

УДК 539.375

© 2002 г. В.С. Никишин

**ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОГО УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА
С КОЛЬЦЕВОЙ ИЛИ КРУГОВОЙ ТРЕЩИНОЙ
НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА СЛОЕВ**

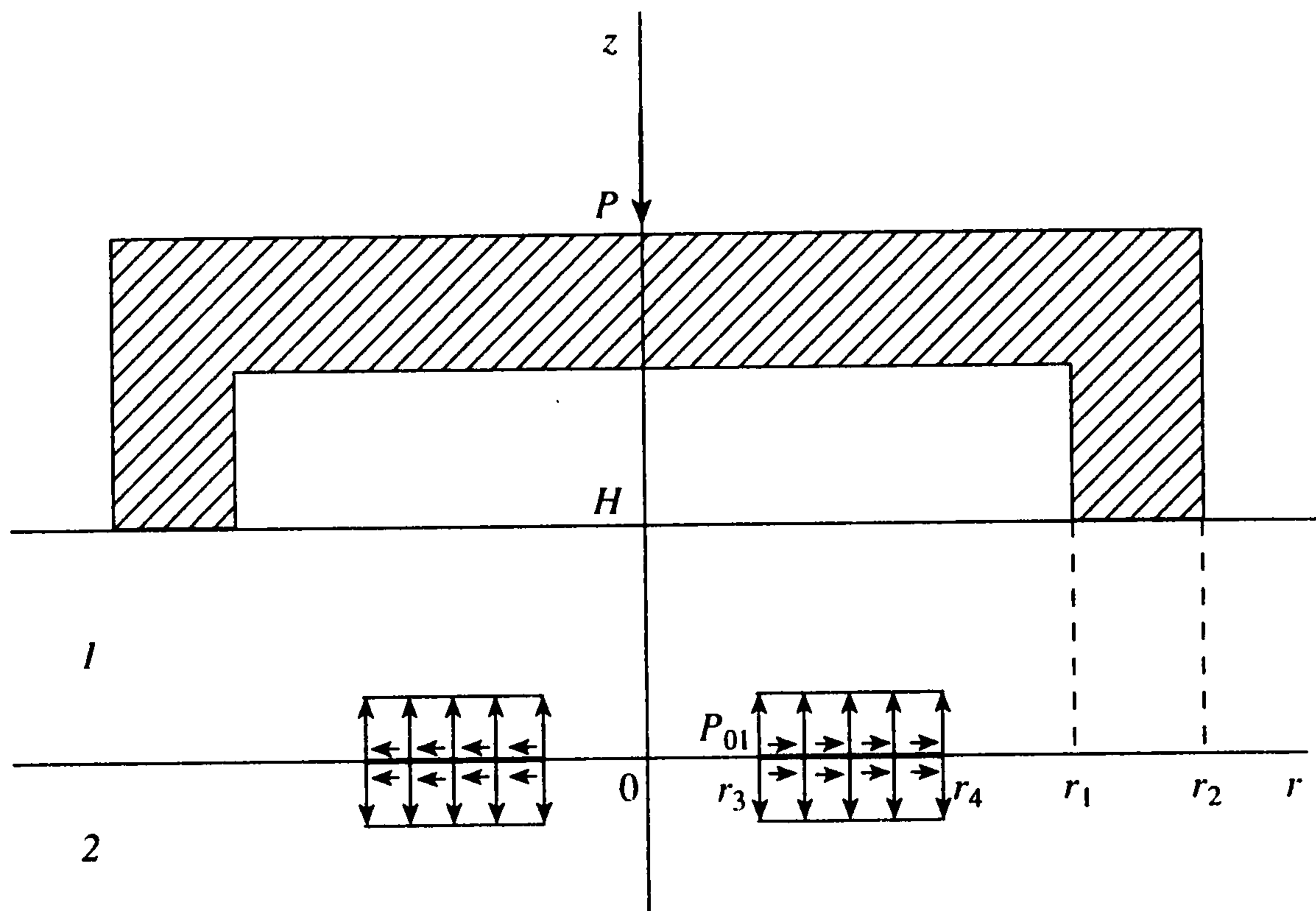
Даются точные аналитические решения трех родственных осесимметричных смешанных задач теории упругости о давлении кольцевого или кругового штампа на двухслойное полупространство при учете сцепления и наличия кольцевой или круговой трещины на границе раздела слоев. Постановка и решение этих задач базируются на специальной регуляризации решения первой основной краевой задачи теории упругости для отдельного слоя при произвольных нормальной и касательной нагрузках на его граничных плоскостях, которое строится методом преобразования Ганкеля с обеспечением сходимости интегралов для всех напряжений и перемещений.

Способ регуляризации базового решения, предложенный [1] и развитый [2] ранее, позволяет сводить исходные задачи к хорошо изученным¹ разрешающим системам сингулярных интегральных уравнений. Этот подход распространяется ниже на постановку и решение более сложных контактных задач для многослойного полупространства с трещинами на границах слоев.

1. К постановке смешанных задач. Рассматриваемое двухслойное полупространство состоит из слоя произвольной толщины H и слоя-основания бесконечной толщины (однородного полупространства) с присвоенными им номерами соответственно 1 и 2. Модули упругости E_i и коэффициенты Пуассона $\nu_i (i = 1, 2)$ слоев могут принимать различные и произвольные значения. Начало отсчета цилиндрической системы координат r, z принимаем на плоскости раздела слоев и направляем ось Oz вверх, ортогонально слоям. В этой системе координат верхний слой $0 \leq z \leq H$ и слой-основание $z \leq 0$ разделяются плоскостью $z = 0$, а плоскость $z = H$ является верхней границей верхнего слоя (фигура).

