрического потенциала. Неэлектродированные участки поверхности цилиндра сопряжены с вакуумом (воздухом). Границы k -го электрода определены величинами β_{2k-1} и β_{2k} ($k = 1, 2, \dots, 2n$), а электрический потенциал на нем задан величиной $\phi_k^* = \text{Re}(\Phi_k^* e^{-i\omega t})$ (ω – круговая частота, t – время). Предполагается, что кривизны контуров L и S являются функциями класса Гёльдера [3], а электроды – идеально проводящие и абсолютно гибкие.

В данных условиях в кусочно-однородном цилиндре имеет место электроупругое поле, соответствующее состоянию антиплоской деформации [1]. Полная система дифференциальных уравнений в квазистатическом приближении включает следующие соотношения:

$$\partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.1}$$

$$\sigma_{m3} = c_{44}^E \partial_m u_3 - e_{15} E_m \tag{1.2}$$

$$D_m = e_{15} \partial_m u_3 + \varepsilon_{11}^E E_m \quad (m = 1, 2)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0 \tag{1.3}$$

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$$

Здесь (1.1) – уравнение движения, (1.2) – материальные уравнения среды, (1.3) – уравнения электростатики [4], σ_{m3} ($m = 1, 2$) – компоненты тензора механических напряжений, u_3 – компонента вектора упругого перемещения в направлении, параллельном оси цилиндра, \mathbf{E} и \mathbf{D} – векторы напряженности и индукции электрического поля, ϕ – электрический потенциал, c_{44}^E – модуль сдвига, измеренный при постоянном значении электрического поля, e_{15} – пьезоэлектрическая константа, ε_{11}^E – диэлектрическая проницаемость, измеренная при фиксированных деформациях; ρ – массовая плотность материала.

Систему уравнений (1.1)–(1.3) сведем к дифференциальным уравнениям относительно перемещения u_3 и электрического потенциала ϕ

$$c_{44}^E \nabla^2 u_3 + e_{15} \nabla^2 \phi = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad e_{15} \nabla^2 u_3 - \varepsilon_{11}^E \nabla^2 \phi = 0 \quad (1.4)$$

Из уравнений (1.4) следуют соотношения

$$\nabla^2 u_3 - c^{-2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 F = 0 \quad (1.5)$$

$$\phi = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^E} u_3 + F, \quad c = \sqrt{\frac{c_{44}^E (1 + k_{15}^2)}{\rho}}, \quad k_{15} = \frac{e_{15}}{\sqrt{c_{44}^E \varepsilon_{11}^E}}$$

где c – скорость волны сдвига в пьезокерамической среде, k_{15} – коэффициент электро-механической связи [1].

Механические и электрические величины при учете соотношений (1.2), (1.3) и (1.5) можно выразить через функции u_3 и F по формулам

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[c_{44}^E (1 + k_{15}^2) u_3 + e_{15} F \right] \quad (1.6)$$

$$D_1 - iD_2 = -2\varepsilon_{11}^E \frac{\partial F}{\partial z}, \quad E_1 - iE_2 = -2 \frac{\partial}{\partial z} \left(F + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^E} u_3 \right), \quad z = x_1 + ix_2$$

Полагая

$$u_3 = \text{Re}(U_3 e^{-i\omega t}), \quad \phi = \text{Re}(\Phi e^{-i\omega t}), \quad F = \text{Re}(e^{-i\omega t} F^*)$$

запишем уравнения (1.5) относительно амплитудных величин

$$\nabla^2 U_3 + \gamma^2 U_3 = 0, \quad \nabla^2 F^* = 0, \quad \Phi = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^E} U_3 + F^*; \quad \gamma = \frac{\omega}{c} \quad (1.7)$$

где γ – волновое число.

Считая, что берега трещины свободны от механических напряжений, представим механические и электрические граничные условия на контуре L следующим образом [1]:

$$(\sigma_{13} \cos \psi + \sigma_{23} \sin \psi)^\pm = 0 \quad (1.8)$$

$$E_s^+ = E_s^-, \quad D_n^+ = D_n^- \quad (1.9)$$

Здесь E_s – касательная компонента вектора электрической напряженности, D_n – нормальная компонента вектора электрической индукции, ψ – угол между нормалью к левому берегу разреза L и осью Ox_1 ; индексы плюс и минус относятся к левому

и правому берегам разреза при движении от его начала a к концу b (фиг. 1). Условия (1.9) выражают то обстоятельство, что соответствующие компоненты электрического поля не претерпевают скачков при переходе через разрез L .

С учетом представлений (1.5), (1.6) граничные условия на поверхностях цилиндра и трещины можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial n} \left\{ c_{44}^E (1 + k_{15}^2) U_3 + e_{15} F^* \right\} = 0 \text{ на } C; \quad F^* + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^E} U_3 = \Phi^*(\zeta^*), \quad \zeta^* \in C_\phi \quad (1.10)$$

$$D_n^* = -\varepsilon_{11}^E \frac{\partial F^*}{\partial n} = 0 \text{ на } C \setminus C_\phi; \quad \frac{\partial}{\partial n} \left\{ c_{44}^E (1 + k_{15}^2) U_3 + e_{15} F^* \right\}^\pm = 0 \text{ на } L$$

где C_ϕ – часть контура C , соответствующая электродированной поверхности цилиндра, оператор $\partial/\partial n$ обозначает производную по нормали к граничному контуру, звездочкой обозначены амплитуды соответствующих величин.

