УДК 539.3

© 2002 г. Г.Я. Попов

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ НЕСВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНОГО КРУГОВОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА С ВЫРЕЗОМ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ

Ставятся несвязанные задачи термоупругости для конечного кругового полого цилиндра с вырезом по образующей при различных типах граничных условий на всех поверхностях. Это условия задания смещений равными нулю либо скользящей заделки на цилиндрических поверхностях и на гранях выреза и условия задания напряжений на торцах цилиндра (касательные напряжения считаются нулевыми). Полагается, что задача теплопроводности решена и температура известна. Вначале вводятся некоторые вспомогательные функции, связанные со смещениями, и на основании уравнений Ламе выводятся уравнения для этих функций. Затем применяется конечное интегральное преобразование Фурье по полярному углу и конечное преобразование Ганкеля по радиусу. В результате получается одномерная краевая векторная задача для дифференциального уравнения первого порядка, решенная с помощью построенной матрицы Грина. В итоге в рядах построены точные решения поставленных задач.

1. Постановка задач. Рассматриваются стационарные задачи термоупругости [1, 2] для части конечного кругового полого цилиндра, занимающей в цилиндрической системе координат (r, φ, z) область

$$a_0 \leqslant r \leqslant a_1, \quad \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1, \quad h_0 \leqslant z \leqslant h_1 \tag{1.1}$$

По цилиндрическим поверхностям $r = a_i$ $(i = 0, 1)$ и по граням $\varphi = \varphi_i$ $(i = 0, 1)$ заданы смещения u_r, u_φ, u_z либо условия скользящей заделки, т.е.

$$\begin{gathered} u_r(a_i, \varphi, z) = 0, \quad \tau_{r\varphi}(a_i, \varphi, z) = \tau_{rz}(a_i, \varphi, z) = 0; \quad i = 0, 1 \\ u_\varphi(r, \varphi_i, z) = 0, \quad \tau_{\varphi r}(r, \varphi_i, z) = \tau_{z\varphi}(r, \varphi_i, z) = 0; \quad i = 0, 1 \end{gathered} \tag{1.2}$$

На торцевых гранях $z = h_i$ $(i = 0, 1)$ граничные условия могут быть произвольными, но для определенности возьмем такие:

$$\sigma_z(r, \varphi, h_1) = -p^{(i)}(r, \varphi), \quad \tau_{rz}(r_i, \varphi, h_i) = \tau_{z\varphi}(r_i, \varphi, h_i) = 0; \quad i = 0, 1 \tag{1.3}$$

В случае стационарной несвязанной термоупругости температурное поле можно найти предварительно, решив ту или иную краевую задачу для уравнения Лапласа. Поскольку подобные задачи для цилиндрических тел достаточно хорошо изучены [3], будем считать, что температурное поле уже известно. Иной подход к решению краевых задач термоупругости для круговых полых цилиндров был предложен [4] для случая отсутствия граней $\varphi = \varphi_i$ $(i = 0, 1)$.

Заметим, что поставленная таким образом задача эквивалентна решению аналогичной краевой задаче для неоднородных уравнений Ламе с объемными силами специального вида.

2. Преобразование уравнений термоупругости к новой форме. Введем обозначения для смещений в цилиндрической системе координат

$$2G\left\|u_r,\, u_\varphi,\, u_z\right\| = \left\|U,\, V,\, W\right\| \tag{2.1}$$

где G – модуль сдвига, а также функции $Z(r,\,\varphi,\,z)$, $Z^*(r,\,\varphi,\,z)$, определяемые формулами

$$\begin{Vmatrix} Z \\ Z^* \end{Vmatrix} = \frac{1}{r}\left\{ \begin{Vmatrix} rU \\ rV \end{Vmatrix}' \pm \begin{Vmatrix} V^{\cdot} \\ U^{\cdot} \end{Vmatrix} \right\} \tag{2.2}$$

Тогда уравнения термоупругости можно записать в виде [1, 2]

$$\Delta U - r^{-2}(U + 2V^{\cdot}) + \mu_0 \tilde{Z}' = \alpha_\mu T'$$

$$\Delta V - r^{-2}(V - 2U^{\cdot}) + r^{-1}\mu_0 \tilde{Z}^{\cdot} = \alpha_\mu r^{-1} T^{\cdot}$$

$$\Delta W + \mu_0 \tilde{Z}^{,} = \alpha_\mu T^{,}$$

$$\mu_0 = (1 - 2\mu)^{-1}, \quad \alpha_\mu = 4\alpha_T G(1 + \mu)\mu_0, \quad \tilde{Z} = Z + W^{,} \tag{2.3}$$

Здесь μ – коэффициент Пуассона, α_T – коэффициент линейного расширения, $T = T(r,\,\varphi,\,z)$ – температура, Δ – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат; частные производные по r помечены штрихом, по переменной φ – точкой и переменной z – запятой (в верхнем индексе).

Преобразуем уравнения (2.3), для чего первое уравнение умножим на r, продифференцируем по r и разделим на r, второе уравнение продифференцируем по φ и разделим на r. Полученные уравнения сложим, а затем со вторым уравнением из (2.3) проведем ту же операцию, что и над первым уравнением из (2.3) в предыдущем случае, а над первым уравнением из (2.3) ту же операцию, что и в предыдущем случае над вторым, и результаты вычтем. В итоге уравнения (2.3) приводятся к виду

$$\Delta W + \mu_0 \tilde{Z}^{,} = \alpha_\mu T^{,}, \quad \Delta Z + \mu_0 \tilde{Z} = \alpha_\mu \nabla T, \quad \Delta Z^* = 0 \tag{2.4}$$

$$\nabla f(r,\varphi,z) = r^{-1}[rf'[r,\varphi,z)]' + r^{-2} f^{\cdot\cdot}(r,\varphi,z)$$

Если будут решены уравнения (2.4), т.е. найдены функции Z и Z^*, определяемые формулами (2.2), то для отыскания функций U, V, определяющих смещения, следует решить уравнения

$$\nabla \begin{Vmatrix} rU \\ rV \end{Vmatrix} = \frac{1}{r} \begin{Vmatrix} (r^2 Z)' \\ (r^2 Z^*)' \end{Vmatrix} \mp \begin{Vmatrix} Z^{*\cdot} \\ Z^{\cdot} \end{Vmatrix} \tag{2.5}$$

Они получены из (2.2) с помощью операций, аналогичных совершенным над уравнениями (2.3) при получении уравнений (2.4).