На границе $z = H$ приложено давление P кольцевого или кругового сцепленного штампа $r_1 \leq r \leq r_2 (r_1 \geq 0)$; на плоскости раздела слоев $z = 0$ имеется кольцевая или круговая трещина $r_3 \leq r \leq r_4 (r_3 \geq 0)$, а вне трещины должны выполняться условия жесткого сцепления слоев, обеспечивающие непрерывность нормальных и касательных напряжений и перемещений. В первой задаче штамп и трещина кольцевые, причем $r_3 > r_2$ (вариант 1) и $r_4 < r_1$ (вариант 2); во второй – штамп кольцевой, а трещина круговая ($r_3 = 0, r_4 < r_1$); в третьей – штамп круговой ($r_1 = 0$), а трещина кольцевая ($r_3 > r_2$). Во всех упомянутых задачах на берегах трещин прилагаются произвольно заданные симметричные нормальные и касательные нагрузки. Особый интерес представляют задачи со свободными от нагрузок трещинами, которые под действием штампа способны раскрываться при определенных упругих и геометрических характеристиках. Последние можно установить только в результате числен-

¹ Никишин В.С. Корректная постановка и численное решение основных и смешанных задач теории упругости для многослойных и непрерывно-неоднородных сред: Дис. ... док-ра физ.-мат. наук: 01.01.07. М.: ВЦ АН СССР, 1982. 413 с.



ной реализации решений задач и этим самым подтвердить корректность их постановки, как это было показано ранее [1].

Излагаемое ниже регуляризованное базовое решение основной краевой задачи для отдельного слоя и решения смешанных задач для двухслойного полупространства даются в безразмерных переменных $\rho = r/a$, $t = z/H$, где a – некоторая величина радиуса r , принятая за линейную единицу измерения. При численной реализации решений задач величину a удобно приравнять, например, r_2 или r_4 (фигура). Величины отношений $\lambda = H/a$, $\rho_j = r_j/a$ ($j = 1, 2, 3, 4$), $\delta = E_1/E_2$, $\chi = \delta(1 + \nu_2)/(1 + \nu_1)$ являются характерными геометрическими и упругими параметрами смешанных задач. На безразмерной оси Ot верхний слой ($i = 1$) расположен на отрезке $0 \leq t \leq 1$, а слой-основание ($i = 2$) – на неограниченном интервале $-\infty < t \leq 0$. Нормальные и касательные напряжения и осевые и радиальные перемещения в слое с номером $i = 1, 2$ обозначаем через $\sigma_{zi}(\rho, t)$, $\tau_{rzi}(\rho, t)$, $w_i(\rho, t)$, $u_i(\rho, t)$.

2. Регуляризованное базовое решение смешанных задач. Регуляризованное базовое решение смешанных задач для двухслойного полупространства было построено [2] при следующих краевых условиях на внешней поверхности $t = 1$ и на границе раздела слоев $t = 0$:

$$\sigma_{z1} = p_1(\rho) + p_1^*(\rho), \quad \tau_{rz1} = q_1(\rho) + q_1^*(\rho) \quad \text{при } t = 1 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{z1} = \sigma_{z2} = p_0(\rho), \quad \tau_{rz1} = \tau_{rz2} = q_0(\rho) \quad \text{при } t = 0 \quad (2.2)$$

где $p_j(\rho)$, $q_j(\rho)$, ($j = 0, 1$) – произвольные функции на полуоси $0 \leq \rho < \infty$, представимые интегралами Ганкеля

$$p_j(\rho) = \int_0^\infty \beta \bar{p}_j(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \quad q_j(\rho) = \int_0^\infty \beta \bar{q}_j(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta \quad (2.3)$$

$$\bar{p}_j(\beta) = \int_0^\infty \rho p_j(\rho) J_0(\rho\beta) d\rho, \quad \bar{q}_j(\beta) = \int_0^\infty \rho q_j(\rho) J_1(\rho\beta) d\rho \quad (2.4)$$

$p_1^*(\rho)$, $q_1^*(\rho)$ ($0 \leq \rho < \infty$) – сколь угодно малые функции, предназначенные для регуляризации решения задачи (2.1)–(2.4) для отдельного верхнего слоя ($i = 1$); они будут представлены и обоснованы ниже. Из данного решения для математической постановки

ки рассматриваемых смешанных задач требуются следующие конструктивные представления осевых и радиальных перемещений $w_i(\rho, t)$, $u_i(\rho, t)$ ($i = 1, 2$) на границах слоев $t = 1$ и $t = 0$ [2]:

$$w_i(\rho, t) = \int_0^{\infty} \Delta_{wi}(t, \beta) J_0(\rho\beta) d\beta, \quad u_i(\rho, t) = \int_0^{\infty} \Delta_{ui}(t, \beta) J_1(\rho\beta) d\beta \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{vi}(t, \beta) &= E_i^{-1} (1 + \nu_i) a D_{vi}(t, \beta), \quad i = 1, 2 \\ D_{v1}(k, \beta) &= \Delta_{vpk1}(\beta) \bar{p}_1(\beta) + \Delta_{vpk0}(\beta) \bar{p}_0(\beta) + \Delta_{uqk1}(\beta) \bar{q}_1(\beta) + \Delta_{uqk0}(\beta) \bar{q}_0(\beta), \\ v &= w, u; \quad k = 0, 1 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$D_{v2}(0, \beta) = \tilde{\Delta}_{vp00} \bar{p}_0(\beta) + \tilde{\Delta}_{uq00} \bar{q}_0(\beta), \quad v = w, u$$