Таким образом, задача заключается в определении функций U_3 и F^* из уравнений (1.7), граничных условий (1.10) и электрических условий (1.9) на разрезе L .

2. Интегродифференциальные уравнения граничной задачи электроупругости. Следуя описанному ранее подходу [2], представим амплитуды искомых функций в виде

$$U_3(z) = \int_C p(\zeta^*) H_0^{(1)}(\gamma r_1) ds - \frac{i}{4} \int_L [U_3] \frac{\partial H_0^{(1)}(\gamma r)}{\partial n_\zeta} ds \quad (2.1)$$

$$F^*(z) = \int_C f(\zeta^*) \frac{\partial}{\partial n_{\zeta^*}} \ln r_1 ds + \frac{e_{15}}{2\pi\varepsilon_{11}^E} \int_L \left[\frac{dU_3}{ds} \right] \arg(z - \zeta) ds$$

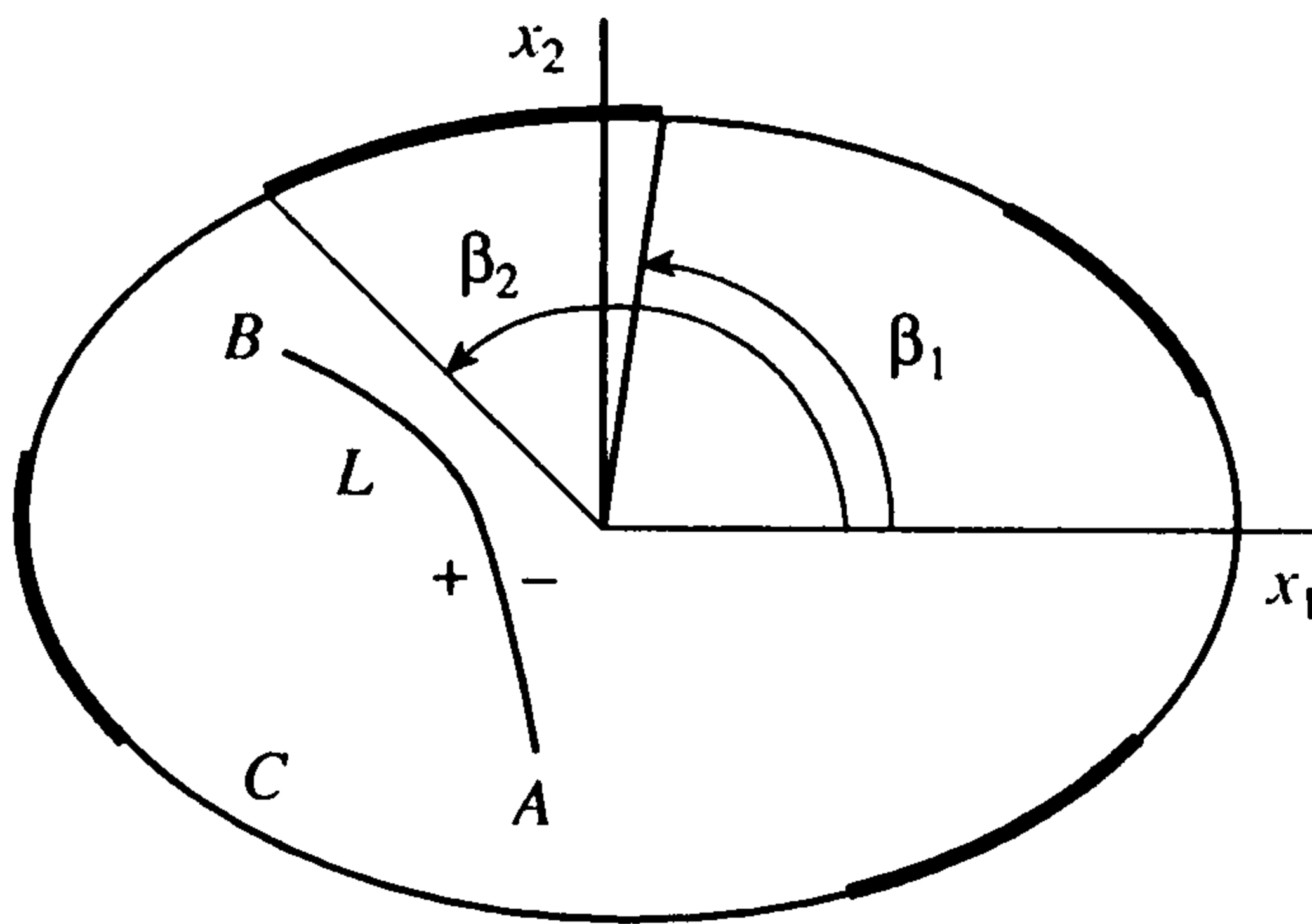
$$r = |z - \zeta|, \quad r_1 = |\zeta^* - z|, \quad \zeta \in L, \quad \zeta^* \in C$$

Здесь $H_\nu^{(1)}(x)$ – функция Ганкеля первого рода порядка ν , ds – элемент длины дуги контура, по которому производится интегрирование.

