УДК 539.3

© 2002 г. И.И. Аргатов

ДАВЛЕНИЕ НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ШТАМПА СО СКРУГЛЕННОЙ КРОМКОЙ

Изучается задача одностороннего контакта без трения для штампа, лицевая поверхность которого характеризуется быстрым изменением в окрестности неизвестной априори границы области контакта. Для функции, описывающей вариацию области контакта, и плотности контактных давлений в зоне пограничного слоя получены асимптотические формулы. Исследован вопрос о поведении контактных давлений в окрестности сглаженного концентратора напряжений.

1. Постановка задачи. Предположим, что штамп первоначально касается поверхности упругого полупространства $x_3 > 0$ по области ω_0, ограниченной простым гладким замкнутым контуром Γ_0. При этом лицевая поверхность штампа задается уравнением

$$x_3 = -\Phi_\varepsilon(x_1,x_2); \quad \Phi_\varepsilon(x_1,x_2) = \begin{cases} 0, (x_1,x_2) \in \omega_0 \\ (2R_\varepsilon(s))^{-1} n^2, n \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь s – длина дуги, n – расстояние (с учетом знака), отсчитываемое вдоль внутренней (по отношению к области ω_0) нормали к кривой Γ_0, $R_\varepsilon(s)$ – радиус кривизны бокового участка вертикального сечения штампа, $0 < \varepsilon$ – малый параметр. В дальнейшем будем считать, что

$$R_\varepsilon(s) = \varepsilon R_1(s), \quad s \in \Gamma_0 \tag{1.2}$$

Непрерывная функция $R_1(s)$ предполагается заданной и не зависящей от параметра ε, тем самым $R_\varepsilon(s) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Иными словами, штамп, имеющий при $\varepsilon \neq 0$ подошву в форме гладкой поверхности, в пределе переходит в штамп с острой кромкой.

Рассмотрим контактную задачу о вдавливании описанного штампа в упругое (с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν) полубесконечное тело на глубину δ_0. В предположении отсутствия трения между контактирующими поверхностями при помощи представления Папковича – Нейбера данная задача сводится [1] к отысканию исчезающей на бесконечности гармонической функции u^ε, удовлетворяющей следующим краевым условиям (см., например, [2, 3]):

$$\begin{gathered} u^\varepsilon(\mathbf{x}) \geqslant \delta_0 - \Phi_\varepsilon(x_1,x_2), \quad \partial_3 u^\varepsilon(\mathbf{x}) \leqslant 0 \\ [u^\varepsilon(\mathbf{x}) - \delta_0 + \Phi_\varepsilon(x_1,x_2)]\partial_3 u^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0, \quad x_3 = 0 \quad (x_1,x_2) \in \omega_\varepsilon^* \\ \partial_3 u^\varepsilon(\mathbf{x}) = 0, \quad x_3 = 0 \quad (x_1,x_2) \notin \omega_\varepsilon^* \end{gathered} \tag{1.3}$$

Через ω_ε^* обозначена область, где выполняется неравенство $\delta_0 - \Phi_\varepsilon(x_1, x_2) > 0$. Во внешности замыкания области ω_ε^* лицевая поверхность вдавленного штампа расположена выше невозмущенной границы упругого полупространства, тем самым контакт штампа с упругим основанием возможен исключительно внутри области ω_ε^*.

Собственно область контакта ω_ε с неизвестной априори границей Γ_ε определяется из условия положительности контактных давлений

$$p^\varepsilon(x_1,x_2) = -\alpha^{-1}\partial_3 u^\varepsilon(x_1,x_2,0); \quad \alpha \equiv 2(1-\nu^2)E^{-1} \tag{1.4}$$

На контуре Γ_ε контактное давление обращается в нуль и быстро возрастает при удалении от Γ_ε, достигая своего максимума на некотором малом (зависящем от ε) расстоянии от контура Γ_ε.

Впервые эффект концентрации контактных давлений в осесимметричной задаче для штампа с лицевой поверхностью $\Phi_\varepsilon(x_1, x_2) = A(x_1^2+x_2^2)^n$ с ростом показателя n был отмечен И.Я. Штаерманом [4]. Была решена [5, 6] осесимметричная контактная задача для цилиндрического штампа со скругленной кромкой в рассматриваемой постановке. Был исследован [7] вопрос о концентрации контактных давлений в плоской и осесимметричной задачах в окрестности границы области контакта. Построены [8, 9] решения интегральных уравнений контактных задач, имеющие погранслойный характер. Было получено [10] аналитическое решение неосесиммметричной контактной задачи для эллиптического в плане штампа со скруглением специального вида. Проводились (см. [11, 12] и др.) численные расчеты концентрации контактных давлений. Для случая, когда площадка контакта близка по форме к прямоугольной, предложен [13] метод, сочетающий численный и асимптотический подходы.

Ниже для построения асимптотического решения поставленной задачи применяется асимптотический метод, развитый С.А. Назаровым [14, 15] и ранее использованный при изучении ряда конструкционно нелинейных контактных задач [16, 17]. Рассматриваемый случай отличается от упомянутых тем, что форма штампа характеризуется быстрым изменением в окрестности искомой границы контакта.

