УДК 539.3

© 2002 г. Г.Я. Попов

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ НЕСВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ УСЕЧЕННОГО КРУГОВОГО ПОЛОГО КОНУСА С ВЫРЕЗОМ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ

Рассматривается упругое тело конечных размеров в форме усеченного кругового полого конуса с вырезом вдоль образующей. Для такого тела ставится несвязанная задача термоупругости при различных типах граничных условий на всех поверхностях. Это условия задания перемещений либо скользящей заделки на поверхностях с фиксированными угловыми координатами и условия задания напряжений на поверхностях с фиксированной радиальной координатой (касательные напряжения считаются нулевыми). Предполагается, что температура – заданная функция всех сферических координат. Вначале вводятся некоторые вспомогательные функции, связанные с перемещениями, и на основании уравнений Ламе выводятся уравнения для этих функций. Затем применяется конечное интегральное преобразование Фурье по одной из угловых переменных. После этого в результате решения некоторых задач Штурма – Лиувилля строится и применяется к уравнениям по другой угловой переменной новое интегральное преобразование. В результате получается одномерная система дифференциальных уравнений, для решения которых специальным образом применяется интегральное преобразование Меллина. В итоге в рядах построены точные решения нескольких задач термоупругости для рассматриваемого тела.

1. Постановка задач. Рассматриваются стационарные задачи несвязанной термоупругости для тела, заполняющего область, описываемую в сферической системе координат (r, θ, φ) соотношениями

$$a_0 \leqslant r \leqslant a_1, \quad \omega_0 \leqslant \theta \leqslant \omega_1, \quad \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 \tag{1.1}$$

Считается, что температурное поле $T(r, \theta, \varphi)$, отыскиваемое из решения достаточно простой гармонической краевой задачи, известно. На конических гранях $\theta = \omega_i$ ($i = 0, 1$) заданы смещения u_r, u_θ, u_φ либо условия скользящей заделки

$$u_\theta |_{\theta=\omega_i} = 0, \quad \tau_{\theta r} |_{\theta=\omega_i} = \tau_{\theta_\varphi} |_{\theta=\omega_i} = 0; \quad i = 0,1 \tag{1.2}$$

На плоских гранях $\varphi = \varphi_i$ ($i = 0, 1$) либо заданы смещения, либо тоже условия скользящей заделки

$$u_\varphi |_{\varphi=\varphi_i} = 0, \quad \tau_{\varphi r} |_{\varphi=\varphi_i} = \tau_{\varphi\theta} |_{\varphi=\varphi_i} = 0; \quad i = 0,1 \tag{1.3}$$

На сферических гранях $r = a_i$ ($i = 0, 1$) условия могут быть произвольными, но для определенности берутся условия первой основной задачи

$$\sigma_r |_{r=a_i} = -p_i(\theta,\varphi), \quad \tau_{r\theta} |_{r=a_i} = \tau_{r\varphi} |_{r=a_i} = 0; \quad i = 0,1 \tag{1.4}$$

Ниже строятся точные решения сформулированных задач.

2. Преобразование уравнений термоупругости на основе введения новых неизвестных функций. Следуя предложенному ранее подходу [1], вместо смещений (G – модуль сдвига)

$$2Gu_r = u, \quad 2Gu_\theta = V, \quad 2Gu_\varphi = W \tag{2.1}$$

вводим функции

$$\left\| \begin{matrix} Z(r,\theta,\varphi) \\ Z^*(r,\theta,\varphi) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\sin\theta} \left\{ \left\| \begin{matrix} V\sin\theta \\ W\sin\theta \end{matrix} \right\|^{\cdot} \pm \left\| \begin{matrix} W \\ V \end{matrix} \right\|^{,} \right\} \tag{2.2}$$

Здесь и ниже производные по переменной r будем помечать штрихом, по θ – точкой и по φ – запятой (в верхнем индексе).

Уравнения термоупругости в сферической системе координат при учете соотношений (2.1), (2.2) записываются в виде [2, 3]

$$\Delta U - 2U - 2Z + \frac{r^2}{1-2\mu}\left(\frac{\tilde{Z}}{r}\right)' = \alpha_\mu r^2 T'$$

$$\Delta V + 2U^{\cdot} - \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{\sin^2\theta} W^{,} - \frac{V}{\sin\theta} + \frac{r\tilde{Z}^{\cdot}}{1-2\mu} = \alpha_\mu r T^{\cdot} \tag{2.3}$$

$$\Delta W + \frac{2U^{,}}{\sin\theta} - \frac{2\operatorname{ctg}\theta}{\sin\theta} V^{,} - \frac{W}{\sin^2\theta} + \frac{r\tilde{Z}^{,}}{(1-2\mu)\sin\theta} = \frac{\alpha_\mu r T^{,}}{\sin\theta}$$

где

$$\Delta U = (r^2U')' + \nabla U \nabla U = \frac{(\sin\theta U^{\cdot})^{\cdot}}{\sin\theta} + \frac{u^{,,}}{\sin^2\theta}\alpha_\mu = 4G\frac{1+\mu}{1-2\mu}\alpha_T \tag{2.4}$$

$$\tilde{Z} = \frac{(r^2U)'}{r^2} + Z$$

(μ – коэффициент Пуассона, α_T – коэффициент линейного расширения).

Второе и третье уравнения системы (2.3) подвергнем дальнейшему преобразованию, для чего второе уравнение умножим на sin θ, продифференцируем по θ и разделим на sin θ, третье же уравнение продифференцируем по φ и разделим на sin θ, полученные уравне-ния сложим. Затем выполним над третьим уравнением из (2.3) такую же операцию, как в предыдущем случае над вторым, а над вторым такую же операцию, как в предыдущем случае над третьим. В результате вместо системы (2.3) будем иметь

$$\Delta U - 2(U+Z) + \mu_0[(r^2U')' + rZ' - Z\} = \alpha_\mu r^2 T' \tag{2.5}$$

$$\Delta Z + 2\nabla U + \mu_0[r^{-1}(\nabla U r^2)' + \nabla Z] = \alpha_\mu r \nabla T, \qquad \Delta Z^* = 0$$

Если функции Z (r, θ, φ) и Z^* (r, θ, φ) будут найдены, то можно показать [1], что функции V (r, θ, φ) и W (r, θ, φ) найдутся из уравнений

$$\nabla\left(\sin\theta \left\| \begin{matrix} V \\ W \end{matrix} \right\|\right) = \frac{1}{\sin\theta}\left(\sin^2\theta \left\| \begin{matrix} Z \\ Z^* \end{matrix} \right\|\right)^{\cdot} \mp \left\| \begin{matrix} Z^* \\ Z \end{matrix} \right\|^{,} \tag{2.6}$$