Интегральные представления (2.1) удовлетворяют дифференциальным уравнениям (1.7), обеспечивают наличие скачка перемещения и непрерывность вектора напряжения на L , а также автоматическое выполнение электрических условий (1.9).

Подставляя предельные значения функций (2.1) и их производных при $z \rightarrow \zeta_0 \in L$ и $z \rightarrow \zeta_0^* \in C$ в граничные условия (1.10), приходим к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений второго рода

$$\begin{aligned} & -2ip(\zeta_0^*) + \int_C p(\zeta^*) g_1(\zeta^*, \zeta_0^*) ds + \int_C f'(\zeta^*) g_2(\zeta^*, \zeta_0^*) ds + \\ & + \int_L \left[\frac{dU_3}{ds} \right] g_3(\zeta, \zeta_0^*) ds + \int_L [U_3] g_4(\zeta, \zeta_0^*) ds = 0 \end{aligned}$$



Фиг. 1

$$\begin{aligned}
& \pi f(\zeta_0^*) + \int_C p(\zeta^*) g_5(\zeta^*, \zeta_0^*) ds + \int_C f(\zeta^*) g_6(\zeta^*, \zeta_0^*) ds + \\
& + \int_C \left[\frac{dU_3}{ds} \right] g_7(\zeta, \zeta_0^*) ds + \int_C [U_3] g_8(\zeta, \zeta_0^*) ds = \Phi^*(\zeta_0^*), \quad \zeta_0^* \in C_\phi \\
& \int_C f'(\zeta^*) g_9(\zeta^*, \zeta_0^*) ds + \int_L \left[\frac{dU_3}{ds} \right] g_{10}(\zeta, \zeta_0^*) ds = 0, \quad \zeta_0^* \in C \setminus C_\phi \\
& \int_C p(\zeta^*) g_{11}(\zeta^*, \zeta_0) ds + \int_C f'(\zeta^*) g_{12}(\zeta^*, \zeta_0) ds + \\
& + \int_L \left[\frac{dU_3}{ds} \right] g_{13}(\zeta, \zeta_0) ds + \int_L [U_3] g_{14}(\zeta, \zeta_0) ds = 0
\end{aligned}$$

в которой ядра g_m ($m = 1, 2, \dots, 14$) определяются выражениями

$$g_1(\zeta^*, \zeta_0^*) = \frac{2}{\pi i} \operatorname{Re} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^* - \zeta_0^*} + \gamma H_1(\gamma r_{10}) \cos(\psi_{10} - \alpha_{10})$$

$$g_2(\zeta^*, \zeta_0^*) = \frac{e_{15}}{c_{44}^E (1 + k_{15}^2)} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^* - \zeta_0^*}, \quad g_3(\zeta, \zeta_0^*) = \frac{1}{2\pi(1 + k_{15}^2)} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta - \zeta_0^*}$$

$$g_4(\zeta, \zeta_0^*) = \frac{i\gamma^2}{8} [H_2(\gamma r_{20}) \cos(\psi + \psi_{10} - 2\alpha_{20}) - H_0^{(1)}(\gamma r_{20}) \cos(\psi - \psi_{10})]$$

$$g_5(\zeta^*, \zeta_0^*) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^E} H_0^{(1)}(\gamma r_{10}), \quad g_6(\zeta^*, \zeta_0^*) = \operatorname{Re} \frac{e^{i\psi_1}}{\zeta^* - \zeta_0^*}$$

$$g_7(\zeta, \zeta_0^*) = \frac{e_{15}}{2\pi\varepsilon_{11}^E} \alpha_{20}, \quad g_8(\zeta, \zeta_0^*) = -\frac{ie_{15}}{4\varepsilon_{11}^E} \gamma H_1^{(1)}(\gamma r_{20}) \cos(\psi - \alpha_{20})$$

$$g_9(\zeta^*, \zeta_0^*) = \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^* - \zeta_0^*}, \quad g_{10}(\zeta, \zeta_0^*) = -\frac{e_{15}}{2\pi\varepsilon_{11}^E} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta - \zeta_0^*}$$

$$g_{11}(\zeta^*, \zeta_0) = \frac{2}{\pi i} \operatorname{Re} \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta^* - \zeta_0} + \gamma H_1(\gamma r_{30}) \cos(\psi_0 - \alpha_{30})$$

$$g_{12}(\zeta^*, \zeta_0) = \frac{e_{15}}{c_{44}^E (1 + k_{15}^2)} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta^* - \zeta_0}, \quad g_{13}(\zeta, \zeta_0) = \frac{1}{2\pi(1 + k_{15}^2)} \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_0}}{\zeta - \zeta_0}$$

$$g_{14}(\zeta, \zeta_0) = \frac{i\gamma^2}{8} [H_2(\gamma r_0) \cos(\psi + \psi_0 - 2\alpha_0) - H_0^{(1)}(\gamma r_0) \cos(\psi - \psi_0)]$$

$$H_1(x) = \frac{2i}{\pi x} + H_1^{(1)}(x), \quad H_2(x) = \frac{4i}{\pi x^2} + H_2^{(1)}(x)$$

$$r_0 = |\zeta_0 - \zeta|, \quad \alpha_0 = \arg(\zeta_0 - \zeta), \quad r_{10} = |\zeta^* - \zeta_0^*|, \quad \alpha_{10} = \arg(\zeta^* - \zeta_0^*)$$

$$r_{20} = |\zeta_0^* - \zeta|, \quad \alpha_{20} = \arg(\zeta_0^* - \zeta), \quad r_{30} = |\zeta^* - \zeta_0|, \quad \alpha_{30} = \arg(\zeta^* - \zeta_0)$$

$$\psi = \psi(\zeta), \quad \psi_1 = \psi(\zeta^*), \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0), \quad \psi_{10} = \psi(\zeta_0^*), \quad \zeta, \zeta_0 \in L, \quad \zeta^*, \zeta_0^* \in C$$

Здесь ψ и ψ_1 – углы между нормальными к контурам L и C и осью Ox_1 соответственно, $\Phi(\zeta_0^*)$ – кусочно-постоянная функция, задающая значения амплитуд электрических потенциалов на электродах.