3. Интегральное преобразование полученных уравнений по переменной φ. Интегральное преобразование (ИП) полученных уравнений существенно зависит от того, какие условия на гранях $\varphi = \varphi_i$ ($i = 0,\ 1$) поставлены. Если на них заданы смещения, то применяем синус-преобразование Фурье на конечном интервале, считая при этом $\varphi_0 = 0$, т.е. в уравнениях (2.4) переходим к трансформантам

$$X_n(r,z) = \int_0^{\varphi_1} X(r,\varphi,z)\sin\mu_n\varphi\, d\varphi, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{\varphi_1}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

(трансформанты Z_n^* и T_n определяются аналогично). Здесь введены обозначения

$$X_n(r, z) = \left\| \begin{matrix} W_n(r, z) \\ Z_n(r, z) \end{matrix} \right\|, \quad X(r, \varphi, z) = \left\| \begin{matrix} W(r, \varphi, z) \\ Z(r, \varphi, z) \end{matrix} \right\| \text{ и т.д.}$$

Формулы обращения для введенных трансформант имеют вид [5]

$$X(r, \varphi, z) = \frac{2}{\varphi_1} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(r, z) \sin \mu_n \varphi, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{\varphi_1}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

Если же на гранях $\varphi = \varphi_i$ ($i = 0, 1$) заданы условия скользящей заделки, т.е. условия (1.2), то вместо ИП (3.1) следует взять такие:

$$X_n(r, z) = \int_0^{\varphi_1} X(r, \varphi, z) \cos \mu_n \varphi d\varphi, \quad \mu_n = \frac{(n-1)\pi}{\varphi_1}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.3}$$

с формулами обращения [5]

$$X(r, \varphi, z) = \frac{2}{\varphi_1} {\sum_{n=1}^{\infty}}' X_n(r, z) \cos \mu_n \varphi, \quad \mu_n = \frac{(n-1)\pi}{\varphi_1}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

(штрих у знака суммы означает, что первое слагаемое нужно умножить на $\frac{1}{2}$).

Применение ИП (3.1) означает, что выполняются граничные условия

$$W(r, \varphi_i, z) = Z(r, \varphi_i, z) = Z^*(r, \varphi_i, z) = 0, \quad i = 0, 1 \tag{3.5}$$

а применение второго – граничные условия

$$W^{\cdot}(r, \varphi_i, z) = Z^{\cdot}(r, \varphi_i, z) = Z^{*\cdot}(r, \varphi_i, z) = 0, \quad i = 0, 1 \tag{3.6}$$

Если в условиях (1.1) $\varphi_0 = -\pi$, $\varphi_1 = \pi$, т.е. грани $\varphi = \varphi_i$($i = 0$, 1) отсутствуют, то вместо ИП (3.1) и (3.3) следует брать ИП [3]

$$X_n(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(r, \varphi, z) e^{-in\varphi} d\varphi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.7}$$

с формулами обращения [3]

$$X(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n(r, z) e^{in\varphi} \tag{3.8}$$

Если к уравнениям (2.4) применить ИП (3.1), (3.3) и (3.7), то они приобретают вид

$$W_n'' - \mu_*^{-1} \nabla_n W_n + \mu_0 \mu_*^{-1} Z_n' = \alpha_\mu \mu_*^{-1} T_n', \quad Z_n'' - \mu_* \nabla_n Z_n + \mu_0 \nabla_n W' = -\alpha_\mu \nabla_n T_n; \tag{3.9}$$

$$\mu_* = 2(1-\mu)\mu_0 \quad Z_n^{*''} - \nabla_n Z_n^* = 0$$

где

$$\nabla_n f(r, z) = \mu_n^2 r^{-2} f(r, z) - r^{-1} [r f'(r, z)]' \tag{3.10}$$

При этом в случае ИП (3.1) выражение для μ_n берется из (3.1), в случае ИП (3.3) μ_n берется из (3.3), а в случае ИП (3.7) $\mu_n = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

В уравнениях (3.9) сделаем замену

$$X_n(r, z) = X_n(a_1 \rho, a_1 \zeta) = \overline{X}_n(\rho, \zeta) \tag{3.11}$$

$$Z_n^*(r, z) = Z_n^*(a_1 \rho, a_1 \zeta) = \overline{Z}_n^*(\rho, \zeta), \quad T_n(r, z) = T_n(a_1 \rho, a_1 \zeta) = \overline{T}_n(\rho, \zeta)$$

В результате получим

$$
\begin{aligned}
&\overline{W}_n''(\rho,\zeta)-\mu_*^{-1}\nabla_n\overline{W}_n(\rho,\zeta)+a_1\mu_0\mu_*^{-1}\overline{Z}_n'(\rho,\zeta)=a_1\alpha_\mu\mu_*^{-1}\overline{T}_n'(\rho,\zeta)\\
&\overline{Z}''(\rho,\zeta)-\mu_*\nabla_n\overline{Z}_n(\rho,\zeta)-a_1^{-1}\mu_0\nabla_n\overline{w}_n'(\rho,\zeta)=-\alpha_\mu\nabla_n\overline{T}_n(\rho,\zeta) \qquad (3.12)\\
&\overline{Z}_n^{*}{}''(\rho,\zeta)-\nabla_n\overline{Z}_n^*(\rho,\zeta)=0\\
&a=a_0/a_1,\quad \overline{h}_1=a_1^{-1}h_i,\quad i=0,1,\quad \overline{h}_0<\zeta<\overline{h}_1
\end{aligned}
$$

Здесь и всюду далее запятой помечена частная производная по переменной ζ, а штрихом – частная производная по ρ.