3. Интегральное преобразование полученных уравнений по переменной φ. Осуществление интегрального преобразования (ИП) по переменной φ зависит от того, какие граничные условия поставлены на гранях $\varphi = \varphi_i$ ($i = 0, 1$). Если на них заданы смещения, то для уравнений (2.5) поставим такие граничные условия:

$$U(r,\theta,\varphi_i) = Z(r,\theta,\varphi_i) = Z^*(r,\theta,\varphi_i) = 0, \quad i = 0,1 \tag{3.1}$$

$$U(r,\omega_i,\varphi) = Z(r,\omega_i,\varphi) = Z^*(r,\omega_i,\varphi) = 0, \quad i = 0,1 \tag{3.2}$$

Если же заданы условия скользящей заделки (1.3) и (1.2), то вместо условий (3.1), (3.2) берем такие:

$$U^{\cdot}(r,\theta,\varphi_i) = Z^{\cdot}(r,\theta,\varphi_i) = Z^{*\cdot}(r,\theta,\varphi_i) = 0, \quad i = 0,1 \tag{3.3}$$

$$U^{\cdot}(r,\omega_i,\varphi) = Z^{\cdot}(r,\omega_i,\varphi) = Z^{*\cdot}(r,\omega_i,\varphi) = 0, \quad i = 0,1 \tag{3.4}$$

Чтобы условия (3.1) были выполнены, следует к уравнениям (2.5) применить (полагая $\varphi_0 = 0$) ИП [4]

$$X_n(r,\theta) = \int_0^{\varphi_1} X(r,\theta,\varphi)\sin\mu_n\varphi d\varphi, \qquad \mu_n = \frac{n\pi}{\varphi_1}, \qquad n = 1,2,\ldots \tag{3.5}$$

с формулой обращения [4]

$$X(r,\theta,\varphi) = \frac{2}{\varphi_1}\sum_{n=1}^{\infty} X_n(r,\theta)\sin\mu_n\varphi \tag{3.6}$$

Здесь и далее использованы обозначения

$$X_n(r,\theta) = \begin{Vmatrix} U_n(r,\theta) \\ Z_n(r,\theta) \end{Vmatrix}, \qquad X(r,\theta,\varphi) = \begin{Vmatrix} U(r,\theta,\varphi) \\ Z(r,\theta,\varphi) \end{Vmatrix} \text{ и т.д.}$$

Для $Z_n^*(r,\theta)$, $T_n(r,\theta)$ берутся аналогичные формулы и такие же формулы обращения. В результате вместо уравнений (2.5) будем иметь

$$\begin{gathered}
(r^2U_n')' - \mu_*^{-1}[\nabla_n^* U_n + 2U_n + 2\mu' Z_n - \mu_0 r Z_n' - \alpha_\mu r^2 T_n'] = 0 \\
(r^2 Z_n')' - \mu_* \nabla_n^* Z_n - 2\mu_* \nabla_n^* U_n - \mu_0 \nabla_n^*(rU_n') = -\alpha_\mu r \nabla_n^* T_n \\
(r^2 Z_n^{*\prime})' - \nabla_n^* Z_n^* = 0; \quad \mu_* = 2(1-\mu)\mu_0, \quad \mu' = (3-4\mu)\mu_0
\end{gathered} \tag{3.7}$$

где

$$\nabla_n^* f(r,\theta) = \mu_n^2 \operatorname{cosec}^2\theta f(r,\theta) - \operatorname{cosec}\theta[f^{\cdot}(r,\theta)\sin\theta]^{\cdot} \tag{3.8}$$

Чтобы удовлетворялись условия (3.3), необходимо вместо ИП (3.5) использовать ИП [4]

$$X_n(r,\theta) = \int_0^{\varphi_1} X(r,\theta,\varphi)\cos\mu_n\varphi d\varphi, \qquad \mu_n = \frac{(n-1)\pi}{\varphi_1}, \qquad n = 1,2\ldots \tag{3.9}$$

с формулой обращения [4]

$$X(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{\varphi_1}X_1(r,\theta) + \frac{2}{\varphi_1}\sum_{n=2}^{\infty} X_n(r,\theta)\cos\mu_n\varphi \tag{3.10}$$

Для $Z_n^*(r,\theta)$, $T_n(r,\theta)$ справедливы аналогичные формулы.

Применив ИП (3.9) к уравнениям (2.5), вновь приходим к тем же уравнениям (3.7), в которых для μ_n следует вместо формулы из (3.5) пользоваться формулой из (3.9).

Граничные условия (3.2) и (3.4) в трансформантах (3.5) и (3.9) соответственно приводятся к следующим:

$$U_n(r,\omega_i)=Z_n(r,\omega_i)=Z_n^*(r,\omega_i)=0,\quad i=0,1 \tag{3.11}$$

$$U_n^{\cdot}(r,\omega_i)=Z_n^{\cdot}(r,\omega_i)=Z_n^{*\cdot}(r,\omega_i)=0,\quad i=0,1 \tag{3.12}$$

В случае если в соотношениях (1.1) $\varphi_0=-\pi$, $\varphi_1=\pi$ и, стало быть конус сплошной по направлению переменной φ, то вместо ИП (3.5) и (3.9) следует применить ИП

$$X_n(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(r,\theta,\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi,\qquad n=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{3.13}$$

с формулой обращения

$$X(r,\theta,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_n(r,\theta)e^{in\varphi} \tag{3.14}$$

В трансформантах (3.13) уравнения (2.5) тоже запишутся в виде (3.7), только в формуле (3.8) следует положить $\mu_n=|n|$.

4. Интегральное преобразование по переменной θ и сведение полученных уравнений к одномерным. Чтобы провести ИП по переменной θ и одновременно удовлетворить граничным условиям (3.11) и (3.12), необходимо применить ИП, ядро которого – собственная функция одной из следующих задач Штурма – Лиувилля:

$$-\nabla_n^*T_j(\theta)+\tfrac{1}{4}T_j(\theta)=\lambda^2T_j(\theta),\qquad \omega_0<\theta<\omega_1;\quad l_i^jT_j(\theta)=0;\quad i,j=0,1 \tag{4.1}$$

где

$$l_i^0T_0(\theta)=T_0(\omega_i),\qquad l_i^1T_1(\theta)=T_1^{\cdot}(\omega_i)+h_iT_1(\omega_i);\qquad i=0,1 \tag{4.2}$$

Но эти краевые задачи были решены [5] для случая, когда $\mu_n=m$ и m – целые положительные числа. Обобщение же полученных ранее [5] результатов на случай положительных нецелых чисел μ_n проводится достаточно просто по той же схеме, и поэтому приводим окончательные результаты. Как и ранее [5], от собственных чисел $\lambda_k^{(j)}$ ($j=0,1$; $k=0,1,2,\ldots$) краевых задач (4.1) перейдем к собственным числам $\nu_k^{(j)}=-\tfrac{1}{2}+\lambda_k^{(j)}$ ($j=0,1$; $k=0,1,2,\ldots$). При этом дифференциальное уравнение из (4.1) перейдет в уравнение Лежандра и собственные функции краевых задач будут иметь вид ($j=0,1$)

$$y_i(\theta,\nu)=P_\nu^\mu(\cos\theta)l_1^jQ_\nu^\mu-Q_\nu^\mu(\cos\theta)l_1^jP_\nu^\mu,\quad \mu=\mu_n,\quad \nu=\nu_k^{(j)},\quad k=0,1,2,\ldots \tag{4.3}$$