Для однозначной разрешимости системы (2.2) в классе функций с производными, неограниченными вблизи концов разреза L [3], ее необходимо рассматривать в совокупности с дополнительным условием

$$\int_L \left[\frac{dU_3}{ds} \right] ds = 0 \quad (2.3)$$

выражающим равенство нулю скачков перемещения в вершинах разреза L . Кроме того, условие (2.3) обеспечивает однозначность интегрального представления функции $F^*(z)$ в (2.1).

Определив функции $[U_3]$, $p(\zeta^*)$ и $f(\zeta^*)$ из системы (2.2), по формулам (1.5), (1.6) с использованием представлений (2.1) можно определить все компоненты электроупругого поля в кусочно-однородном цилиндре. Отметим также, что решение системы (2.2) совместно с условием (2.3) существует для любой частоты ω , не совпадающей с собственной.

Вводя параметризацию контура C с помощью равенств $\zeta^* = \zeta^*(\beta)$, $\zeta_0^* = \zeta^*(\beta_0)$ ($0 \leq \beta, \beta_0 \leq 2\pi$), найдем выражение для амплитуды плотности распределения электрических зарядов $q_k(\beta)$ на k -м электроде. Принимая во внимание, что цилиндр контактирует с вакуумом, можно записать

$$q_k(\beta) = D_n^{(k)*}(\beta), \quad \beta_{2k-1} < \beta < \beta_{2k} \quad (2.4)$$

Здесь $D_n^{(k)*}(\beta)$ – амплитуда нормальной компоненты вектора электрической индукции на участке поверхности цилиндра, покрытом k -м электродом.

Привлекая интегральное представление (2.1) для функции $F^*(z)$, с учетом равенств (2.4), (1.6) находим

$$q_k(\beta_0) = -\varepsilon_{11}^e \int_C f'(\zeta^*) \operatorname{Im} \frac{e^{i\psi_{10}}}{\zeta^* - \zeta_0^*} ds, \quad \zeta_0^* \in C_{\phi_k} \quad (2.5)$$

где C_{ϕ_k} – часть контура C , на которой расположен k -й электрод.

Интегрируя выражение (2.5) по переменной β_0 в пределах от β_{2k-1} до β_{2k} , получим амплитудное значение суммарного заряда Q_k k -го электрода, отнесение к единице его длины. Ток, протекающий через данный электрод и равный току проводимости в цепи генератора, можно определить по формуле

$$I_k(t) = \operatorname{Re} \left\{ i\omega e^{-i\omega t} \int_{\beta_{2k-1}}^{\beta_{2k}} q_k(\beta_0) s'(\beta_0) d\beta_0 \right\}, \quad s'(\beta_0) = \frac{ds}{d\beta_0} \quad (2.6)$$

Равенство (2.6) позволяет определить антирезонансные частоты, при которых $I_k(t) = 0$.

Отметим, что в случае антиплоской деформации напряжения продольного сдвига на свободной от механической нагрузки поверхности не имеют особенности на краях электродов [5]. Вместе с тем компоненты вектора электрической индукции обладают особенностями корневого типа на краях электродов, что непосредственно следует из асимптотического анализа сингулярных интегральных уравнений (2.2) и выражений (2.4), (2.5).

3. Коэффициент интенсивности напряжений. Для вычисления коэффициента интенсивности напряжений K_{III} [6] получим главную асимптотику сдвигового напряжения на продолжении за вершину трещины. При этом будем исходить из формул,

определяющих поведение интегралов типа Коши в окрестности концов разреза L в случае, когда плотность имеет степенную особенность [7],

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\tau(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} \frac{e^{\sigma\pi i} \tau_0(a)(z-a)^{-\sigma}}{2i \sin \pi\sigma} + \Lambda_1(z), & z \in O(a) \\ -\frac{e^{-\sigma\pi i} \tau_0(b)(z-b)^{-\sigma}}{2i \sin \pi\sigma} + \Lambda_2(z), & z \in O(b) \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\tau(\zeta) = \frac{\tau_0(\zeta)}{(z-c)^\sigma}, \quad \sigma = \kappa_1 + i\kappa_2, \quad 0 \leq \kappa_1 \leq 1$$

Для функций $\Lambda_m(z)$ имеют место соотношения

$$\lim_{z \rightarrow a} \Lambda_1(z)(z-a)^\sigma = 0, \quad \lim_{z \rightarrow b} \Lambda_2(z)(z-b)^\sigma = 0$$

Из асимптотического анализа последнего в (2.2) сингулярного интегродифференциального уравнения в окрестности вершины разреза L следует, что $\sigma = 1/2$. Поэтому, введя параметризацию контура трещины $\zeta = \zeta(\delta)$, можно положить

$$\left[\frac{dU_3}{ds} \right] = \frac{\Omega_0(\delta)}{s'(\delta)\sqrt{1-\delta^2}}, \quad s'(\delta) = \frac{ds}{d\delta} > 0, \quad -1 \leq \delta \leq 1 \quad (3.2)$$

где функция $\Omega_0(\delta)$ непрерывна по Гельдеру.