4. Сведение полученных уравнений к одномерным. Для сведения уравнений (3.12) к одномерным применим ИП по переменной ρ с выполнением условий

$$
\overline{W}_n(\rho_i,\zeta)=\overline{Z}_n(\rho_i,\zeta)=\overline{Z}_n^{*\prime}(\rho_i,\zeta)=0,\quad i=0,1\ (\rho_0=a,\ \rho_1=1) \qquad (4.1)
$$

для случая, когда на гранях $r=a_i$, $\varphi=\varphi_i$ ($i=0$, 1) заданы смещения, и с выполнением условий

$$
\overline{W}_n'(\rho_i,\zeta)=\overline{Z}_n'(\rho_i,\zeta)=\overline{Z}_n^{*\prime}(\rho_i,\zeta)=0,\quad i=0,1\ (\rho_0=a,\ \rho_1=1) \qquad (4.2)
$$

когда заданы условия (1.2), т.е. в уравнениях (3.12) переходим к трансформантам [3]

$$
\overline{X}_{nk}(\zeta)=\int_a^1\overline{X}_n(\rho,\zeta)\varphi_{n,j}(\rho,\nu)\rho d\rho,\quad j=0,1;\quad \nu=\nu_k^j,\quad k=0,1,\dots \qquad (4.3)
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{n,0}=N_\mu(a\nu)J_\mu(\nu\rho)-J_\mu(a\nu)N_\mu(\nu\rho);\quad \mu=\mu_n=n\pi\varphi_1^{-1},\quad \nu=\nu_k^0\\
&\varphi_{n,1}=N_\mu'(a\nu)J_\mu(\nu\rho)-J_\mu'(a\nu)N_\mu(\nu\rho);\quad \mu=\mu_n=(n-1)\pi\varphi_1^{-1},\quad \nu=\nu_k^1;\quad n,\ k=1,2,\dots
\end{aligned} \qquad (4.4)
$$

($N_\mu(x)$ – функция Неймана, $J_\mu(x)$ – функция Бесселя). Трансформанты $\overline{Z}_{nk}^*(\zeta)$ и $\overline{T}_{nk}(\zeta)$ определяются аналогично.

Собственные числа ν_k^0, ν_k^1 являются положительными корнями трансцендентных уравнений

$$
\begin{aligned}
&N_\mu(a\nu)J_\mu(\nu)-J_\mu(a\nu)N_\mu(\nu)=0;\quad \mu=\mu_n=n\pi\varphi_1^{-1},\quad \nu=\nu_k^0\\
&N_\mu'(a\nu)J_\mu'(\nu)-J_\mu'(a\nu)N_\mu'(\nu)=0;\quad \mu=\mu_n=(n-1)\pi\varphi_1^{-1},\quad \nu=\nu_k^1;\quad n,k=1,2,\dots
\end{aligned} \qquad (4.5)
$$

Формулы обращения для трансформант (4.3) имеют вид [3]

$$
\overline{X}_n(\rho,\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}\overline{X}_{nk}(\zeta)\frac{\varphi_{n,j}(\rho,\nu)}{\left\|\varphi_{n,j}(\rho,\nu)\right\|^2},\quad j=0,1;\quad \nu=\nu_k^j,\quad k=0,1 \qquad (4.6)
$$

где

$$
\begin{aligned}
&2\left\|\varphi_{n,0}(\rho,\nu)\right\|^2=[\varphi_{n,0}'(\nu,\nu)]^2-a^2[\varphi_{n,0}'(\nu a,\nu)],\quad \nu=\nu_k^0,\quad \mu=\mu_n=n\pi\varphi_1^{-1}\\
&2\nu^2\left\|\varphi_{n,1}(\rho,\nu)\right\|^2=(\nu^2-\mu^2)\varphi_{n,1}^2(\nu,\nu)-(\nu^2a^2-\mu^2)\varphi_{n,1}(\nu a,\nu),\quad \nu=\nu_k^1,\\
&\mu=\mu_n=(n-1)\pi\varphi_1^{-1};\quad n,k=1,2,\dots
\end{aligned} \qquad (4.7)
$$

Функции $\varphi_{n,j}(\rho, \nu)$ удовлетворяют уравнению Бесселя, т.е.

$$\nabla_n \varphi_{n,j}(\rho, \nu) = \nu^2 \varphi_{n,l}(\rho, \nu), \quad j = 0, 1; \quad \nu = \nu_k^j, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{4.8}$$

Применение ИП (4.3) к уравнениям (3.12) при учете уравнения (4.8) приводит их к виду

$$\overline{W}''_{nk}(\zeta) - \frac{\nu^2}{\mu_*}\overline{W}_{nk}(\zeta) + \frac{\mu_0 a_1}{\mu_*}\overline{Z}'_{nk}(\zeta) = \frac{\alpha_\mu a_1}{\mu_*}\overline{T}'_{nk}(\zeta)$$

$$\overline{Z}''_{nk}(\zeta) - \mu_* \nu^2 \overline{Z}_{nk}(\zeta) - \frac{\mu_0 \nu^2}{a_1}\overline{W}'_{nk}(\zeta) = -\alpha_\mu \nu^2 \overline{T}_{nk}(\zeta) \tag{4.9}$$

$$\overline{Z}^{*\prime\prime}_{nk}(\zeta) - \nu^2 \overline{Z}^*_{nk}(\zeta) = 0; \quad \overline{h}_0 < \zeta < \overline{h}_1$$