где $P_\nu^\mu(\cos\theta)$, $Q_\nu^\mu(\cos\theta)$ – функции Лежандра первого и второго рода на разрезе [6], а собственные числа $\nu_k^{(j)}$ ($j=0,1$; $k=0,1,2,\ldots$) должны определяться из уравнений

$$\Omega_{\nu,j}^\mu\equiv l_0^jP_\nu^\mu l_1^jQ_\nu^\mu-l_0^jQ_\nu^\mu l_1^jP_\nu^\mu=0,\quad \mu=\mu_n,\quad \nu=\nu_k^{(j)} \tag{4.4}$$

В частности, в случае $j=0$ будем иметь

$$\Omega_{\nu,0}^\mu=P_\nu^\mu(\cos\omega_0)Q_\nu^\mu(\cos\omega_1)-Q_\nu^\mu(\cos\omega_0)P_\nu^\mu(\cos\omega_1)=0 \tag{4.5}$$
$$\nu=\nu_k^0,\quad k=0,1,\ldots,\quad \mu=\mu_n=\pi n\varphi_1^{-1},\quad n=1,2,\ldots$$

и ИП, полученные [5] для случая $\mu_n=m$ (и записанные в виде формул (2.41), [5]) теперь приобретут вид

$$g_k^{(j)}=\int_{\omega_0}^{\omega_1}g(\theta)y_j(\theta,\nu)\sin\theta d\theta,\qquad j=0,1,\qquad \nu=\nu_k^j$$

$$g(\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_k^{(j)}y_j(\theta,\nu)}{\left\|y_j(\theta,\nu)\right\|^2}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g_k^{(j)}y_j(\theta,\nu)}{\sigma_{\mu k}^{(j)}(\omega_0,\omega_i)},\qquad \mu=\mu_n \tag{4.6}$$

где

$$\left\|y_j(\theta,\nu)\right\|^2=\int\limits_{\omega_0}^{\omega_1} y_j^2(\theta,\nu)\sin\theta d\theta,\qquad j=0,1,\qquad \nu=\nu_k^j \tag{4.7}$$

$$-\sigma_{\mu k}^0=\frac{Q_\nu^\mu(\cos\omega_1)\Gamma_{\mu,\nu}}{Q_\nu^\mu(\cos\omega_0)(2\nu+1)}\frac{\partial}{\partial\nu}\Omega\frac{\mu}{\nu,0}=\frac{P_\nu^\mu(\cos\omega_1)\Gamma_{\mu,\nu}}{Q_\nu^\mu(\cos\omega_0)(2\nu+1)}\frac{\partial}{\partial\nu}\Omega\frac{\mu}{\nu,0},\qquad \mu=\mu_n,\qquad \nu=\nu_k^0 \tag{4.8}$$

$$-\sigma_{\mu k}^1=\frac{l_1^1 Q_\nu^\mu\Gamma_{\mu\nu}}{l_0^1 Q_\nu^\mu(2\nu+1)}\frac{\partial}{\partial\nu}\Omega_{\nu,1}^\mu=\frac{l_1^1 P_\nu^\mu\Gamma_{\mu\nu}}{l_0^1 P_\nu^\mu(2\nu+1)}\frac{\partial}{\partial\nu}\Omega_{\nu,1}^\mu,\qquad \mu=\mu_n,\qquad \nu=\nu_k^1 \tag{4.9}$$

Вторые равенства в формулах (4.8) и (4.9) справедливы в силу соотношений (4.5) и (4.4). Для $\Gamma_{\mu\nu}$ справедлива формула (2.6) из [5] с заменой параметра m на $\mu=\mu_n$.

Для сведения уравнений (3.7) к одномерным с выполнением граничных условий (3.11) применим ИП (4.6) при $j=0$, т.е. перейдем в (3.7) к трансформантам

$$X_{nk}(r)=\int\limits_{\omega_0}^{\omega_1} X_n(r,\theta)y_0(\theta,\nu)\sin\theta d\theta,\qquad \nu=\nu_k^j \tag{4.10}$$

причем собственная функция y_0 (θ, ν), согласно соотношениям (4.3) и (4.2), будет иметь вид

$$y_0(\theta,\nu)=P_\nu^\mu(\cos\theta)Q_\nu^\mu(\cos\omega_1)-Q_\nu^\mu(\cos\theta)P_\nu^\mu(\cos\omega_1)=0 \tag{4.11}$$

$$\nu=\nu_k^0,\quad k=0,1,\ldots,\quad \mu=\mu_n=\pi n\varphi_1^{-1},\qquad n=1,2,\ldots$$

и удовлетворять граничному условию

$$y_0(\omega_i,\nu)=0,\qquad \nu=\nu_k^0,\qquad i=0,1 \tag{4.12}$$

Формула обращения для трансформант (4.10), согласно второму соотношению (4.6), запишется в виде

$$X_n(r,\theta)=-\sum_{k=0}^{\infty}X_{nk}(r)\frac{y_0(\theta,\nu_k^0)}{\sigma_{\mu k}^0(\omega_0,\omega_1)} \tag{4.13}$$

Для трансформант $Z_{nk}^*(r)$, $T_{nk}(r)$ справедливы формулы, аналогичные (4.10), (4.13). В трансформантах (4.10) уравнения (3.7) запишутся в виде

$$\begin{gathered}
[r^2U_{nk}'(r)]'-(2+N_\nu\mu_*^{-1})U_{nk}-\mu'\mu_*^{-1}Z_{nk}+\mu_0\mu_*^{-1}rZ_{nk}'=\alpha_\mu\mu_*^{-1}r^2T_{nk}'(r)\\
[r^2Z_{nk}'(r)]'-N_\nu\mu_*Z_{nk}-\mu_0N_\nu rU_{nk}'-2\mu_*N_\nu U_{nk}=-\alpha_\mu rN_\nu T_{nk}(r)\\
[r^2Z_{nk}^{*\prime}(r)]'-N_\nu Z_{nk}^*=0,\qquad a_0<r<a_1;\qquad N_\nu=\nu(\nu+1);\qquad \nu=\nu_k^0,\qquad k=0,1,\ldots
\end{gathered} \tag{4.14}$$