Имеем (оставляя лишь члены, дающие вклад в асимптотику)

$$\sigma_n = \text{Re}(S_n e^{-i\omega t})$$

$$S_n = c_{44}^E \frac{\partial U_3}{\partial n} + \dots = c_{44}^E \left[e^{i\psi_c} \frac{\partial U_3}{\partial z} + e^{-i\psi_c} \frac{\partial U_3}{\partial z} \right] + \dots \quad (3.3)$$

где c – вершина разреза, $\psi_c = \psi(c)$.

На основании выражений (2.1) выпишем главную часть функции (3.3)

$$S_n^0 = \frac{c_{44}^E}{2\pi} \int_L \left[\frac{dU_3}{ds} \right] \text{Im} \frac{e^{i\psi_c}}{\zeta - z} ds \quad (3.4)$$

Используя асимптотические формулы (3.1), с учетом соотношений (3.2) находим

$$S_n^0 = \pm c_{44}^E \frac{\Omega_0(\pm 1)}{2\sqrt{2r^* s'(\pm 1)}}, \quad s'(\pm 1) = \left. \frac{ds}{d\delta} \right|_{\delta=\pm 1} \quad (3.5)$$

Здесь $r^* = |z - c|$, нижний знак относится к вершине $c = a$, верхний – к $c = b$.

Исходя из соотношений (3.5), находим коэффициент интенсивности напряжений

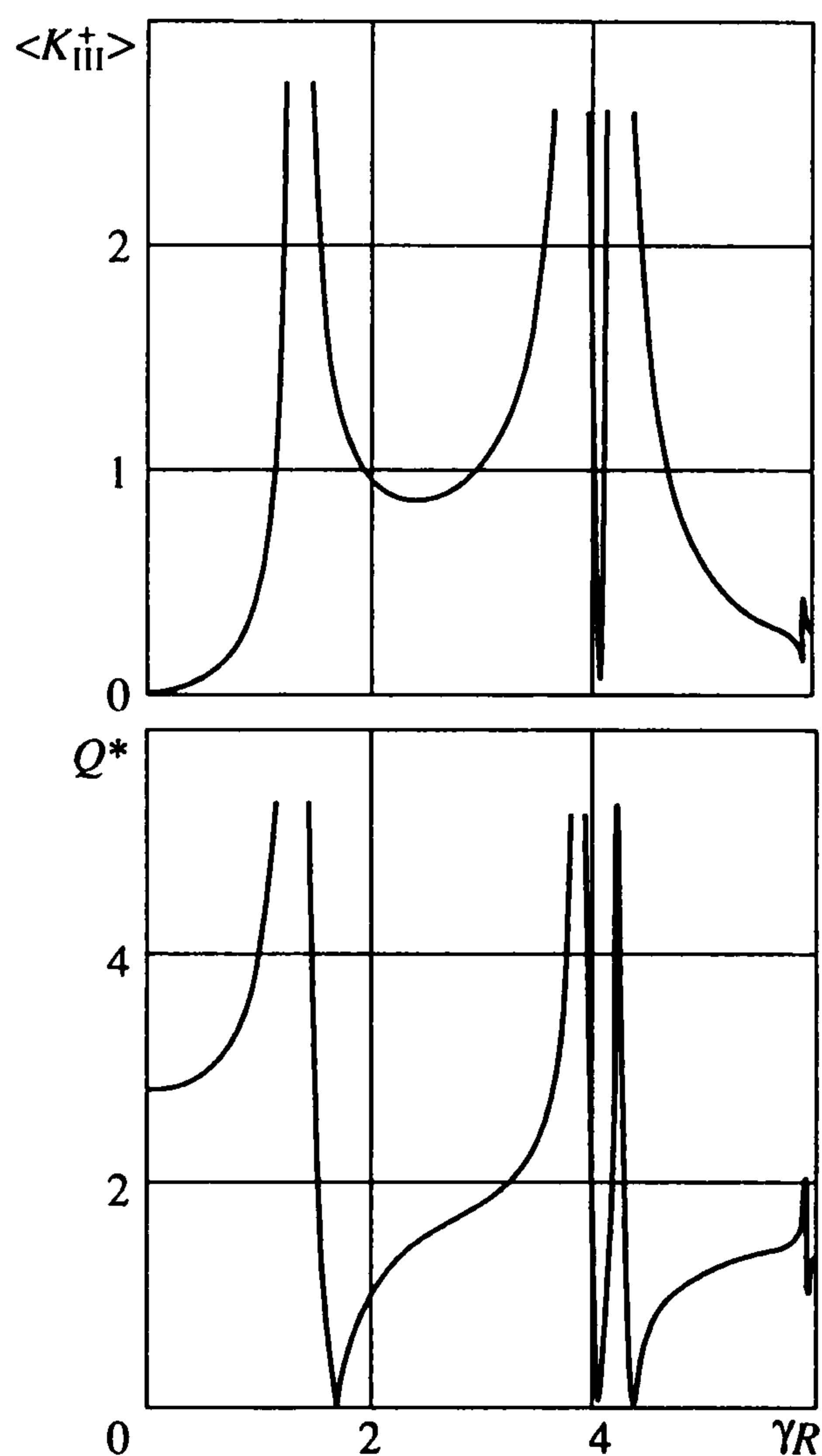
$$K_{III}^\pm = \lim_{r^* \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r^*} \sigma_n^0 = \pm \frac{c_{44}^E}{2} \sqrt{\frac{\pi}{s'(\pm 1)}} \text{Re}[\Omega_0(\pm 1) e^{-i\omega t}] \quad (3.6)$$