Функции $\Delta_{uskm}(\beta)$ и постоянные $\tilde{\Delta}_{v, s00}$ ($v = w, u; s = p, q; k, m = 0, 1$) даются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \Delta_p \Delta_{wp11} &= a_1 (\xi_3 \xi_4 + 4 \xi_1 \xi_2^2) \\ \Delta_p \Delta_{wp01} &= -\Delta_p \Delta_{wp10} = 2a_1 \xi_2 (\xi_3 + \xi_1 \xi_4) \\ \Delta_q \Delta_{wq11} &= \Delta_p \Delta_{up11} = b_1 \xi_3^2 + 4 \xi_1^2 \xi_2^2 \\ \Delta_q \Delta_{wq10} &= \Delta_q \Delta_{wq01} = -\Delta_p \Delta_{up01} = 2a_1 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \\ \Delta_p \Delta_{up10} &= 2a_1 \xi_2 (R(b_1 \xi_3 - \xi_1 \xi_4) - \xi_1 \xi_3) \\ \Delta_q \Delta_{uq11} &= a_1 (\xi_3 \xi_4 - 4 \xi_1 \xi_2^2) \\ \Delta_q \Delta_{uq10} &= -2a_1 \xi_2 ((b_1 R + 1) \xi_3 + (R - 1) \xi_1 \xi_4) \\ \Delta_p \Delta_{wp00} &= -a_1 (\xi_3 (\xi_4 - R \xi_3) + 4 \xi_1 \xi_2^2) \\ \Delta_q \Delta_{wq00} &= b_1 (1 + b_1 R) \xi_3^2 + 4(1 - R) \xi_1^2 \xi_2^2 \\ \Delta_p \Delta_{up00} &= b_1 \xi_3 (\xi_3 + a_1 R \xi_4) + 4 \xi_1 \xi_2^2 (\xi_1 - a_1 R) \\ \Delta_q \Delta_{uq01} &= 2a_1 \xi_2 (\xi_3 - \xi_1 \xi_4) \\ \Delta_q \Delta_{uq00} &= a_1 (4(1 - R) \xi_1 \xi_2^2 - (1 + b_1 R) \xi_3 \xi_4) \\ \Delta_p &= \xi_3 (\xi_3 + a_1 R \xi_4) + 4 \xi_1 \xi_2^2 (a_1 R - \xi_1) \\ \Delta_q &= (1 + b_1 R) \xi_3^2 + 4(R - 1) \xi_1^2 \xi_2^2 \\ \tilde{\Delta}_{wp00} &= \tilde{\Delta}_{uq00} = 2(1 - \nu_2), \quad \tilde{\Delta}_{up00} = \tilde{\Delta}_{wq00} = 1 - 2\nu_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$a_1 = 2(1 - \nu_1), \quad b_1 = 1 - 2\nu_1, \quad \xi_1 = \lambda\beta, \quad \xi_2 = \exp(-\lambda\beta), \quad \xi_3 = 1 - \xi_2^2, \quad \xi_4 = 1 + \xi_2^2$$

Соответствующие решению (2.5)–(2.7) представления функций интенсивности нормальной и касательной пригрузок в краевых условиях (2.1) на полуоси $0 \leq \rho < \infty$ имеют вид

$$p_1^*(\rho) = -\int_0^{\infty} \beta R(\beta) \Delta_{wp11}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta \quad (2.8)$$

$$q_1^*(\rho) = -\int_0^{\infty} \beta R(\beta) \Delta_{wq11}(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta$$

где $\Delta_{ws11}(\beta)$ ($s = p, q$) – функции, представленные формулами из (2.7), причем принимаем, что

$$R(\beta) = \varepsilon \exp(-n\beta), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad n \gg 1 \quad (2.9)$$

Введение функций интенсивности пригрузки $p_1^*(\rho), q_1^*(\rho)$ (2.8) в краевые условия (2.1) предназначено только для обеспечения через функцию $R(\beta)$ (2.9) сходимости интегралов (2.5), которые в случае $R(\beta) \equiv 0$ и, стало быть, при $p_1^*(\rho) \equiv q_1^*(\rho) \equiv 0$ расходятся в нижних пределах. Но при этом требуется, чтобы модули $|p_1^*(\rho)|, |q_1^*(\rho)|$ ($0 \leq \rho < \infty$) и модуль главного вектора пригрузки $p_1^*(\rho)$ (главный вектор пригрузки $q_1^*(\rho)$ обращается в нуль по условию симметрии) не превышали сколь угодно малой величины $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$, зависящей от постоянных ε, n функции $R(\beta)$ (2.9). При $\varepsilon \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ имеем $\delta(\varepsilon, n) = O(n^{-1} \sqrt{\varepsilon/n})$ и, стало быть, функции $p_1^*(\rho), q_1^*(\rho)$ в краевых условиях (2.1) можно интерпретировать как бесконечно малые функции регуляризации базового решения с сохранением его формы и сколь угодно высокой точности.

Для постановки смешанных задач выпишем главные и старшие члены асимптотических разложений функций (2.7) при $\beta \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Delta_{wp11}, \Delta_{uq11}, -\Delta_{wp00}, -\Delta_{uq00} &\sim 2(1 - \nu_1) + 8(1 - \nu_1)\xi_1^2(\beta)\xi_2^2(\beta) \\ \Delta_{wq11}, \Delta_{up11}, \Delta_{wq00}, \Delta_{up00} &\sim 1 - 2\nu_1 + 8(1 - \nu_1)\xi_1^2(\beta)\xi_2^2(\beta) \\ -\Delta_{wp10}, \Delta_{wq10}, -\Delta_{up10}, \Delta_{uq10} & \\ \Delta_{wp01}, \Delta_{wq01}, -\Delta_{up01}, -\Delta_{uq01} &\sim 4(1 - \nu_1)\xi_1(\beta)\xi_2(\beta) \end{aligned} \quad (2.10)$$

3. Постановка и решение смешанной задачи для кольцевых штампа и трещины. На внешней границе двухслойного полупространства $t = 1$ в области контакта со сцепленным штампом $L_1 = (0 < \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2)$ заданы отличные от нуля осевые перемещения и равные нулю радиальные перемещения

$$\frac{E_1}{(1 + \nu_1)a} w_1 = -h + \gamma(\rho), \quad u_1 \equiv 0 \quad (3.1)$$

а вне области контакта с штампом $L_2 = (0 \leq \rho < \rho_1, \rho_2 < \rho < \infty)$ равные нулю осевые и касательные напряжения

$$\sigma_{z1} = 0, \quad \tau_{rz1} = 0, \quad \rho \in L_2 \quad (3.2)$$

Поясним, что в условиях (3.1) постоянная h выражается через глубину погружения штампа в слой w_1° по формуле $h = E_1 w_1^\circ / [a(1 + \nu_1)] > 0$, а функция $\gamma(\rho) \geq 0$ описывает поверхность основания (подошвы) штампа.