Чтобы свести уравнения (3.7) к одномерным и удовлетворить условиям (3.12), следует применить ИП (4.6) при $j=1$, положив там $h_i=0$ ($i=0{,}1$). При этом собственная функция $y_*(\theta,\nu)=y_1(\theta,\nu)|_{h_i=0}$, согласно соотношениям (4.3) и (4.2), принимает вид

$$y_*(\theta,\nu)=P_\nu^\mu(\cos\theta)\frac{d}{d\omega_1}Q_\nu^\mu(\cos\omega_1)-Q_\nu^\mu(\cos\theta)\frac{d}{d\omega_1}P_\nu^\mu(\cos\omega_1) \tag{4.15}$$

Здесь $\mu=\mu_n$ и выражение для μ_n берется из (3.9), а в качестве ν следует брать собственные числа ν_k^* ($k=0$, 1, 2,...), которые следует находить, согласно соотношениям

(4.4) и (4.2), из трансцендентного уравнения

$$\Omega_\nu^\mu \equiv \frac{dP_\nu^\mu(\cos\omega_0)}{d\omega_0}\frac{dQ_\nu^\mu(\cos\omega_1)}{d\omega_1}-\frac{dQ_\nu^\mu(\cos\omega_0)}{d\omega_0}\frac{dP_\nu^\mu(\cos\omega_1)}{d\omega_1}=0 \tag{4.16}$$

$$\nu=\nu_k^*,\quad k=0,1,\ldots;\quad \mu=\mu_n=\pi(n-1)\varphi_1^{-1},\quad n=1,2,\ldots$$

Если теперь ввести трансформанты

$$X_{nk}(r)=\int_{\omega_0}^{\omega_1}X_n(r,\theta)y_*(\theta,\nu)\sin\theta d\theta,\quad \nu=\nu_k^*,\quad k=0,1,\ldots \tag{4.17}$$

то в этих трансформантах (для $Z_{nk}^*(r)$ и $T_{nk}(r)$ формулы аналогичны) уравнения (3.7) переходят в одномерные (4.14), в которых параметры ν и μ_n следует брать согласно (4.16).

Формулы обращения для трансформант (4.17), согласно соотношениям (4.7), (4.9) и (4.16), запишутся в виде

$$X_n(r,\theta)=-\sum_{k=0}^{\infty}X_{nk}(r)\frac{y_*(\theta,\nu_k^*)}{\sigma_{\mu k}^*(\omega_0,\omega_1)} \tag{4.18}$$

$$-\sigma_{\mu k}^*=\frac{\Gamma_{\mu,\nu}dP_\nu^\mu(\cos\omega_1)/d\omega_1}{(2\nu+1)dP_\nu^\mu(\cos\omega_0)/d\omega_0}\frac{d}{d\nu}\Omega_\nu^\mu$$

$$\nu=\nu_k^*,\quad k=0,1,\ldots,\quad \mu=\mu_n=\pi(n-1)\varphi_1^{-1},\quad n=1,2,\ldots$$

В случае, когда в соотношениях (1.1) $\varphi_0=-\pi$ и $\varphi_1=\pi$, придем к тем же одномерным уравнениям (4.14), в которых $\mu_n=|n|$ и $\nu=\nu_k^a$ или $\nu=\nu_k^c$, в зависимости от того, будут ли грани $\theta=\omega_i$ ($i=0,1$) жестко защемленными или на них будет скользящая заделка. При этом в первом случае трансформанты (4.10) берутся по формулам

$$X_{nk}(r)=\int_{\omega_0}^{\omega_1}X_n(r,\theta)\varphi_a^m(\theta,\nu)\sin\theta d\theta,\quad \nu=\nu_k^a,\quad k=0,1,\ldots,\quad m=|n| \tag{4.19}$$

Оригиналы этих трансформант находятся [5] по формулам

$$X_n(r,\theta)=-\sum_{k=0}^{\infty}X_{nk}(r)\frac{\varphi_a^m(\theta,\nu)}{\sigma_{mk}^a(\omega_0,\omega_1)},\quad \nu=\nu_k^a,\quad k=0,1,2,\ldots \tag{4.20}$$

В формулах (4.19), (4.20) $\varphi_a^m(\theta,\nu)$ берется по формуле (3.24), а $\sigma_{mk}^a(\omega_0,\omega_1)$ по формуле (2.40) из [5]; собственные числа ν_k^a (k = 0, 1, 2,...) находятся из трансцендентного уравнения (2.27) [5]. Для трансформант $Z_{nk}^*(r)$ и $T_{nk}(r)$ формулы аналогичны. Во втором случае трансформанты (4.17) берутся по формулам

$$X_{nk}(r)=\int_{\omega_0}^{\omega_1}X_n(r,\theta)\varphi_c^m(\theta,\nu)\sin\theta d\theta,\quad \nu=\nu_k^c,\quad k=0,1,\ldots,\quad m=|n| \tag{4.21}$$

для которых формулы обращения имеют вид [5]

$$X_n(r,\theta)=-\sum_{k=0}^{\infty}X_{nk}(r)\frac{\varphi_c^m(\theta,\nu)}{\sigma_{mk}^c(\omega_0,\omega_1)},\quad \nu=\nu_k^c,\quad k=0,1,2,\ldots \tag{4.22}$$

причем $\varphi_c^m(\theta,\nu)$ и $\sigma_{mk}^c(\omega_0,\omega_1)$ берутся по формулам (2.37) и (2.49) из [5], а собственные числа ν_k^c ($k=0,1,2,\ldots$) – корни уравнения (2.39) из [5].

5. Формулировка одномерных краевых задач для вспомогательных функций и их решение. Для формулировки одномерных краевых задач для вспомогательных функций к полученной системе уравнений (4.14) нужно присоединить граничные условия в точках $r = a_i$ ($i = 0,1$). Эти граничные условия получим, реализовав условия (1.4). Чтобы это сделать, как и ранее [1], вводим комбинации из касательных напряжений

$$\left\| \begin{matrix} \tau(r,\theta,\varphi) \\ \tau^*(r,\theta,\varphi) \end{matrix} \right\| = \frac{1}{\sin\theta} \left\{ \left\| \begin{matrix} \sin\theta\tau_{r\theta} \\ \sin\theta\tau_{r\varphi} \end{matrix} \right\|^{\cdot} \pm \left\| \begin{matrix} \tau_{r\varphi} \\ \tau_{r\theta} \end{matrix} \right\|^{\cdot} \right\} \tag{5.1}$$

Воспользовавшись формулами

$$2\tau_{r\theta} = r\left(\frac{V}{r}\right)' + \frac{U^{\cdot}}{r}, \qquad 2\tau_{r\varphi} = \frac{U^{\cdot}}{r\sin\theta} + r\left(\frac{W}{r}\right)' \tag{5.2}$$

$$\sigma_r = \frac{2\mu U + (1-\mu) r U' + \mu Z}{(1-2\mu) r} - \alpha_\mu T$$

вытекающими из закона Гука в сферической системе координат [2,3], получаем

$$2r\tau = \nabla U + rZ' - Z, \quad 2r\tau_* = rZ^{*\prime} - Z^* \tag{5.3}$$

Согласно равенству (4.1), второе и третье условия из (1.4) будут выполнены, если

$$\tau(r,\omega_i,\varphi) = \tau^*(r,\omega_i,\varphi) = 0, \qquad i = 0,1 \tag{5.4}$$