При этом в случае применения ИП (4.3) к уравнениям (3.12) при $j = 0$ (выполняются условия (4.1)) $\nu = \nu_k^0 (k = 1, 2, \ldots)$, а в случае, когда в соотношениях (4.3) $j = 1$ (выполняются условия (4.2)), $\nu = \nu_k^1 (k = 1, 2, \ldots)$. Если же в условиях (1.1) $\varphi_0 = -\pi$, $\varphi_1 = \pi$, то в формулах (4.4)–(4.10) параметр μ должен быть зафиксирован выражением $\mu = \mu_n = n$.

5. Построение решения полученных одномерных дифференциальных уравнений. Решение будем строить так, чтобы удовлетворялись условия (1.3). С целью записать последние в терминах введенных функций (2.2) рассмотрим аналогичные (2.2) комбинации для касательных напряжений τ_{zr} и $\tau_{z\varphi}$

$$\left\| \begin{matrix} \tau(r, \varphi, z) \\ \tau^*(r, \varphi, z) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{r}\left\{ \left\| \begin{matrix} (r\tau_{rz})' \\ (r\tau_{z\varphi})' \end{matrix} \right\| \pm \left\| \begin{matrix} \tau_{z\varphi} \\ \tau_{zr} \end{matrix} \right\|^{\cdot} \right\} \tag{5.1}$$

Используя даваемую законом Гука связь между напряжениями и смещениями в цилиндрической системе координат [2], получаем

$$2\tau = \nabla W + Z^{\cdot}, \quad 2\tau^* = Z^{*\cdot}$$

или, после применения ИП, даваемых формулами (3.1), (3.7) и замены переменных, согласно (3.11),

$$2a_1^2 \overline{\tau}_n(\rho, \zeta) = a_1 \overline{Z}'_n - \nabla_n \overline{W}_n, \quad 2a_1 \overline{\tau}^*_n(\rho, \zeta) = \overline{Z}^{*\cdot}_n \tag{5.2}$$

Последние два условия из (1.3) в силу соотношений (5.1) переходят в условия $\tau(r, \varphi, h_i) = \tau^*(r, \varphi, h_i) = 0$ $(i = 0, 1)$, которые, согласно равенствам (5.2), эквивалентны таким условиям:

$$a_1 \overline{Z}^{\cdot}_n(\rho, \overline{h}_i) - \nabla_n \overline{W}_n(\rho, \overline{h}_i) = 0, \quad \overline{Z}^{*\cdot}_n(\rho, \overline{h}_i) = 0; \quad i = 0, 1 \tag{5.3}$$

В результате в силу соотношений (3.5), (3.6), (4.1), (4.2) и (5.3) приходим к однородной краевой задаче для функции $\overline{Z}^*_n(\rho, \zeta)$, поэтому

$$\overline{Z}^*_n(\rho, \zeta) = 0 \tag{5.4}$$

Применив ко второму равенству из (5.3) ИП (4.3), получим

$$a_1^{-1} \nu^2 \overline{W}_n(\overline{h}_i) - \overline{Z}'_{nk}(\overline{h}_i) = 0, \quad i = 0, 1 \tag{5.5}$$

Так как нормальное напряжение σ_z в силу закона Гука [2] и при учете равенств (2.2) выражается формулой

$$(1 - 2\mu)\sigma_z(r, \varphi, z) = \mu Z + (1 - \mu)W^{\cdot} - (1 - 2\mu)\alpha_\mu T$$

первое граничное условие из (1.3) при учете выражений (3.11) и указанных выше ИП запишется так:

$$a_1^{-1}(1-\mu)\overline{W}'_{nk}(\bar{h}_i)+\mu\overline{Z}_{nk}(\bar{h}_i)=-(1-2\mu)g_{nk}^{(i)}$$

$$g_{nk}^{(i)}=p_{nk}^{(i)}-\alpha_\mu\overline{T}_{nk}(\bar{h}_i);\quad i=0,1 \tag{5.6}$$

Если в качестве неизвестных системы (4.9) ввести функции

$$y_0(\zeta)=\overline{W}_{nk}(\zeta),\quad y_1(\zeta)=\overline{W}'_{nk}(\zeta),\quad y_2(\zeta)=\overline{Z}_{nk}(\zeta),\quad y_3(\zeta)=\overline{Z}'_{nk}(\zeta) \tag{5.7}$$

представляющие собой составляющие искомого вектора $y(\zeta)$, то указанную систему можно записать в следующем векторном виде:

$$\mathbf{y}'(\zeta)-\mathbf{P}_k\mathbf{y}(\zeta)=\mu_*^{-1}\alpha_\mu\mathbf{f}(\zeta),\quad \bar{h}_0<\zeta<\bar{h}_1 \tag{5.8}$$

где

$$\mathbf{y}(\zeta)=\begin{Vmatrix}\mathbf{y}_0(\zeta)\\ \mathbf{y}_1(\zeta)\\ \mathbf{y}_2(\zeta)\\ \mathbf{y}_3(\zeta)\end{Vmatrix},\quad \mathbf{P}_k=\begin{Vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \mu_k^{-1}\nu^2 & 0 & 0 & -\mu_*^{-1}a_1\mu_0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & a_1^{-1}\mu_0\nu^2 & \mu_*\nu^2 & 0\end{Vmatrix},\quad \mathbf{f}(\xi)=\begin{Vmatrix}0\\ a_1\overline{T}'_{nk}(\zeta)\\ 0\\ -\mu_*\nu^2\overline{T}_{nk}(\zeta)\end{Vmatrix} \tag{5.9}$$