На границе раздела слоев $t = 0$ на верхнем и нижнем берегах кольцевой трещины в области $L_3 = (0 < \rho_3 \leq \rho \leq \rho_4)$ заданы осевые и касательные напряжения:

$$\sigma_{z1} = \sigma_{z2} = p_{01}(\rho), \quad \tau_{rz1} = \tau_{rz2} = q_{01}(\rho), \quad \rho \in L_3 \quad (3.3)$$

а вне трещины в области $L_4 = (0 \leq \rho < \rho_3, \rho_4 < \rho < \infty)$ должны выполняться условия непрерывности осевых и радиальных перемещений

$$w_1 = w_2, \quad u_1 = u_2, \quad \rho \in L_4 \quad (3.4)$$

Кроме того, в области L_4 базовое решение автоматически удовлетворяет условиям непрерывности осевых и касательных напряжений:

$$\sigma_{z1} = \sigma_{z2}, \quad \tau_{rz1} = \tau_{rz2}, \quad \rho \in L_4 \quad (3.5)$$

Подставляя формулы базового решения (2.1)–(2.6) в краевые условия (3.1)–(3.4), получаем следующую систему парных интегральных уравнений (ПИУ) относительно трансформант Ганкеля $\bar{p}_0(\beta), \bar{q}_0(\beta), \bar{p}_1(\beta), \bar{q}_1(\beta)$:

$$\int_0^{\infty} D_{w1}(1, \beta) J_0(\rho\beta) d\beta = -h + \gamma(\rho), \quad \int_0^{\infty} D_{u1}(1, \beta) J_1(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \rho \in L_1 \quad (3.6)$$

$$\int_0^{\infty} \beta \bar{p}_1(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \int_0^{\infty} \beta \bar{q}_1(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \rho \in L_2 \quad (3.7)$$

$$\int_0^{\infty} \beta \bar{p}_0(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = p_{01}(\rho), \quad \int_0^{\infty} \beta \bar{q}_0(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = q_{01}(\rho), \quad \rho \in L_3 \quad (3.8)$$

$$\int_0^{\infty} D_{w12}(0, \beta) J_0(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \int_0^{\infty} D_{u12}(0, \beta) J_1(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \rho \in L_4 \quad (3.9)$$

Функции $D_{v12}(0, \beta) = D_{v1}(0, \beta) - \chi D_{v2}(0, \beta)$ ($v = w, u$) представляются формулой (2.6) для $D_{vs}(0, \beta)$ с учетом замены $\Delta_{vs}(0)(\beta)$ ($v = w, u; s = p, q$) на следующие функции $\Delta_{vs}(\beta)$:

$$\Delta_{wp0} = \Delta_{wp00} - 2(1 - v_2)\chi, \quad \Delta_{wq0} = \Delta_{wq00} - (1 - 2v_2)\chi \quad (3.10)$$

$$\Delta_{up0} = \Delta_{up00} - (1 - 2v_2)\chi, \quad \Delta_{uq0} = \Delta_{uq00} - 2(1 - v_2)\chi$$

Учитывая краевые условия (3.2), запишем их трансформанты Ганкеля в форме

$$\bar{p}_1(\beta) = \int_{L_1} \rho p_1(\rho) J_0(\rho\beta) d\rho, \quad \bar{q}_1(\beta) = \int_{L_1} \rho q_1(\rho) J_1(\rho\beta) d\rho \quad (3.11)$$

Видно, что по теореме обращения Ганкеля трансформанты (3.11) автоматически удовлетворяют уравнениям (3.7), и поэтому последние исключаются из дальнейшего рассмотрения системы ПИУ (3.6)–(3.9).

Оставшуюся систему ПИУ (3.6), (3.8), (3.9) при учете (3.11) можно непосредственно свести к системе СИУ на неограниченном контуре (L_1, L_4), с которым связаны дополнительные трудности аналитического и численного исследования системы СИУ. Поэтому систему ПИУ (3.6), (3.8), (3.9) сначала целесообразно преобразовать к равносильной системе ПИУ, которая затем сводится к удобной для аналитического и численного исследований системе СИУ на ограниченном контуре (L_1, L_3). Для реализации этого подхода переходим в системе ПИУ (3.6), (3.8), (3.9) от трансформант $\bar{p}_0(\beta), \bar{q}_0(\beta)$ к новым трансформантам Ганкеля $\bar{f}(\beta), \bar{g}(\beta)$ по формулам

$$\bar{f}(\beta) = D_{u12}(0, \beta), \quad \bar{g}(\beta) = D_{w12}(0, \beta) \quad (3.12)$$

Трансформанты Ганкеля $\bar{f}(\beta), \bar{g}(\beta)$ соответствуют определенным на контуре L_3 известным функциям $f(\rho), g(\rho)$ и представляются интегралами Ганкеля

$$\bar{f}(\beta) = \int_{L_3} \rho f(\rho) J_0(\rho\beta) d\rho, \quad \bar{g}(\beta) = \int_{L_3} \rho g(\rho) J_1(\rho\beta) d\rho \quad (3.13)$$

Равенства (3.12) при учете указанных выше конструктивных выражений функций $D_{v12}(0, \beta)$ ($v = w, u$) представляют собой систему функциональных уравнений относительно трансформант $\bar{f}(\beta), \bar{g}(\beta), \bar{p}_k(\beta), \bar{q}_k(\beta)$ ($k = 0, 1$).