Асимптотика нормальной составляющей вектора электрической индукции на продолжении за вершину разреза такова:

$$D_n = D_1 \cos \psi(\pm 1) + D_2 \sin \psi(\pm 1) = \pm e_{15} \frac{\text{Re}[\Omega_0(\pm 1) e^{-i\omega t}]}{2\sqrt{2r^* s'(\pm 1)}} \quad (3.7)$$

Остальные электрические величины в окрестности разреза L ограничены. В самом деле, из уравнений состояния (1.2) имеем

$$\sigma_n = c_{44}^E \frac{\partial u_3}{\partial n} - e_{15} E_n, \quad D_n = e_{15} \frac{\partial u_3}{\partial n} + \varepsilon_{11}^\epsilon E_n \quad (3.8)$$



Фиг. 2

где D_n – нормальная компонента электрической индукции на дуге L' , как угодно близкой к L . Поскольку $[\sigma_n] = [D_n] = 0$ и определитель системы (3.8) отличен от нуля, находим $[\partial u_3 / \partial n] = [E_n] = 0$. Таким образом, вектор электрической напряженности E непрерывно продолжим через разрез.

4. Примеры. Рассмотрим пьезокерамический цилиндр (материал – PZT-4 [1]) эллиптического поперечного сечения, содержащий прямолинейную трещину, ориентированную под углом ϑ к оси Ox_1 . Возбуждение цилиндра осуществляется двумя электродами с разностью амплитуд потенциалов $2\Phi^*$, центры которых расположены на оси x_2 . Параметрические уравнения контуров L и C соответственно имеют вид

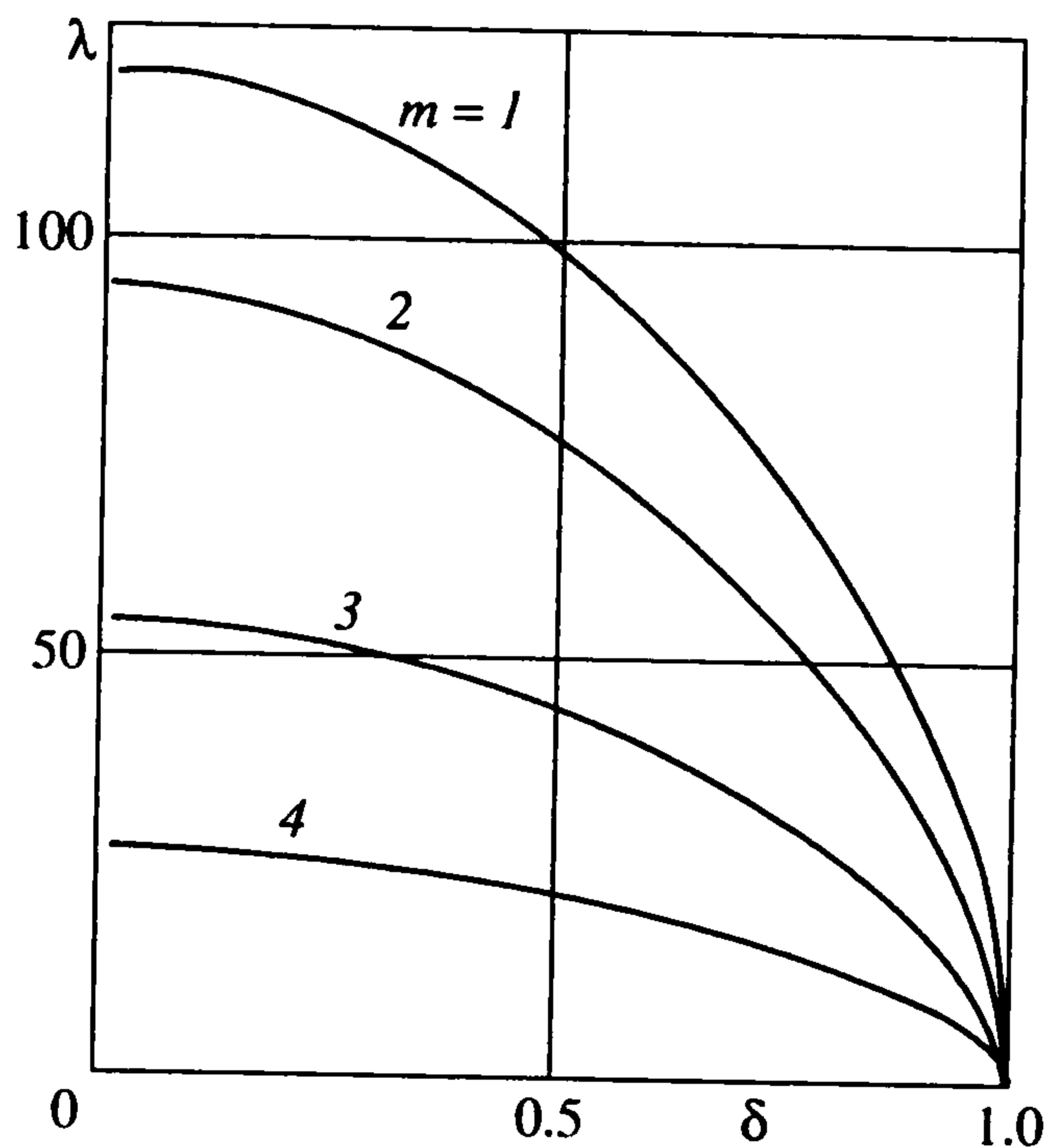
$$\zeta = l\delta e^{i\vartheta}, \quad \delta \in [-1, 1] \quad (4.1)$$