Воспользовавшись третьей формулой из (5.2), первое краевое условие из (1.4) запишем в виде

$$2\mu U(r,\omega_i,\varphi) + (1-\mu) r U'(r,\omega_i,\varphi) + \mu Z(r,\omega_i,\varphi) = -(1-2\mu) a_i q_i(\theta,\varphi),$$
$$q_i(\theta,\varphi) = p_i(\theta,\varphi) - \alpha_\mu T(a_i,\theta,\varphi), \qquad i = 0,1 \tag{5.5}$$

Если к соотношениям (5.3) – (5.5) применить ИП (3.5), (3.9) и (3.12), а затем (4.10), (4.17) и (4.19), то граничные условия (1.4) можно записать в виде

$$N_\nu U_{nk}(a_i) + Z_{nk}(a_i) - a_i Z'_{nk}(a_i) = 0, \quad a_i Z^{*\prime}_{nk}(a_i) - Z^*_{nk}(a_i) = 0, \quad i = 0,1 \tag{5.6}$$
$$2\mu U_{nk}(a_i) - (1-\mu) a_i U'_{nk}(a_i) + \mu Z_{nk}(a_i) = -(1-2\mu) a_i q_{ink}, \quad i = 0,1$$

Отсюда следует, что $Z^*_{nk}(r)$ удовлетворяет однородной краевой задаче, и потому

$$Z^*_{nk}(r) \equiv 0, \quad Z^*(r,\theta,\varphi) \equiv 0 \tag{5.7}$$

Для составления краевой задачи для функций $U_{nk}(r)$, $Z_{nk}(r)$ представляется удобным ввести систему функций

$$y_0(r) = u_{nk}(r), \quad y_1(r) = rU'_{nk}(r), \quad y_2(r) = Z_{nk}(r), \quad y_3(r) = rZ'_{nk}(r) \tag{5.8}$$
$$f_1(r) = \mu_*^{-1} r^2 T_{nk}(r), \quad f_2(r) = -N_\nu r T_{nk}(r)$$

Тогда если учесть, что

$$ry'_0(r) = y_1(r), \quad ry'_2(r) = y_3(r) \quad (r^2 U'_{nk})' = r(rU'_{nk})' + rU'_{nk}$$

и ввести векторы и матрицы

$$\mathbf{y}(r) = \left\| \begin{matrix} y_0(r) \\ y_1(r) \\ y_2(r) \\ y_3(r) \end{matrix} \right\|, \qquad \mathbf{f}(r) = \left\| \begin{matrix} 0 \\ f_1(r) \\ 0 \\ f_2(r) \end{matrix} \right\|, \qquad \boldsymbol{\gamma} = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ a_0 q_{0nk} \\ a_1 q_{1nk} \end{matrix} \right\| \tag{5.9}$$

$$\mathbf{P}_k = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2+\mu_*^{-1}N_\nu & -1 & \mu_*^{-1}\mu' & -\mu_*^{-1}\mu_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2\mu_* N_\nu & \mu_0 N_\nu & \mu_* N_\nu & -1 \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{Vmatrix} N_\nu & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu & 1-\mu & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{5.10}$$

а также матрицу $\mathbf{B}$, которая получается из $\mathbf{A}$ перестановкой первых двух и последних двух строк, то для отыскания функций $U_{nk}(r)$ и $Z_{nk}(r)$ приходим к векторной краевой задаче

$$r\mathbf{y}'(r) - \mathbf{P}_k\mathbf{y}(r) = \alpha_\mu \mathbf{f}(r), \qquad a_0 < r < a_1 \tag{5.11}$$

$$\mathbf{U}[\mathbf{y}(r)] \equiv \mathbf{A}\mathbf{y}(a_0) + \mathbf{B}\mathbf{y}(a_1) = -(1-2\mu)\boldsymbol{\gamma}$$

Для решения дифференциального уравнения из (5.11) применим к нему ИП Меллина

$$\begin{Vmatrix} \mathbf{y}_s \\ \mathbf{f}_s \end{Vmatrix} = \int_0^\infty r^{s-1} \begin{Vmatrix} \mathbf{y}(r) \\ \mathbf{f}(r) \end{Vmatrix} dr$$

предварительно продлив правую часть нулем до интервала $(0, \infty)$. В результате получим

$$\mathbf{y}(r) = \alpha_\mu \int_{a_0}^{a_1} \mathbf{\Phi}\left(\frac{r}{\rho}\right) \mathbf{f}(\rho) \frac{d\rho}{\rho}, \qquad a_0 \leqslant r \leqslant a_1$$

где $\rho^{-1}\mathbf{\Phi}(r/\rho)$ – фундаментальная матрица-функция [7, 8] дифференциального уравнения из (5.11), определяемая формулой

$$\mathbf{\Phi}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} (-s\mathbf{I} - \mathbf{P}_k)^{-1} x^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} (\xi\mathbf{I} - \mathbf{P}_k)^{-1} x^{\xi} d\xi, \qquad x = \frac{r}{\rho} \tag{5.12}$$

Для вычисления последнего интеграла примем во внимание, что [9, 7]

$$(\xi\mathbf{I} - \mathbf{P}_k)^{-1} = \Delta_k^* Q_4^{-1}(\xi), \qquad \mathbf{I}Q_4(\xi) = (\xi\mathbf{I} - \mathbf{P}_k)\Delta_k^*$$

$$Q_4(\xi) = \det(\xi\mathbf{I} - \mathbf{P}_k) = \prod_{j=1}^{4}(\xi - \xi_j) = \xi^4 + 2\xi^3 - \tag{5.13}$$

$$-(2N_\nu + 1)\xi^2 - 2(N_\nu + 1)\xi + N_\nu(N_\nu - 2), \qquad \nu = \nu_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

где ν_k – корни трансцендентных уравнений (4.5), (4.16) или уравнений (2.27), (2.39) из [5]. При этом корни характеристического многочлена $Q_4(\xi)$ будут определяться формулами

$$\xi_1 = -2 - \nu_k, \quad \xi_2 = -1 + \nu_k, \quad \xi_3 = -\nu_k, \quad \xi_4 = 1 + \nu_k \tag{5.14}$$

Представим характеристическую матрицу Δ_k^* в виде [9, 7]

$$\Delta_k^*(\xi) = \sum_{j=0}^{3} \xi^j \Delta_{3-j}^{(k)} \tag{5.15}$$

Числовые матрицы $\Delta_i^{(k)}$ (i = 0, 1, 2, 3) найдем, подставив выражение (5.15) во второе равенство из (5.13) и приравняв коэффициенты при степенях ξ. В результате будем иметь

$$\Delta_0^{(k)} = \mathbf{I}, \quad \Delta_1^{(k)} = 2\mathbf{I} + \mathbf{P}_k, \quad \Delta_2^{(k)} = 2\mathbf{P}_k + \mathbf{P}_k^2 - (2N_\nu + 1)\mathbf{I}$$

$$\Delta_3^{(k)} = 2\mathbf{P}_k^2 + \mathbf{P}_k^3 - (2N_\nu + 1)\mathbf{P}_k - 2(N_\nu + 1)\mathbf{I}$$

причем для $\Delta_3^{(k)}$ вытекает и такая формула:

$$\Delta_3^{(k)} = -N_\nu(N_\nu - 2)\mathbf{P}_k^{-1}, \quad \nu = \nu_k, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

которая может служить для контроля вычислений.