Из этой системы находим выражения трансформант $\bar{p}_0(\beta), \bar{q}_0(\beta)$ через $\bar{f}(\beta), \bar{g}(\beta), \bar{p}_1(\beta), \bar{q}_1(\beta)$:

$$\bar{p}_0(\beta) = N_u(\beta), \quad \bar{q}_0(\beta) = N_w(\beta) \quad (3.14)$$

$$N_\nu(\beta) = \Delta_{\nu f} \bar{f}(\beta) + \Delta_{\nu g} \bar{g}(\beta) - B_{\nu p} \bar{p}_1(\beta) - B_{\nu q} \bar{q}_1(\beta) \quad (\nu = w, u) \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_{uf} &= \Delta_{wq0} / \Delta_{pq}, & \Delta_{ug} &= -\Delta_{uq0} / \Delta_{pq} \\ \Delta_{wf} &= -\Delta_{wp0} / \Delta_{pq}, & \Delta_{wg} &= \Delta_{up0} / \Delta_{pq} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{pq} &= \Delta_{up0} \Delta_{wq0} - \Delta_{uq0} \Delta_{wp0} \\ B_{\nu s} &= \Delta_{\nu f} \Delta_{us01} + \Delta_{\nu g} \Delta_{ws01}, \quad \nu = w, u; \quad s = p, q \end{aligned} \quad (3.17)$$

Подставляя формулы (3.14) в уравнения (3.6), (3.8), а формулы (3.12) в уравнения (3.9), получаем следующую систему ПИУ относительно трансформант $\bar{p}_1(\beta)$, $\bar{q}_1(\beta)$, $\bar{f}(\beta)$, $\bar{g}(\beta)$:

$$\int_0^\infty M_w(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = -h + \gamma(\rho), \quad \int_0^\infty M_u(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \rho \in L_1 \quad (3.18)$$

$$\int_0^\infty \beta N_u(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = p_{01}(\rho), \quad \int_0^\infty \beta N_w(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = q_{01}(\rho), \quad \rho \in L_3 \quad (3.19)$$

$$\int_0^\infty \bar{g}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \int_0^\infty \bar{f}(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \rho \in L_4 \quad (3.20)$$

где

$$M_\nu(\beta) = \Delta_{\nu p} \bar{p}_1(\beta) + \Delta_{\nu q} \bar{q}_1(\beta) + B_{\nu f} \bar{f}(\beta) + B_{\nu g} \bar{g}(\beta), \quad \nu = w, u \quad (3.21)$$

$$\Delta_{\nu s} = \Delta_{\nu s11} - \Delta_{\nu p10} B_{\nu s} - \Delta_{\nu q10} B_{\nu s}, \quad \nu = w, u; \quad s = p, q \quad (3.22)$$

$$B_{\nu l} = \Delta_{\nu p10} \Delta_{\nu l} + \Delta_{\nu q10} \Delta_{\nu l}, \quad \nu = w, u; \quad l = f, g \quad (3.23)$$

Далее проводим следующие преобразования уравнений (3.19), (3.20): первое уравнение (3.19) умножаем на ρ и интегрируем по ρ в пределах от ρ_3 до ρ , а затем делим на ρ ; второе уравнение (3.19) интегрируем по ρ в пределах от ρ_3 до ρ ; первое уравнение (3.20) дифференцируем по ρ ; второе уравнение (3.20) умножаем на ρ и дифференцируем по ρ , а затем делим на ρ . В результате преобразованные уравнения приобретают вид

$$\int_0^\infty N_u(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = G(\rho) + \frac{D}{\rho}, \quad \int_0^\infty N_w(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = F(\rho) + C, \quad \rho \in L_3 \quad (3.24)$$

$$\int_0^\infty \beta \bar{g}(\beta) J_1(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \int_0^\infty \beta \bar{f}(\beta) J_0(\rho\beta) d\beta = 0, \quad \rho \in L_4 \quad (3.25)$$

где

$$G(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{\rho_3}^{\rho} x p_{01}(x) dx, \quad F(\rho) = - \int_{\rho_3}^{\rho} q_{01}(x) dx \quad (3.26)$$

D, C – произвольные постоянные, которые определяются ниже. По теореме обращения Ганкеля трансформанты $\bar{g}(\beta)$, $\bar{f}(\beta)$ (3.13) автоматически удовлетворяют уравнениям (3.25), и, стало быть, неизвестные трансформанты $\bar{p}_1(\beta)$, $\bar{q}_1(\beta)$, $\bar{f}(\beta)$, $\bar{g}(\beta)$

теперь определяются системой уравнений (3.18), (3.24) только на ограниченных контурах $L_1 = (0 < \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2)$ и $L_3 = (0 < \rho_3 \leq \rho \leq \rho_4)$.

Далее, используя асимптотику (2.10) и равенства (3.10), выделяем главные члены функций $\Delta_{vr}(\beta)$ ($v = w, u; r = p, q, f, g$) (3.22), (3.16) при $\beta \rightarrow \infty$

$$(\Delta_{wp}, \Delta_{uq}) = a_1 + (\Delta_{wp}^*, \Delta_{uq}^*) \quad (\Delta_{wq}, \Delta_{up}) = b_1 + (\Delta_{wq}^*, \Delta_{up}^*) \quad (3.27)$$

$$(\Delta_{wf}, \Delta_{ug}) = a_2 + (\Delta_{wf}^*, \Delta_{ug}^*) \quad (\Delta_{wg}, \Delta_{uf}) = b_2 + (\Delta_{wg}^*, \Delta_{uf}^*)$$

где постоянные a_1, b_1 определяются формулами (2.7), а

$$a_2 = c/(d^2 - c^2), \quad b_2 = d/(d^2 - c^2) \\ c = 2(1 - v_1 + (1 - v_2)\chi), \quad d = 1 - 2v_1 - (1 - 2v_2)\chi \quad (3.28)$$

Определяемые по формулам (3.27), (3.23), (3.17) $\Delta_{vr}^*(\beta), B_{vr}(\beta)$ ($v = w, u; r = p, q, f, g$) при $\beta \rightarrow \infty$ имеют порядки бесконечно малых функций

$$\Delta_{vr}^* = O(\xi_1^2(\beta)\xi_2^2(\beta)), \quad B_{vr} = O(\xi_1(\beta)\xi_2(\beta)) \quad (3.29)$$