Чтобы к дифференциальному уравнению (5.8) присоединить краевые условия, построим граничный функционал

$$\mathbf{U}[\mathbf{y}(\zeta)]=\mathbf{A}\mathbf{y}(\bar{h}_0)+\mathbf{B}\mathbf{y}(\bar{h}_1) \tag{5.10}$$

и вектор γ, определяемые формулами

$$\mathbf{A}=\begin{Vmatrix}a_1^{-1}\nu^2 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_1^{-1}(1-\mu) & \mu & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{Vmatrix},\quad \gamma=\begin{Vmatrix}0\\ 0\\ g_{nk}^{(0)}\\ g_{nk}^{(1)}\end{Vmatrix} \tag{5.11}$$

(матрица **B** получается из матрицы **A** перестановкой первых двух и последних двух строк). Тогда, чтобы были удовлетворены условия (5.5) и (5.6), записанные с учетом обозначений (5.7), нужно к уравнению (5.8) присоединить граничные условия

$$\mathbf{U}[\mathbf{y}(\zeta)]=-(1-2\mu)\gamma \tag{5.12}$$

6. Решение полученной векторной краевой задачи. Продлив нулем правую часть уравнения (5.8) на всю вещественную ось, применим к нему преобразование Фурье

$$\mathbf{y}_\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{y}(\zeta)e^{i\alpha\zeta}d\zeta$$

Получаем решение в виде

$$\mathbf{y}(\zeta)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{f}(\zeta)\mathbf{\Phi}(\zeta-s)ds,\quad \mathbf{\Phi}(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[-i\alpha\mathbf{I}-\mathbf{P}_k]^{-1}e^{-i\alpha y}d\alpha$$

где $\mathbf{\Phi}(y)$ – фундаментальная матрица-функция [6, 7] неоднородного уравнения (5.8). Ее можно записать и в таком виде:

$$\mathbf{\Phi}(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}[\xi\mathbf{I}-\mathbf{P}_k]^{-1}e^{\xi y}d\xi,\quad y=\zeta-s \tag{6.1}$$

Из выражения для характеристического многочлена матрицы $\mathbf{P}_k$ [8, 7]

$$\det(\xi\mathbf{I}-\mathbf{P}_k)=Q_4(\xi)=\xi^4-2\xi^2\nu^2+\nu^4=(\xi^2-\nu^2)^2 \tag{6.2}$$

следует, что он имеет два кратных корня: ν и $-\nu$. Тогда присоединенную матрицу $\Delta^*(\xi)$ для матрицы $\mathbf{P}_k$ можно представить в виде [8, 7]

$$\Delta^*(\xi)=\sum_{j=0}^{3}\xi^j\Delta_{3-j} \tag{6.3}$$

$$\Delta_0=\mathbf{I},\ \Delta_1=\mathbf{P}_k,\ \Delta_2=\mathbf{P}_k^2-2\nu^2\mathbf{P}_k,\ \Delta_3=\mathbf{P}_k^3-2\nu^2\mathbf{P}_k=-\nu^4\mathbf{P}_k^{-1}$$

и получить равенство

$$(\xi\mathbf{I}-\mathbf{P}_k)^{-1}=Q_4^{-1}\sum_{j=0}^{3}\xi^j\Delta_{3-j} \tag{6.4}$$

Подставив выражение (6.4) в соотношение (6.1), получим

$$\mathbf{\Phi}(y)=\sum_{j=0}^{3}\Delta_{3-j}\left(\frac{d}{dy}\right)^j\psi(y),\quad y=\zeta-s \tag{6.5}$$

$$\psi(y)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{-i\infty}^{+i\infty}\frac{1}{(\xi-\nu)^2}e^{\xi y}\frac{d\xi}{(\xi+\nu)^2}=\frac{\nu|y|+1}{4\nu^3}e^{-\nu|y|} \tag{6.6}$$

(учтено соотношение (6.2)).

Поскольку граничные условия краевой задачи неоднородны, для ее решения понадобится не только матрица-функция Грина [6, 7], но и базисная матрица-функция $\mathbf{\Psi}(\zeta)$, являющаяся решением матричной краевой задачи

$$\mathbf{\Psi}'(\zeta)-\mathbf{P}_k\mathbf{\Psi}(\zeta)=0,\quad \mathbf{U}[\mathbf{\Psi}(\zeta)]=\mathbf{I};\quad \bar{h}_0<\zeta<\bar{h}_1 \tag{6.7}$$

Для ее построения [6, 7] следует располагать решением $\mathbf{Y}(\zeta)$ матричного дифференциального уравнения из (6.7). Можно показать, что решением его будет интеграл [6, 7]

$$\mathbf{Y}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C(\xi\mathbf{I}-\mathbf{P}_k)^{-1}e^{\zeta\xi}d\xi \tag{6.8}$$

где контур C охватывает все нули характеристического многочлена (6.2). Подставив выражение (6.4) в соотношение (6.8) и взяв вычеты в кратных полюсах ν и $-\nu$, находим

$$\mathbf{Y}(\zeta)=\sum_{j=0}^{3}\Delta_{3-j}\left(\frac{d}{d\zeta}\right)^j\psi_*(\zeta),\quad \psi_*(\zeta)=\frac{\nu\zeta\operatorname{ch}\nu\zeta-\operatorname{sh}\nu\zeta}{2\nu^3} \tag{6.9}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решением краевой задачи (6.7) является матрица

$$\mathbf{\Psi}(\zeta)=\mathbf{Y}(\zeta)(\mathbf{U}[\mathbf{Y}(\zeta)])^{-1} \tag{6.10}$$