На основании соотношений (5.13) и (5.15) имеем

$$(\xi\mathbf{I} - \mathbf{P}_k)^{-1} = \sum_{j=0}^{3} \Delta_{3-j}^{(k)} \frac{\xi^j}{Q_4(\xi)}$$

Подставив это выражение в равенства (5.12), получим

$$\mathbf{\Phi}(x) = \sum_{j=0}^{3} \Delta_{3-j}^{(k)} \varphi_j(x), \quad \varphi_j(x) = \left(r\frac{d}{dr}\right)^j \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\gamma-i\infty}^{-\gamma+i\infty} \frac{x^\xi}{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)(\xi-\xi_3)(\xi-\xi_4)} d\xi, \quad x = \frac{r}{\rho} \tag{5.16}$$

Если $-\gamma > -\nu_k$ и $\nu_k > 1$ ($k = 0, 1, 2,\ldots$), то на основании теоремы о вычетах при учете соотношения (5.14) и второго равенства (5.16) находим

$$\varphi_j(x) = \frac{1}{2(2\nu+1)}\left[\frac{1}{2\nu-1}\begin{Bmatrix}(-\nu)^j x^{-\nu}, & x > 1\\ (\nu-1)^j x^{\nu-1}, & x < 1\end{Bmatrix} - \frac{1}{2\nu+3}\begin{Bmatrix}(-2-\nu)^j x^{-\nu}, & x > 1\\ (\nu-1)^j x^{\nu-1}, & x < 1\end{Bmatrix}\right] \tag{5.17}$$

$$j = 0,1,2,3; \quad \nu = \nu_k, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Чтобы получить решение краевой задачи (5.11) с ненулевыми граничными условиями, необходимо [7, 8] построить матрицу Грина $\mathbf{G}$ (r, ρ) и базисную матрицу-функцию $\mathbf{\Psi}$ (r). Начнем с построения последней. Для этого [7, 8] сперва нужно решить матричное дифференциальное уравнение

$$r\mathbf{Z}'(r) - \mathbf{P}_k\mathbf{Z}(r) = 0 \tag{5.18}$$

Используя теорему Коши, можно показать, что матрица (Г – замкнутый контур, охватывающий все нули функции $Q_4(\xi)$)

$$\mathbf{Z}(r) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma (\mathbf{I}\xi - \mathbf{P}_k)^{-1} r^\xi d\xi = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\Delta_k^*(\xi)}{Q_4(\xi)} r^\xi d\xi \tag{5.19}$$

является [7, 8] решением уравнения (5.18). Подставив выражение (5.15) в соотношение (5.19) и учитывая выражения (5.14), так же как и при вычислении интеграла (5.12), приходим к формуле

$$\mathbf{Z}(r) = \sum_{j=0}^{3} \Delta_{3-j}^{(k)} W_j(r), \quad 2(2\nu+1)W_j(r) = \frac{(-\nu)^j r^{-\nu} - (\nu-1)^j r^{\nu-1}}{2\nu-1} +$$

$$+\frac{(\nu+1)^j r^{\nu+1} - (-1)^j(\nu+2)^j r^{-\nu-2}}{2\nu+3}, \quad j = 0,1,2,3; \quad \nu = \nu_k, \quad k = 0,1,\ldots \tag{5.20}$$

Поскольку матрица $\mathbf{\Psi}(r)$ должна удовлетворять краевой задаче [7, 8]

$$r\mathbf{\Psi}'(r) - P_k\mathbf{\Psi}(r) = 0, \quad a_0 < r < a_1, \quad \mathrm{U}[\mathbf{\Psi}(r)] = \mathbf{I} \tag{5.21}$$

то непосредственной проверкой убедимся, что

$$\mathbf{\Psi}(r) = \mathbf{Z}(r)(\mathbf{U}[\mathbf{Z}(r)])^{-1} \tag{5.22}$$

Также непосредственной проверкой можно убедиться [7, 8], что матрица

$$\mathbf{G}(r,\rho)=\rho^{-1}\left\{\mathbf{\Phi}\left(\frac{r}{\rho}\right)-\mathbf{\Psi}(r)\mathbf{U}\left[\mathbf{\Phi}\left(\frac{r}{\rho}\right)\right]\right\} \tag{5.23}$$

удовлетворяет всем условиям, налагаемым на матрицу Грина краевой задачи (5.11). Потому решение последней запишется в виде

$$\mathbf{y}(r)=\alpha_\mu\int_{a_0}^{a_1}\mathbf{G}(r,\rho)\mathbf{f}(\rho)d\rho-(1-2\mu)\mathbf{\Psi}(r)\gamma,\qquad a_0<r<a_1 \tag{5.24}$$

6. Отыскание по найденным вспомогательным функциям поля смещений. Полученная формула (5.24) при учете выражений (5.8) позволяет найти трансформанты смещения $u_r=U(r,\theta,\varphi)(2G)^{-1}$ и вспомогательной функции $Z(r,\ \theta,\ \varphi)$. Чтобы найти трансформанты остальных смещений $u_\theta=V(r,\ \theta,\ \varphi)(2G^{-1})$, $u_\varphi=W(r,\ \theta,\ \varphi)(2G^{-1})$, будем отправляться от дифференциальных уравнений (2.7) при учете тождеств (5.7). При этом граничные условия для этих уравнений поставим такие, чтобы выполнялись полностью условия отсутствия смещений на гранях $\varphi=\varphi_i$, $\theta=\omega_i$ ($i=0,\ 1$) или условия (1.2), (1.3) скользящей заделки.