На систему интегральных уравнений (3.18), (3.24) при учете формул (3.27) полностью распространяется математический аппарат исследования аналогичной системы уравнений в основной смешанной задаче. Применяя его, сводим упомянутую систему уравнений для трансформант к следующей разрешающей исходную задачу системе двух сингулярных интегральных уравнений (СИУ) с ядрами Коши для комплексных функций действительного переменного $w_j(x) = \varphi_j(x) + i\vartheta_j(x)$ и их сопряженных $\bar{w}_j(x) = \bar{\varphi}_j(x) - i\bar{\vartheta}_j(x)$ ($j = 1, 2$):

$$a_j \omega_j(x) + \frac{b_j}{\pi i} \int_{\rho_{2j-1}}^{\rho_{2j}} \frac{\omega_j(t)}{t-x} dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^2 \int_{\rho_{2n-1}}^{\rho_{2n}} \frac{H_{jn}^+(x,t)\omega_n(t) + H_{jn}^-(x,t)\overline{\omega_n(t)}}{\sqrt{(x-\rho_{2j-1})(t-\rho_{2n-1})}} dt = \\ = \frac{2}{\pi} \frac{\Phi_j(x)}{\sqrt{x-\rho_{2j-1}}} \quad (3.30)$$

Здесь

$$H_{jn}^\pm(x,t) = K_{00jn}(x,t) \pm K_{11jn}(x,t) + i[K_{10jn}(x,t) \mp K_{01jn}(x,t)] \quad (3.31)$$

$$K_{00jn} = xtG_{00jn} + a_j M_{00jn}, \quad K_{01jn} = xG_{01jn} + b_j M_{01jn}$$

$$K_{10jn} = tG_{10jn} + b_j M_{10jn}, \quad K_{11jn} = G_{11jn} + a_j M_{11jn} \quad (3.32)$$

$$G_{kmjn} = \int_0^\infty b_{kmjn} S_{kj}(x,\beta) S_{mn}(t,\beta) d\beta, \quad k, m = 0, 1$$

$$b_{0011} = \Delta_{wp}^*(\beta), \quad b_{0111} = \Delta_{wq}^*(\beta), \quad b_{1011} = \Delta_{up}^*(\beta), \quad b_{1111} = \Delta_{uq}^*(\beta)$$

$$b_{0012} = B_{wf}(\beta), \quad b_{0112} = B_{wg}(\beta), \quad b_{1012} = B_{uf}(\beta), \quad b_{1112} = B_{ug}(\beta) \quad (3.33)$$

$$b_{0021} = -B_{wp}(\beta), \quad b_{0121} = -B_{wq}(\beta), \quad b_{1021} = -B_{up}(\beta), \quad b_{1121} = -B_{uq}(\beta)$$

$$b_{0022} = \Delta_{wf}^*(\beta), \quad b_{0122} = \Delta_{wg}^*(\beta), \quad b_{1022} = \Delta_{uf}^*(\beta), \quad b_{1122} = \Delta_{ug}^*(\beta)$$

$$S_{0j}(x, \beta) = \frac{J_0(\rho_{2j-1}\beta)}{\sqrt{x + \rho_{2j-1}}} - \beta \sqrt{x - \rho_{2j-1}} \int_{\rho_{2j-1}}^x \frac{J_1(\rho\beta)}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} d\rho \quad (3.34)$$

$$S_{1j}(x, \beta) = \frac{\rho_{2j-1} J_1(\rho_{2j-1}\beta)}{\sqrt{x + \rho_{2j-1}}} + \beta \sqrt{x - \rho_{2j-1}} \int_{\rho_{2j-1}}^x \frac{\rho J_0(\rho\beta)}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} d\rho$$

$$M_{kkjj} = \frac{2m_{kkjj}(x, t)}{\pi\eta_1^+(x, t)}, \quad k = 0, 1$$

$$M_{01jj} = \frac{\eta_1^-(x, t)}{t - x} \eta_2(x, t), \quad M_{10jj} = -\frac{\eta_1^-(x, t)}{t - x} \eta_2(t, x)$$

$$m_{00jj} = \frac{xt}{2(x^2 - t^2)} \left(\frac{1}{x} \eta_3(x) - \frac{1}{t} \eta_3(t) \right) \quad (3.35)$$

$$m_{11jj} = -\rho_{2j-1} + \frac{1}{2(x^2 - t^2)} (x\eta_3(x) - t\eta_3(t))$$

$$\eta_1^\pm(x, t) = \sqrt{(x \pm \rho_{2j-1})(t \pm \rho_{2j-1})}, \quad \eta_2(x, t) = \frac{x}{t + x} \sqrt{\frac{t^2 - \rho_{2j-1}^2}{x^2 - \rho_{2j-1}^2}} - \frac{1}{2}$$

$$\eta_3(x) = (x^2 - \rho_{2j-1}^2) \ln \frac{x + \rho_{2j-1}}{x - \rho_{2j-1}}$$

$$M_{kljn} \equiv 0 \quad j \neq n; \quad k, l = 0, 1$$

$$\Phi_1(x) = (\gamma(\rho_1) - h) \frac{x}{\sqrt{x + \rho_1}} + x \sqrt{x - \rho_1} \int_{\rho_1}^x \frac{\gamma'(\rho) d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} \quad (3.36)$$

$$\Phi_2(x) = \sqrt{x - \rho_3} \left(-x \int_{\rho_3}^x \frac{q_{01}(\rho) d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} + i \int_{\rho_3}^x \frac{\rho p_{01}(\rho) d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} \right) + \frac{Cx + iD}{\sqrt{x + \rho_3}} \quad (3.37)$$

Отметим, что функции $M_{kljj}(x, t)$ (3.35), определенные в квадратах $\rho_{2j-1} \leq x, t \leq \rho_{2j}$ ($j = 1, 2$), имеют устранимые подвижные особенности на диагоналях $t = x$. Значения этих функций при $t = x$ принимаются равными их предельным значениям при $t \rightarrow x$, которые определяются по правилу Лопиталья.