а матрицей-функцией Грина [6, 7] краевой задачи (5.8), (5.12) является матрица

$$\mathbf{G}(\zeta,s)=\mathbf{\Phi}(\zeta-s)-\mathbf{\Psi}(\zeta)\mathbf{U}[\mathbf{\Phi}(\zeta-s)] \tag{6.11}$$

и стало быть [6, 7], ее решением будет вектор

$$\mathbf{y}(\zeta)=\frac{\alpha_\mu}{\mu_k}\int_{\bar{h}_0}^{\bar{h}_1}\mathbf{G}(\zeta,s)\mathbf{f}(s)ds-(1-2\mu)\mathbf{\Psi}(\zeta)\boldsymbol{\gamma} \tag{6.12}$$

7. Завершение построения точных решений поставленных задач. Таким образом, трансформанта $\overline{W}_{nk}(\zeta)$ смещения

$$u_z(r,\varphi,z) = 2GW(a_1\rho,\varphi,a_1,\zeta) = 2G\overline{W}(\rho,\varphi,\zeta)$$

и трансформанты $\overline{Z}_{nk}(\zeta)$, $\overline{Z}^*_{nk}(\zeta) \equiv 0$ полностью определены, но для полного решения необходимо найти трансформанты $\overline{U}_{nk}(\zeta)$, $\overline{V}_{nk}(\zeta)$ смещений

$$u_r(r,\varphi,z) = 2GU(a_1,\rho,\varphi,a_1\zeta) = 2G\overline{U}(\rho,\varphi,\zeta), \quad u_\varphi(r,\varphi,z) = 2G\overline{V}(\rho,\varphi,\zeta)$$

Для их отыскания будем использовать уравнения (2.5). Если при этом учесть равенство (5.4) и замену (3.11), а также обозначения

$$rY(r,\varphi,z) = a_1\rho\overline{Y}(\rho,\varphi,\xi) = a_1\overline{Y}^*(\rho,\varphi,\xi)$$

$$Y(r,\varphi,z) = \begin{Vmatrix} U(r,\varphi,z) \\ V(r,\varphi,z) \end{Vmatrix}, \quad \overline{Y}(\rho,\varphi,\xi) = \begin{Vmatrix} \overline{U}(\rho,\varphi,\xi) \\ \overline{V}(\rho,\varphi,\xi) \end{Vmatrix} \text{ и т.д.} \tag{7.1}$$

то можно записать дифференциальные уравнения

$$\nabla\overline{Y}^*(\rho,\varphi,\zeta) = \begin{Vmatrix} a_1\rho^{-1}[\rho^2\overline{Z}(\rho,\varphi,\zeta)]' \\ a_1\overline{Z}^*(\rho,\varphi,\zeta) \end{Vmatrix} \tag{7.2}$$

К этим уравнениям поставим такие граничные условия, чтобы выполнялись условия жесткого защемления (заданы смещения) на гранях $\varphi = \varphi_i$ ($i = 0, 1$), т.е.

$$\overline{Y}^*(\rho,\varphi_i,\zeta) = 0, \quad i = 0,1 \tag{7.3}$$

Эти условия будут выполнены, если к уравнениям (7.2) применить ИП (3.1), т.е.

$$\overline{Y}_n^*(\rho,\zeta) = \int_0^{\varphi_1} \overline{Y}_n^*(\rho,\varphi,\zeta)\sin\mu_n\varphi d\varphi, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{\varphi_1}, \quad n = 1,2,\ldots,(\varphi_0 = 0) \tag{7.4}$$

В результате уравнения (7.2) примут вид

$$-\nabla_n\overline{Y}_n^*(\rho,\zeta) = \frac{a_1}{\rho}\begin{Vmatrix} (\rho^2\overline{Z}_n)' \\ -\rho\mu_n\overline{Z}_n^c \end{Vmatrix}, \quad \overline{Z}_n^c = \int_0^{\varphi_1} \overline{Z}(\rho,\varphi,\zeta)\cos\mu_n\varphi d\varphi \tag{7.5}$$

причем в формуле (3.10), определяющей оператор ∇_n, следует взять μ_n из (7.4) и заменить r, z на ρ, ζ.

К этим дифференциальным уравнениям следует присоединить граничные условия, обеспечивающие жесткое защемление граней $r = a_i$ ($i = 0, 1$), которые при учете обозначений (7.1) и преобразований (7.4) запишутся так:

$$\overline{U}_n^*(\rho_i,\zeta) = \overline{V}_n^*(\rho_i,\zeta) = 0, \quad i = 0,1(\rho_0 = a, \rho_1 = 1)$$

Последние будут удовлетворены, если для решения уравнений (7.5) применить ИП (4.3) при $j = 0$, т.е.

$$\overline{Y}_{nk}^*(\zeta) = \int_a^1 \overline{Y}_n^*(\zeta)\varphi_{n,0}(\rho,\nu)\rho d\rho, \quad \nu = \nu_k^0, \quad k = 1,2,\ldots \tag{7.6}$$

В результате найдем

$$\begin{aligned} \overline{U}_{nk}^*(\zeta) &= \frac{a_1}{\nu^2}\int_a^1 \overline{Z}_n\varphi'_{n,0}(\rho,\nu)\rho^2 d\rho, \quad \nu = \nu_k^0, \quad k = 1,2,\ldots \\ \overline{V}_{nk}^*(\zeta) &= \frac{a_1\mu_n}{\nu^2}\int_a^1 \overline{Z}_n^c(\rho,\zeta)\varphi_{n,0}(\rho,\nu)\rho d\rho, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{\varphi_1} \end{aligned} \tag{7.7}$$

Таким образом, трансформаторы смещений $\overline{U}_{nk}^{*}(\zeta), \overline{V}_{nk}^{*}(\zeta)$ и $\overline{W}_{nk}(\zeta)$ (последняя определена формулами (6.12) и (5.7)) найдены, и по ним с помощью формул обращения (4.6), (3.2), а также формул (2.1), (6.12) и (7.1) найдем и сами смещения, т.е. точное решение задачи в случае, когда грани $r = a_i$, φ_i ($i = 0, 1$) жестко защемлены.