При решении уравнений (2.7) удобно ввести обозначения

$$Y^*(r,\theta,\varphi)=\sin\theta Y(r,\theta,\varphi);\quad Y^*(r,\theta,\varphi)=\begin{Vmatrix}V^*(r,\theta,\varphi)\\W^*(r,\theta,\varphi)\end{Vmatrix},\quad Y(r,\theta,\varphi)=\begin{Vmatrix}V(r,\theta,\varphi)\\W(r,\theta,\varphi)\end{Vmatrix} \tag{6.1}$$

Тогда они запишутся так:

$$\nabla Y^*=\frac{1}{\sin\theta}\begin{Vmatrix}(\sin^2\theta Z)'\\Z'\end{Vmatrix} \tag{6.2}$$

Если реализуются условия равенства нулю смещений на гранях $\varphi=\varphi_i,\theta=\omega_i$ ($i=0{,}1$), то к уравнениям (6.2) нужно поставить такие граничные условия (всюду далее $i=0{,}1$; $n=1,2,\ldots$; $k=0,1,2,\ldots$):

$$Y^*(r,\theta,\varphi_i)=0,\quad \varphi_0=0;\quad \omega_0\leqslant\theta\leqslant\omega_1;\quad Y^*(r,\omega_i,\varphi)=0,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1 \tag{6.3}$$

К краевым задачам (6.2), (6.3) сперва применяем ИП (3.5), т.е.

$$Y_n^*(r,\theta)=\int_0^{\varphi_1}Y^*(r,\theta,\varphi)\sin\mu_n\varphi d\varphi,\qquad \mu_n=\frac{n\pi}{\varphi_1} \tag{6.4}$$

В результате получаем

$$-\nabla_n^*Y_n^*=\frac{1}{\sin\theta}\begin{Vmatrix}(\sin^2\theta Z_n)'\\-\mu_nZ_n^c\end{Vmatrix},\quad Z_n^c=\int_0^{\varphi_1}Z\cos\mu_n\varphi d\varphi;\quad Y_n^*(r,\omega_i)=0 \tag{6.5}$$

(функции Z_n определены формулами (3.5)).

Для решения краевых задач (6.5) применяем ИП (4.10). В результате находим

$$-Y_{nk}^*(r)=\frac{1}{N_\nu}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\begin{Vmatrix}\sin^2\theta Z_ny_0'(\theta,\nu)\\-\mu_nZ_n^cy_0(\theta,\nu)\end{Vmatrix}d\theta,\qquad \nu=\nu_k^c \tag{6.6}$$

Формула для трансформанты $u_{nk}(r)$ вытекает из соотношений (5.24) и (5.8), в которых следует положить $\nu=\nu_k^0$, $\mu=\mu_n=n\pi\varphi_1^{-1}$. По найденным трансформантам U_{nk}, V_{nk}^*, W_{nk}^*, пользуясь формулами обращения (4.13), а затем (3.6), найдем $U(r,\ \theta,\ \varphi)$, $V^*(r,\ \theta,\ \varphi)$, $W^*(r,\ \theta,\ \varphi)$. В результате при учете соотношений (6.1) и (2.1) будет найдено в явном виде поле смещений для поставленной задачи, когда на гранях $\varphi = \varphi_i$, $\theta = \omega_i$ заданы смещения.

Для случая, когда в условиях (1.1) $\varphi_0 = -\pi$, $\varphi_1 = \pi$, а по граням $\theta = \omega_i$ по-прежнему заданы смещения, полученные формулы следует откорректировать следующим образом. Трансформанта $u_{nk}(r)$ по-прежнему находится по формулам (5.24) и (5.8), в которых $\nu = \nu_k^a$ и $\mu = |n|$. При вычислении V_{nk}^* и W_{nk}^* вместо трансформант (6.4) следует брать такие:

$$Y_n^*(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y^*(r,\theta,\varphi)e^{-in\varphi}d\varphi \tag{6.7}$$

Тогда в уравнении (6.5) следует вместо μ_n взять $-in$, а трансформанты Z_n и Z_n^c заменить на трансформанту Z_n, определяемую формулой (3.13). Эту же замену нужно сделать и в формулах (6.6), дополнительно заменить там $y_0(\theta, \nu)$ на $\varphi_a^m(\theta,\nu)$ и считать $\nu = \nu_k^a$. По найденным трансформантам U_{nk}, V_{nk}^*, W_{nk}^*, пользуясь формулами обращения (4.18), а затем (3.14), найдем их оригиналы и тем самым получим явные формулы для искомого поля смещений.

Перейдем к случаю скользящей заделки, когда должны выполняться условия (1.2) и (1.3). Если учесть обозначения (2.1) и (6.1), то условия (1.3) можно записать так:

$$\begin{gathered} W^*(r,\theta,\varphi_i) = 0, \quad \omega_0 \leqslant \theta \leqslant \omega_1, \\ U^{\cdot}(r,\theta,\varphi_i) + r(W^*(r,\theta,\varphi_i)r^{-1})' = 0 \\ \sin\theta[\sin^{-2}\theta W^*(r,\theta,\varphi_i)]^{\cdot} + \sin^{-2}\theta V^{*\cdot}(r,\theta,\varphi_i) = 0, \quad \omega_0 \leqslant \theta \leqslant \omega_1 \end{gathered} \tag{6.8}$$

Поскольку условие $U^{\cdot}(r,\theta,\varphi_i) = 0$ уже выполнено в силу ИП (3.9), то условия (1.3) будут выполнены полностью, если кроме условий (6.8) выполнить еще условие

$$V^{*\cdot}(r,\theta,\varphi_i) = 0, \quad \omega_0 \leqslant \theta \leqslant \omega_1 \tag{6.9}$$

В тех же обозначениях условия (1.2) можно записать в виде

$$V^*(r,\omega_i,\varphi) = 0, \quad \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 \tag{6.10}$$

$$U^{\cdot}(r,\omega_i,\varphi) + r^2[r^{-1}V^*(r,\omega_i,\varphi)]'\operatorname{cosec}\omega_i = 0$$

$$W^{*\cdot}(r,\omega_i,\varphi) - 2W^*(r,\omega_i,\varphi)\operatorname{ctg}\omega_i + V^{*\cdot}(r,\omega_i,\varphi)\operatorname{cosec}\omega_i = 0 \tag{6.11}$$

Так как условие $U^{\cdot}(r,\omega_i,\varphi) = 0$ уже выполнено в силу ИП (4.17), то условия (1.2) будут удовлетворены полностью, если кроме условия (6.10) выполнить равенство

$$W^{*\cdot}(r,\omega_i,\varphi) - 2W^*(r,\omega_i,\varphi)\operatorname{ctg}\omega_i = 0, \quad \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_1 \tag{6.12}$$

Таким образом, к дифференциальным уравнениям (6.2) нужно присоединить граничные условия (6.8) – (6.10) и (6.12).

Для решения сформулированных краевых задач ($\varphi_0 = 0$) применим ИП (3.9) и (3.5). В результате указанные краевые задачи перейдут в следующие одномерные:

$$-\nabla_n^* V_n^* = \operatorname{cosec}\theta(\sin^2\theta Z_n)^{\cdot}, \quad \mu_n = (n-1)\pi\varphi_i^{-1}, \quad V_n^*(r,\omega_i) = 0 \tag{6.13}$$

$$\nabla_n^* W_n^* = \mu_n \int_0^{\varphi_1} Z\cos\mu_n\varphi d\varphi, \quad \mu_n = \frac{n\pi}{\varphi_1}, \quad W_n^{*\cdot}(r,\omega_i) - 2W_n^*(r,\omega_i)\operatorname{ctg}\omega_i = 0 \tag{6.14}$$

(выражение для функции Z_n берется согласно ИП (3.9)).