Неизвестные трансформанты $\bar{p}_1(\beta), \bar{q}_1(\beta)$ (3.11) и $\bar{f}(\beta), \bar{g}(\beta)$ (3.13) выражаются через действительные $\varphi_j(x) = \operatorname{Re} \omega_j(x)$ и мнимые $\vartheta_j(x) = \operatorname{Im} \omega_j(x)$ части комплексных функций действительного переменного $\omega_j(x)$ ($j = 1, 2$), удовлетворяющих системе СИУ (3.30), по формулам

$$\bar{p}_1(\beta) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{x\varphi_1(x)S_{01}(x, \beta)}{\sqrt{x - \rho_1}} dx, \quad \bar{q}_1(\beta) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\vartheta_1(x)S_{11}(x, \beta)}{\sqrt{x - \rho_1}} dx \quad (3.38)$$

$$\bar{f}(\beta) = \int_{\rho_3}^{\rho_4} \frac{x\varphi_2(x)S_{02}(x, \beta)}{\sqrt{x - \rho_3}} dx, \quad \bar{g}(\beta) = \int_{\rho_3}^{\rho_4} \frac{\vartheta_2(x)S_{12}(x, \beta)}{\sqrt{x - \rho_3}} dx \quad (3.39)$$

Из теории тождественного преобразования системы уравнений (3.18), (3.24) для трансформант (3.11), (3.13) в систему СИУ (3.30) автоматически следует, что трансформанты $\bar{p}_1(\beta), \bar{q}_1(\beta)$ (3.38) и $\bar{f}(\beta), \bar{g}(\beta)$ (3.39) обращают в тождества все уравнения

системы (3.18), (3.24) и исходной системы (3.18)–(3.20), за возможным исключением уравнений (3.20). Последние уравнения в процессе преобразований продифференцированы по ρ и поэтому подлежат проверке путем подстановки в них трансформант $\bar{f}(\beta), \bar{g}(\beta)$ (3.39). Проверка показала, что уравнения (3.20) удовлетворяются только при дополнительных условиях [2]

$$\int_{\rho_3}^{\rho_4} \frac{x\varphi_2(x)}{\sqrt{x^2 - \rho_3^2}} dx = 0, \quad \int_{\rho_3}^{\rho_4} \frac{\vartheta_2(x)}{\sqrt{x^2 - \rho_3^2}} dx = 0 \quad (3.40)$$

из которых определяются произвольные постоянные C, D в правой части системы СИУ (3.30), входящие в функцию $\Phi_2(x)$ (3.37).

Чтобы удовлетворить условиям (3.40), решение системы СИУ (3.30) ищем в форме

$$\omega_j(x) = \omega_{j1}(x) + C\omega_{j2}(x) + D\omega_{j3}(x), \quad j = 1, 2 \quad (3.41)$$

где $\omega_{j1}(x), \omega_{j2}(x), \omega_{j3}(x)$ – частные решения системы СИУ (3.30) с учетом в ее правой части соответственно: 1) $C = D = 0$; 2) $\Phi_1(x) \equiv 0, \Phi_2(x) = x/\sqrt{x + \rho_3}$ ($C = 1, D = 0$); 3) $\Phi_1(x) \equiv 0, \Phi_2(x) = i/\sqrt{x + \rho_3}$ ($C = 0, D = 1$). Подставляя действительную $\varphi_2(x) = \varphi_{21}(x) + C\varphi_{22}(x) + D\varphi_{23}(x)$ и мнимую $\vartheta_2(x) = \vartheta_{21}(x) + C\vartheta_{22}(x) + D\vartheta_{23}(x)$ части функции $\omega_2(x)$ (3.41) в равенства (3.40), легко выписать замкнутую систему двух алгебраических уравнений относительно постоянных C и D , из которой они вычисляются.

4. Смешанная задача о кольцевом штампе и круговой трещине. Смешанная задача о кольцевом штампе и круговой трещине рассматривается как частный случай задачи из разд. 3 при $\rho_4 < \rho_1$ и $\rho_3 = 0$. Вместе с тем она представляет самостоятельный интерес. Ее постановка и решение повторяет все выкладки, приведенные в разд. 3. Формально она сводится к системе СИУ (3.30) на ограниченном контуре

$$(L_1, L_3^0) = (\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, 0 \leq \rho \leq \rho_4)$$

которую легко выписать, полагая равными нулю значения ρ_{2j-1}, ρ_{2n-1} при $j, n = 2$ во всех формулах (3.30), (3.34), (3.35), (3.37). В этом случае упрощается вид следующих функций:

$$S_{02}(y, \beta) = \cos(y\beta)/\sqrt{y}, \quad S_{12}(y, \beta) = \sqrt{y} \sin(y\beta), \quad y = x, t \quad (4.1)$$

$$M_{0022}(x, t) \equiv M_{1122}(x, t) \equiv 0, \quad M_{0122}(x, t) = M_{1022}(x, t) = \sqrt{xt}/[2(x+t)]$$

Однако система СИУ (3.30) на контуре (L_1, L_3^0) неудобна для исследования рассматриваемой задачи в связи с тем, что построение замкнутого аналитического решения характеристической системы СИУ (3.30) на контуре (L_1, L_3^0) в надлежащем классе функций (непрерывных и ограниченных в центре трещины $\rho = 0$ и неограниченных на конце $\rho = \rho_4$) и, стало быть, регуляризация исходной полной системы СИУ методом Карлемана–Векуа встречают математические трудности. Чтобы избежать эти трудности, систему СИУ (3.30) на контуре (L_1, L_3^0) целесообразно тождественно преобразовать в равносильную систему СИУ на контуре

$$(L_1, L_3^*) = (\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, -\rho_4 \leq \rho \leq \rho_4) \quad (4.2)$$

записывая первое уравнение на контуре $L_1 = (\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2)$ при $\rho_3 = 0$, а второе – на контуре $L_3^* = (-\rho_4 \leq \rho \leq \rho_4)$. При этом функции $M_{1022}(x, t), M_{0122}(x, t)$ (4.1) при учете

четности $\varphi_2(t)$ и нечетности $\vartheta_2(t)$ переходят из регулярной в сингулярную часть системы уравнений, учитывается непрерывность новых ядер

$$\tilde{H}_{12}^{\pm} = H_{12}^{\pm}(x,t)/\sqrt{t}, \quad \tilde{H}_{21}^{\pm} = H_{21}^{\pm}(x,t)/\sqrt{x}, \quad \tilde{H}_{22}^{\pm} = H_{22}^{\pm}(x,t)/\sqrt{xt}$$

и свободная функция $\Phi_2(x)$ (3.37) заменяется на функцию

$$\tilde{\Phi}_2(x) = -x \int_0^x \frac{q_{01}(\rho)d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} + i \int_0^x \frac{\rho p_{01}(\rho)d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} + C + i \frac{D}{x} \quad (4.3)$$

С учетом вышесказанного запись системы СИУ (3.30) на контуре (L_1, L_3^*) не представляет каких-либо трудностей.