$$\zeta^* = R_1 \cos \beta + iR_2 \sin \beta, \quad \beta \in [0, 2\pi]$$

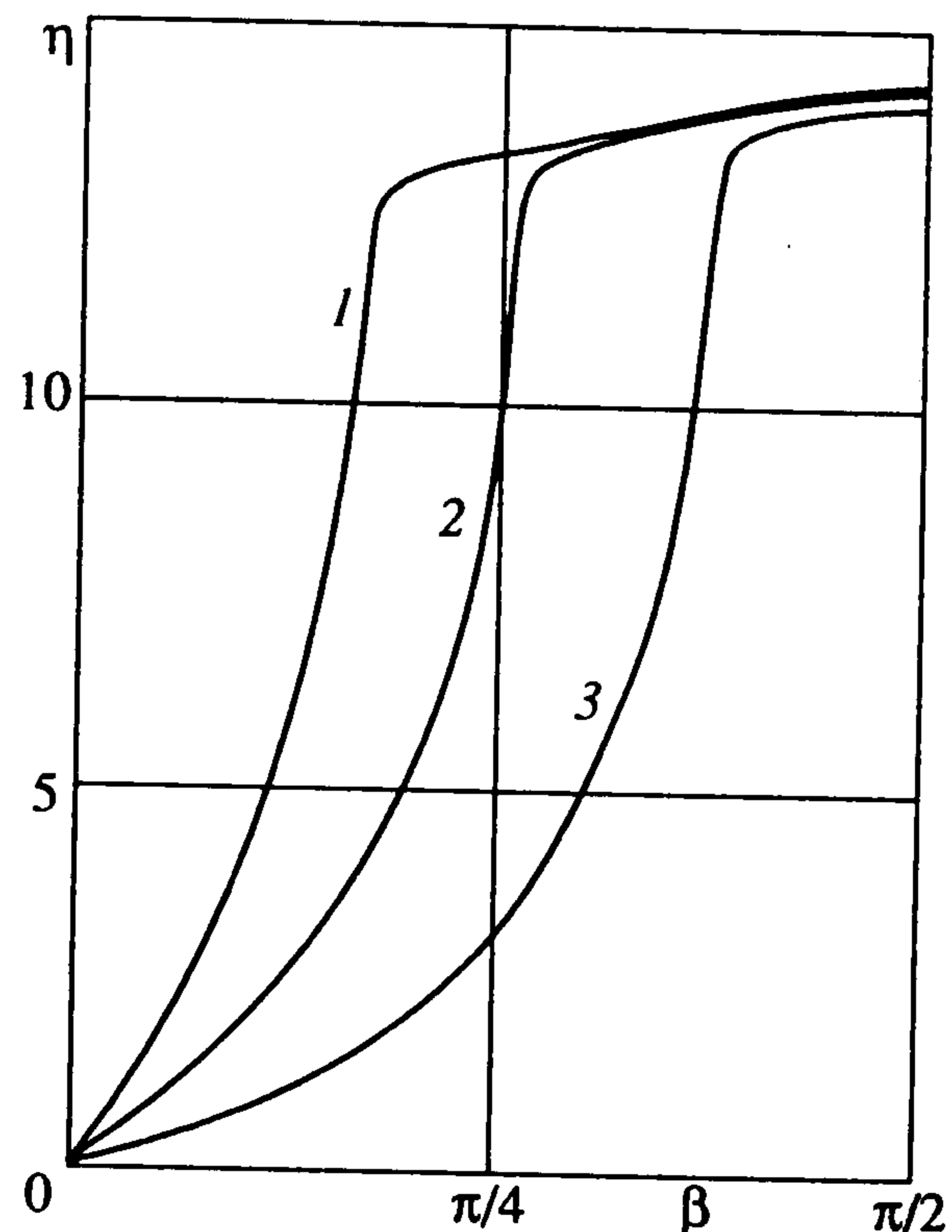
Решение системы интегродифференциальных уравнений (2.2) совместно с условием (2.3) при учете уравнений (4.1) проводилось по специальной схеме метода квадратур [2].