Если в условиях (1.1) $\varphi_0 = -\pi$, $\varphi_1 = \pi$ и отсутствуют грани $\varphi = \varphi_i$ ($i = 0,1$), то вместо преобразований (7.4) к уравнениям (7.2) следует применить преобразования

$$\overline{Y}_n^*(\rho,\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{Y}_n^*(\rho,\varphi,\zeta)e^{-in\varphi}d\varphi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (7.8)$$

В результате придем к уравнениям (7.5), в которых следует принять $\overline{Z}_n^c = \overline{Z}_n$, $\mu_n = -in$, а величины $\overline{Z}_n$ брать согласно ИП (3.7) при учете замен (3.11). Решив эти уравнения с помощью преобразований (7.6), найдем трансформанты (7.7), в которых следует внести указанные изменения. Искомые смещения находим аналогично, как и в предыдущем случае, только вместо формул обращения (3.2) следует использовать формулы (3.8).

Перейдем теперь к случаю скользящей заделки, т.е. когда имеют место условия (1.2). Содержащиеся там напряжения, согласно обозначениям (2.1), можно записать [2] в виде

$$2r\tau_{\varphi r} = U^{\cdot} + r^2(r^{-1}\overline{V})', \quad 2r\tau_{\varphi z} = r\overline{V}^{\cdot} + \overline{W}^{\cdot}, \quad 2\tau_{rz} = W' + U^{\cdot}$$

или в обозначениях (3.11) и (7.1) в виде

$$2a_1\rho\tau_{\varphi r} = \overline{U}^{\cdot} + \rho\overline{V}' - \overline{V}, \; 2a_1\rho\tau_{\varphi z} = \rho\overline{V}^{\cdot} + \overline{W}^{\cdot}, \quad 2a_1\tau_{rz} = \overline{W}' + \overline{U}^{\cdot} \qquad (7.9)$$

Отсюда если учесть, что условия $\overline{W}^{\cdot}(\rho,\varphi_i,\zeta) = 0$ $(i = 0,1)$ уже выполнены в силу условий (3.6), то последние три условия (1.2) будут удовлетворены, коль скоро $\overline{U}^{\cdot}(\rho,\varphi_i,\zeta) = \overline{V}^{\cdot}(\rho,\varphi_i,\zeta) = 0$ $(i = 0,1)$, или в обозначениях (7.1)

$$\overline{U}^{*\cdot}(\rho,\varphi_i,\zeta) = \overline{V}^{*\cdot}(\rho,\varphi_i,\zeta) = 0, \quad i = 0,1 \qquad (7.10)$$

Если учесть, что при нахождении $\overline{W}$ выполнено условие (4.2), то для выполнения первых трех услвоиях из (1.2) достаточно реализовать, согласно соотношениям (7.9), условия

$$\overline{U}(\rho_i,\varphi,\zeta) = 0, \quad [\rho\overline{V}' - \overline{V}]_{\rho=\rho_i} = 0, \quad i = 0,1, \quad \rho_0 = a, \quad \rho_1 = 1$$

или в обозначениях (7.1) условия

$$\overline{U}^*(\rho_i,\varphi,\zeta) = 0, \quad [\rho\overline{V}^{*\prime} - 2\rho^{-1}\overline{V}^*]_{\rho=\rho_i} = 0, \quad i = 0,1, \quad \rho_0 = a, \quad \rho_1 = 1 \qquad (7.11)$$

Чтобы удовлетворить условиям (7.10), в уравнениях (7.2) переходим к трансформантам соответственно (всюду далее $n, k = 1, 2, \ldots$)

$$\overline{U}_n^*(\rho,\zeta) = \int_0^{\varphi_1} \cos\mu_n\varphi\overline{U}^*(\rho,\varphi,\zeta)d\varphi, \quad \mu_n = (n-1)\pi\varphi_1^{-1}(\varphi_0 = 0) \qquad (7.12)$$

$$\overline{V}_n^*(\rho,\zeta) = \int_0^{\varphi_1} \sin\mu_n\varphi\overline{V}^*(\rho,\varphi,\zeta)d\varphi, \quad \mu_n = n\pi\varphi_1^{-1}\,(\varphi_0 = 0) \qquad (7.13)$$

При этом уравнения (7.2) перейдут в следующие:

$$-\nabla\overline{U}_n^*(\rho,\zeta) = a_1\rho^{-1}[\rho^2\overline{Z}_n(\rho,\zeta)]', \quad \mu_n = (n-1)\pi\varphi_1^{-1} \qquad (7.14)$$

$$-\nabla\overline{V}_n^*(\rho,\zeta) = a_1\mu_n\overline{Z}_n^0(\rho,\zeta), \quad \mu_n = n\pi\varphi_1^{-1} \qquad (7.15)$$

Здесь $\overline{Z}_n$ берется согласно (3.3), а для $\overline{Z}_n^0$ берется та же формула, только μ_n следует брать согласно (7.13).