Искомые трансформанты $\bar{p}_1(\beta), \bar{q}_1(\beta)$ и $\bar{f}(\beta), \bar{g}(\beta)$ определяются через действительные $\varphi_j(x)$ и мнимые $\nu_j(x)$ части комплексных функций действительного переменного $\omega_j(x)$ ($j = 1, 2$), удовлетворяющих системе СИУ (3.30) на контуре (L_1, L_3^*) (4.2), по формулам (3.38) и

$$\bar{f}(\beta) = \int_0^{\rho_4} \varphi_2(x) \cos(x\beta) dx, \quad \bar{g}(\beta) = \int_0^{\rho_4} \vartheta_2(x) \sin(x\beta) dx \quad (4.4)$$

Подстановка трансформант $\bar{g}(\beta), \bar{f}(\beta)$ (4.4) в уравнения (3.20) показывает, что первое уравнение (3.20) удовлетворяется автоматически, а второе – только при дополнительном условии

$$\int_0^{\rho_4} \varphi_2(x) dx = 0 \quad (4.5)$$

из которого определяется произвольная постоянная C , входящая в функцию $\tilde{\Phi}_2(x)$ (4.3); вторая постоянная D в соотношении (4.3) как невостробованная принимается равной нулю.

Чтобы удовлетворить условию (4.5), решение системы СИУ (3.30) на контуре (L_1, L_3^*) (4.2) ищем в форме

$$\omega_j(x) = \omega_{j1}(x) + C\omega_{j2}(x), \quad j = 1, 2 \quad (4.6)$$

где $\omega_{j1}(x), \omega_{j2}(x)$ ($j = 1, 2$) – частные решения указанной системы СИУ с учетом в ее правой части соответственно: 1) $C = 0, D = 0$; 2) $\Phi_1(x) \equiv 0, \tilde{\Phi}_2(x) = 1$ ($C = 1, D = 0$). Подставляя действительную часть $\varphi_2(x) = \varphi_{21}(x) + C\varphi_{22}(x)$ функции $\omega_2(x)$ (4.6) в равенство (4.5), легко выписать линейное уравнение для определения постоянной C .

5. Смешанная задача о круговом штампе и кольцевой трещине. Смешанная задача о круговом штампе и кольцевой трещине рассматривается как частный случай задачи из разд. 3 при $\rho_3 > \rho_2$ и $\rho_1 = 0$. В этом случае упрощается вид следующих функций:

$$S_{01}(y, \beta) = \cos(y\beta)/\sqrt{y}, \quad S_{11}(y, \beta) = \sqrt{y} \sin(y\beta), \quad y = x, t$$

$$M_{0011}(x, t) \equiv M_{1111}(x, t) \equiv 0, \quad M_{0111}(x, t) \equiv M_{1011}(x, t) \equiv \sqrt{xt}/[2(x+t)] \quad (5.1)$$

По аналогии с задачей из разд. 4 систему СИУ (3.30) целесообразно преобразовать к равносильной системе СИУ на контуре

$$(L_1^*, L_3) = (-\rho_2 \leq \rho \leq \rho_2, \rho_3 \leq \rho \leq \rho_4) \quad (5.2)$$

записывая первое уравнение на контуре $L_1^* = (-\rho_2 \leq \rho \leq \rho_2)$ а второе – на контуре $L_3 = (\rho_3 \leq \rho \leq \rho_4)$ при $\rho_1 = 0$. При этом функции $M_{0111}(x, t), M_{1011}(x, t)$ (5.1) при учете

четности $\varphi_1(t)$ и нечетности $\vartheta_1(t)$ переходят из регулярной в сингулярную часть системы уравнений, учитывается непрерывность новых ядер

$$\tilde{H}_{11}^{\pm} = H_{11}^{\pm}(x,t)/\sqrt{xt}, \quad \tilde{H}_{12}^{\pm} = H_{12}^{\pm}(x,t)/\sqrt{x}, \quad \tilde{H}_{21}^{\pm} = H_{21}^{\pm}(x,t)/\sqrt{t} \quad (5.3)$$

и свободная функция $\Phi_1(x)$ (3.36) с учетом равенства $\gamma(0) = 0$ заменяется на функцию

$$\tilde{\Phi}_1(x) = -h + x \int_0^x \frac{\gamma'(\rho) d\rho}{\sqrt{x^2 - \rho^2}} \quad (5.4)$$

Искомые трансформанты $\bar{p}_1(\beta), \bar{q}_1(\beta)$ и $\bar{f}(\beta), \bar{g}(\beta)$ определяются через решение системы СИУ (3.30) на контуре (L_1^*, L_3) (5.2) $\omega_j(x)$ ($j = 1, 2$) в форме (3.41) по формулам (3.38), (3.39) при $\rho_1 = 0$ с учетом функций $S_{01}(y, \beta), S_{11}(y, \beta)$ (5.1).

Произвольные постоянные C и D , входящие в функцию $\Phi_2(x)$ (3.37), определяются по методике разд. 3 из условий (3.40). При этом функция $\Phi_1(x)$ (3.36) заменяется на $\tilde{\Phi}_1(x)$ (5.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Никишин В.С., Шапиро Г.С. О локальном осесимметричном сжатии упругого слоя, ослабленного кольцевой или круговой щелью // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 1. С. 139–144.
2. Никишин В.С. Задачи теории упругости о кольцевой и круговой трещинах на границе раздела слоя и полупространства // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 3. С. 132–143.

Москва

Поступила в редакцию
8.XII.2000