На фиг. 2 приведена зависимость относительного коэффициента интенсивности напряжений $\langle K_{III}^+ \rangle = c_{44}^E \sqrt{\pi l / s'(1)} |\Omega_0(1)| / (2e_{15} |\Phi^*|)$ и величины $Q^* = |Q / \varepsilon_{11}^E \Phi^*|$ (Q – амплитуда суммарного заряда на электроде) от нормализованного волнового числа γR при $R_1/R_2 = 1$, $l/R = 0.2$, $\vartheta = 0$ ($R = (R_1 + R_2)/2$, $2l$ – длина разреза). Значения нормализованных волновых чисел, соответствующих первым трем собственным частотам колебаний, в этом случае таковы: $\gamma_{(1)}R \approx 1.35$, $\gamma_{(2)}R \approx 3.9$, $\gamma_{(3)}R \approx 4.24$. Зная величину $\langle K_{III}^+ \rangle$, коэффициент интенсивности напряжений можно определить по формуле

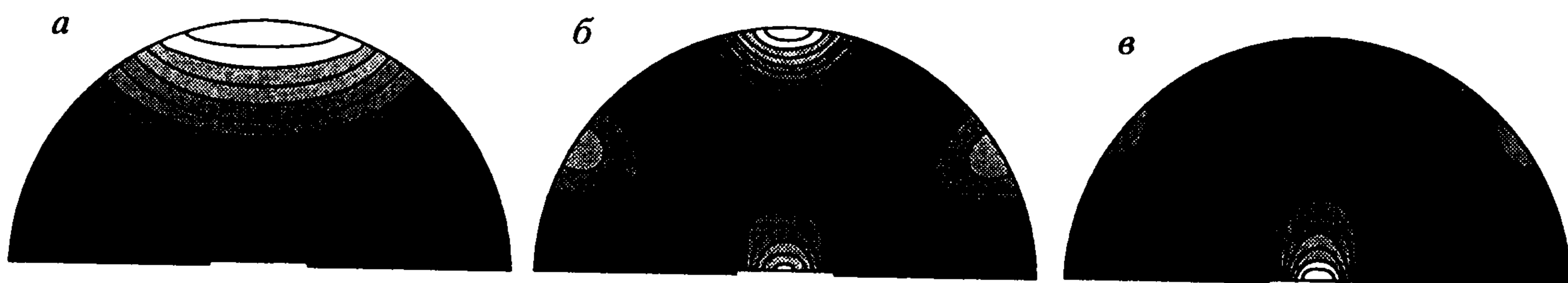
$$K_{III}^\pm = \pm e_{15} |\Phi^*| \langle K_{III}^\pm \rangle \cos(\omega t - \arg \Omega_0(\pm 1)) / \sqrt{l}$$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Фиг. 3 иллюстрирует изменение величины $\lambda = c_{44}^E [U_3] / |\Phi^*|$, характеризующей скачок перемещения на трещине для различных углов ее ориентации в круговом цилиндре при $\gamma R = 3$, $l/R = 0.4$ (ввиду симметрии – при $\delta \geq 0$). Кривая с номером m построена для значения $\vartheta = 0.1(m-1)\pi$. Отметим, что при $\vartheta = \pi/2$ наличие трещины не вносит возмущений в электроупругое состояние цилиндра.

В рассмотренных вариантах расчета задавались следующие значения параметров, определяющих расположение электродов: $\beta_1 = 5\pi/14$, $\beta_2 = 9\pi/14$, $\beta_3 = 19\pi/14$, $\beta_4 = 23\pi/14$.

На фиг. 4 представлены данные, характеризующие распределение величины $\eta = c_{44}^E |U_3 / \Phi^*|$ на контуре кусочно-однородного цилиндра для различных площадей электродного покрытия при $R_1/R_2 = 2$, $l/R_1 = 0.4$, $\vartheta = 0$, $\gamma R = 0.5$ для значений параметров $\beta_1 = \pi/6$, $\beta_2 = 5\pi/6$, $\beta_3 = 7\pi/6$, $\beta_4 = 11\pi/6$ (кривая 1), $\beta_k = (2k-1)\pi/4$ ($k = 1, 2, 3, 4$) (кривая 2) и $\beta_1 = 5\pi/14$, $\beta_2 = 9\pi/14$, $\beta_3 = 19\pi/14$, $\beta_4 = 23\pi/14$ (кривая 3).

Линии уровня модуля амплитуды перемещения в кусочно-однородном цилиндре вблизи первых трех собственных частот колебаний при $l/R = 0.2$ представлен на фиг. 5, а, б, в (ввиду симметрии показана половина сечения). Наиболее светлые зоны отвечают максимальным значениям величины $|U_3|$. В расчетах полагали $\beta_1 = 5\pi/14$, $\beta_2 = 9\pi/14$, $\beta_3 = 19\pi/14$, $\beta_4 = 23\pi/14$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон В.З., Кудрявцев Б.А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
2. *Бардзокас Д.И., Фильштинский М.Л.* Электроупругость кусочно-однородных тел. Сумы: Университетская книга, 2000. 308 с.
3. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
4. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
5. *Бардзокас Д., Кудрявцев Б.А., Сенник Н.А.* О критериях электромеханического разрушения пьезоэлектриков, инициируемого краями электродов // Пробл. прочности. 1994. № 7. С. 42–46.
6. *Партон В.З., Борисковский В.Г.* Динамика хрупкого разрушения. М.: Машиностроение, 1988. 239 с.
7. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Афины, Сумы

Поступила в редакцию
14.VI.2001