Чтобы удовлетворить первому условию (7.11), в уравнении (7.14) перейдем к трансформантам по формуле (7.6).

$$\overline{U}_{nk}^*(\zeta) = \frac{a_1}{\nu^2}\int_a^1 \rho^2 \overline{Z}_n(\rho,\zeta)\varphi'_{n,0}(\rho,\nu)d\rho, \quad \nu = \nu_k^0 \tag{7.16}$$

Для удовлетворения второму условию (7.11) следует к уравнению (7.15) применить ИП [3]

$$\overline{V}_{nk}^*(\zeta) = \int_a^1 \rho \overline{V}_{nk}^*(\rho,\zeta)\varphi_{n*}(\rho,\nu)d\rho, \quad \nu = \nu_k^* \tag{7.17}$$

в котором ядро определяется формулой

$$a\varphi_{n*} = J_\mu(\nu\rho)[\nu a N'_\mu(a\nu) - N_\mu(a\nu)] - N_\mu(\nu\rho)[\nu a J'_\mu(a\nu) - J_\mu(a\nu)], \quad \mu = \mu_n = n\pi\varphi_1^{-1}$$

причем в качестве ν следует брать корни трансцендентного уравнения

$$[\nu J'_\mu(\nu) - J_\mu(\nu)][\nu a N'_\mu(a\nu) - N_\mu(a\nu)] - [\nu N'_\mu(\nu) - N_\mu(\nu)][\nu a J'_\mu(a\nu) - J_\mu(a\nu)] = 0,$$

$$\nu = \nu_k^* \tag{7.18}$$

В результате из уравнения (7.15) найдем

$$\overline{V}_{nk}^*(\zeta) = \frac{a_1\mu_n}{\nu^2}\int_0^{\varphi_1}\int_a^1 \rho\overline{Z}(\rho,\varphi,\zeta)\varphi_{n*}(\rho,\nu)\cos\mu_n\varphi d\varphi d\rho, \quad \nu = \nu_k^*, \quad \mu_n = n\pi\varphi_1^{-1} \tag{7.19}$$

Формула обращения для этой трансформанты имеет вид [3]

$$\overline{V}_n^*(\rho,\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n*}(\rho,\nu)}{\|\varphi_{n*}(\rho,\nu)\|^2}\overline{v}_{nk}^*(\zeta) \tag{7.20}$$

$$2\nu^2\|\varphi_{n*}(\rho,\nu)\|^2 = \nu^2[\varphi'_{n*}(\nu,\nu)]^2 + (\nu^2-\mu_n^2)\varphi_{n*}^2(\nu,\nu) - \nu^2a^2[\varphi'_{n*}(\nu,\nu)]^2 - (\nu^2a^2-\mu_n)^2 \times$$

$$\times\varphi_{n*}^2(\nu a,\nu), \quad \nu = \nu_k^*, \quad \mu = \mu_n = n\pi\varphi_1^{-1}$$

Таким образом, трансформанты смещений $\overline{U}_{nk}^*(\zeta), \overline{V}_{nk}^*(\zeta)$ и $\overline{W}_{nk}^*(\zeta)$ найдены и определяются формулами (7.16), (7.19) и (6.12), (5.7). По формулам обращения (7.20), (4.6) и (3.2), (3.4) найдем их оригиналы, а с помощью формул (2.1), (6.12) и (7.1) и сами смещения и тем самым получим точное решение задачи для случая, когда на гранях $r = a_i$, $\varphi = \varphi_i$ ($i = 0, 1$) заданы условия скользящей заделки (1.2).

Если в условиях (1.1) $\varphi_0 = -\pi$, $\varphi_1 = \pi$ и отсутствуют грани $\varphi = \varphi_i$ ($i = 0, 1$), то вместо ИП (7.12) и (7.13) следует применить к уравнениям (7.2) ИП (7.8). В результате они перейдут в уравнения (7.14), (7.15), в которых надлежит принять $\mu_n = -in$, а $\overline{Z}_n$ и $\overline{Z}_n^0$ взять по формуле (3.7). К видоизмененным таким образом уравнениям (7.14) и (7.15) применяем ИП (7.6) и (7.17), в которых следует принять $\mu_n = n$, а также $\nu = \nu_n^0$, являющимися корнями первого уравнения из (4.5) и $\nu = \nu_n^*$, являющимися корнями уравнения (7.18). В последнем уравнении следует принять $\mu = n$. В результате получим трансформанты $\overline{U}_{nk}^*(\zeta)$, $\overline{V}_{nk}^*(\zeta)$ и, как и в предыдущем случае, найдем смещения, тем самым завершив построение точного решения поставленной задачи.

Для предлагаемого метода существенно, чтобы грани $r = a_i$, $\varphi = \varphi_i$ ($i = 0, 1$) были либо жестко защемлены, либо на них выполнялись условия скользящей заделки, причем при изложении метода ради сокращения выкладок считалось, что на всех гранях выполняются однотипные граничные условия. Изложенные построения легко обобщаются на случай, когда граничные условия не однотипны. Важно только, чтобы каждый раз вид граничных условий на гранях не выходил за рамки оговоренного выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коваленко А.Д.* Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1965. 203 с.
2. *Nowacki W.* Teoria Sprężystosci. Warszawa: PWN, 1973 = *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теплопроводности твердых тел. М.: Высш. шк., 1979. 415 с.
4. *Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Черных В.А.* Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высш. шк., 1975. 526 с.
5. *Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М.* Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами (справочное пособие). М.: Наука, 1986. 303 с.
6. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 324 с.
7. *Попов Г.Я., Абдыманапов С.А., Ефимов В.В.* Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы: Изд.-во Рауан, 1999. 113 с.
8. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Гостехтеориздат, 1954. 491 с.

Одесса

Поступила в редакцию
27.VI.2001