Краевую задачу (6.13) решим с помощью ИП (4.6) при $j = 0$. В результате получим

$$V_{nk}^*(r) = -\frac{1}{N_\nu}\int_{\omega_0}^{\omega_i} Z_n(r,\theta)y_0(\theta,\nu)\sin^2\theta d\theta, \qquad \nu = \nu_k^0 \tag{6.15}$$

Для решения краевой задачи (6.14) применим ИП (4.6) при $j = 1$, причем в формулах (4.3), (4.4) и (4.9), определяющих собственные функции и собственные числа ν_k^1, следует положить $h_i = -2\operatorname{ctg}\omega_i$ и $\mu = \mu_n = n\pi\varphi_1^{-1}$. Это же нужно сделать и в формуле обращения

$$W_n^*(r,\theta) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{W_{nk}^*(r)y_1(\theta,\nu_k^1)}{\sigma_{\mu k}^1(\omega_0,\omega_1)} \tag{6.16}$$

Применение ИП (4.6) при $j = 1$ к краевой задаче (6.14) приводит к формуле

$$W_{nk}^*(r) = -\frac{\mu_n}{N_\nu}\int_{\omega_0}^{\omega_1}\int_0^{\varphi_1} Z(r,\theta,\varphi)\cos\mu_n\varphi y_1(\theta,\nu_k^1)\sin\theta d\theta d\varphi$$

Трансформанту $U_{nk}(r)$, как и ранее, найдем по формулам (5.24), (5.8), в которых для параметров μ и ν следует принять значения

$$\mu = \mu_n = (n-1)\pi\varphi_1^{-1}, \qquad \nu = \nu_k^*$$

Если найденные трансформанты $U_{nk}(r)$, $V_{nk}(r)$ и $W_{nk}(r)$ обратить с помощью формул обращения (4.18), (4.13), (6.16), а также (3.10), (3.6), то получим точное решение поставленной задачи в случае скользящей заделки по граням $\varphi = \varphi_i$, $\theta = \omega_i$.

Для случая, когда в условиях (1.1) $\varphi_0 = -\pi$, $\varphi_1 = \pi$ и по граням $\theta = \omega_i$ имеет место скользящая заделка, в полученное решение следует внести такие коррективы. Вместо ИП (3.9) и (3.5) следует брать ИП (6.7). В результате уравнения (6.2) перейдут в уравнения (6.5), в которых следует вместо μ_n взять $-in$, а Z_n и Z_n^c заменить на трансформанту Z_n, определяемую формулой (3.13). Граничные же условия для полученных дифференциальных уравнений, согласно соотношениям (6.10), (6.11), запишутся в виде

$$V_n^*(r,\omega_i) = 0, \qquad W_n^{*\prime}(r,\omega_i) - 2W_n^*(r,\omega_i)\operatorname{ctg}\omega_i = 0$$

Эти граничные условия диктуют применение к полученным краевым задачам вместо ИП (4.6) при $j = 0$ и $j = 1$ таких ИП:

$$Y_{nk}^*(r) = \int_{\omega_0}^{\omega_1}\left\|\begin{matrix} V_n^*(r,\theta)\varphi_a^m(\theta,\nu_k^a) \\ W_n^*(r,\theta)\varphi_b^m(\theta,\nu_k^b)\end{matrix}\right\|\sin\theta d\theta, \qquad m = |n| \tag{6.17}$$

Выражения для собственных функций $\varphi_a^m(\theta,\nu_k^a)$ и $\varphi_b^m(\theta,\nu_k^b)$ и уравнения для определения собственных чисел ν_k^a, ν_k^b даются формулами (2.24), (2.27) и (2.31), (2.34) из [5], причем в последних двух следует положить

$$h_i = -2\operatorname{ctg}\omega_i \tag{6.18}$$

Формулы обращения для трансформант (6.17) имеют вид [5]

$$Y_n(r,\theta) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varphi_e^m(\theta,\nu_k^e)}{\sigma_{mk}^e(\omega_0,\omega_1)}\left\|\begin{matrix} V_{nk}(r), & e = a \\ W_{nk}(r), & e = b\end{matrix}\right\| \tag{6.19}$$

Выражение для $\sigma_{mk}^a(\omega_0,\omega_1)$ дается формулой (2.28) из [5], а для $\sigma_{mk}^b(\omega_0,\omega_1)$ – формулой (2.40) из [5], в которой следует учесть соотношение (6.18).

Применение ИП (6.17) к упомянутым краевым задачам для $V_n^*(r,\theta)$ и $W_n^*(r,\theta)$ позволило найти их трансформанты в виде

$$Y_{nk}^*(r) = \frac{1}{N_\nu} \int_{\omega_0}^{\omega_1} Z_n(r,\theta) \begin{Vmatrix} \sin^2\theta\varphi_a^m(\theta,\nu), & \nu = \nu_k^a \\ \sin^2\theta\varphi_b^m(\theta,\nu), & \nu = \nu_k^b \end{Vmatrix} d\theta$$

Трансформанту $U_{nk}(r)$ найдем, как и ранее, по формулам (5.24) и (5.8), в которых следует принять $\mu = |n|$ и $\nu = \nu_k^c$. По полученным трансформантам $U_{nk}(r)$, $V_{nk}^*(r)$, $W_{nk}^*(r)$ с помощью формул обращения (4.18), (6.19) и (3.14) найдем их оригиналы и тем самым получим явные формулы для поля смещений.

Таким образом, для всех вариантов поставленных задач получены точные решения. Как и ранее [5], можно указать многочисленные частные случаи решенных здесь задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г.Я.* Об одном новом представлении решения уравнений Ламэ в сферической системе координат // Докл. РАН. 1997. Т. 356. № 1. С. 47–49.
2. *Коваленко А.Д.* Введение в термоупругость. Киев: Наук. думка, 1965. 204 с.
3. *Nowacki W.* Teoria sprezystosci. Warszawa: PWN, 1973. = *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. *Мартыненко Н.А., Пустыльников Л.М.* Конечные интегральные преобразования и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами (справочное пособие). М.: Наука, 1986. 303 с.
5. *Попов Г.Я.* Осесимметричная смешанная задача теории упругости для усеченного кругового полого конуса // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 431–443.
6. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions. N.Y., etc.: McGraw-Hill, 1955 = *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.
7. *Попов Г.Я., Абдыманапов С.А., Ефимов В.В.* Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы: Изд-во Рауан, 1999. 113 с.
8. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Гостехтеориздат, 1953. 492 с.

Одесса

Поступила в редакцию
27.VI.2001