2. Асимптотические разложения в окрестности границы области контакта. Обозначим через v^0 решение невозмущенной задачи о поступательном вдавливании в упругое полупространство на глубину δ_0 штампа с плоской подошвой в форме области ω_0. В окрестности контура Γ_0 перейдем к координатам (n, x_3, s), после чего в плоскостях, ортогональных к Γ_0, введем полярные координаты r и $\varphi \in [0, \pi]$ так, что $n = r\cos\varphi$, $x_3 = r\sin\varphi$ и плоский участок подошвы штампа локально задается уравнением $\varphi = 0$.

Известно (см., например, [14, 18, 19]), что для функции v^0 вблизи контура Γ_0 справедлива асимптотическая формула (здесь и далее используется нормировка [14])

$$v^0(\mathbf{x}) = \delta_0 + \alpha(2\pi^{-1})^{1/2} K_0(s) r^{1/2}\sin(\varphi/2) + Q(r^{3/2}), \quad r \to 0 \tag{2.1}$$

Величина $K^0(s)$ имеет смысл коэффициента интенсивности сжимающих напряжений. Именно для плотности контактных давлений, отвечающей потенциалу v^0, из разложения (2.1) вытекает следующее асимптотическое представление:

$$p^0(x_1,x_2) = -(2\pi)^{-1/2} K_0(s) r^{-1/2} + O(r^{1/2}), \quad r \to 0 \tag{2.2}$$

В то же время плотность контактных давлений, отвечающая искомому решению u^ε сингулярно возмущенной задачи (1.3), на контуре Γ_ε области контакта ω_ε не имеет сингулярности, т.е. при $r_\varepsilon \to 0$ должны выполняться соотношения

$$p^\varepsilon(x_1,x_2) = -(2\pi)^{-1/2} k_\varepsilon(s) r_\varepsilon^{1/2} + O(r_\varepsilon) \tag{2.3}$$

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) = \delta_0 - (2R_\varepsilon(s))^{-1} h_\varepsilon(s)^2 - R_\varepsilon(s)^{-1} h_\varepsilon(s) r_\varepsilon \cos\varphi_\varepsilon +$$
$$+\alpha(2\pi^{-1})^{1/2} 3^{-1} k_\varepsilon(s) r_\varepsilon^{3/2}\sin(3\varphi_\varepsilon/2) + O(r_\varepsilon^2) \tag{2.4}$$

Здесь r_ε, $\varphi_\varepsilon \in [0, \pi]$ – полярные координаты в плоскостях, ортогональных к контуру Γ_ε.

Предполагается, что контур Γ_ε описывается уравнением

$$n = -h_\varepsilon(s), \quad s \in \Gamma_0 \tag{2.5}$$

Функция $h_\varepsilon(s)$ подлежит определению в процессе построения приближенного решения исходной задачи.

Заметим, что в отличие от коэффициента $K_0(s)$ из разложения (2.2) величина $k_\varepsilon(s)$, фигурирующая в (2.4), не имеет большого значения для приложений. В рассматриваемой задаче важно определить локальный максимум контактных давлений на краю области контакта.

3. Задача одностороннего контакта для внутреннго асимптотического представления. В окрестности контура Γ_0 оператор Лапласа перепишем в локальных координатах (n, x_3, s). Параметры Ламе данной криволинейной ортогональной системы координат таковы: $H_1 = H_2 = 1$, $H_s(n, s) = 1 - \varkappa_0(s)n$, где $\varkappa_0(s)$ – кривизна контура Γ_0. Введем теперь "расстянутые" координаты (ν – некоторый положительный параметр)

$$\eta_1 = \varepsilon^{-\nu} n, \quad \eta_2 = \varepsilon^{-\nu} x_3 \tag{3.1}$$

Наконец, полученное дифференциальное выражение разложим по степеням параметра ε^ν, выделяя главный член $\varepsilon^{-2\nu}(\partial^2/\partial\eta_1^2 + \partial^2/\partial\eta_2^2)$ – двумерный лапласиан.

Таким образом, внутреннее асимптотическое представление $w^\varepsilon(\boldsymbol{\eta}, s)$ потенциала $u^\varepsilon(\mathbf{x})$ в главном должно удовлетворять уравнению Лапласа в полуплоскости $\eta_2 > 0$. Краевое условие при $\eta_2 = 0$ вытекает из (1.3). В соответствии с формулами (3.1) и (1.1), (1.2) имеем

$$w^\varepsilon(\eta_1, 0, s) \geqslant \delta_0 - \varepsilon^{2\nu-1}\Phi_1(\eta_1, s), \quad \partial_3 w^\varepsilon(\eta_1, 0, s) \leqslant 0$$

$$[w^\varepsilon(\eta_1, 0, s) - \delta_0 + \varepsilon^{2\nu-1}\Phi_1(\eta_1, s)]\partial_3 w^\varepsilon(\eta_1, 0, s) = 0 \tag{3.2}$$

Здесь $\Phi_1(\eta_1, s)$ – функция, определяющая форму подошвы штампа в окрестности контура Γ_0, причем

$$\Phi_1(\eta_1, s) = \begin{cases} 0, \eta_1 > 0 \\ (2R_1(s))^{-1}\eta_1^2, \eta_1 \leqslant 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Условие, налагаемое на поведение функции $w^\varepsilon(\boldsymbol{\eta}, s)$ при $|\boldsymbol{\eta}| = (\eta_1^2 + \eta_2^2)^{1/2} \to \infty$, получим в результате ее сращивания (см. [18, 20, 21] и др.) с функцией $v^0(\mathbf{x})$, главным членом внешнего асимптотического разложения. Так, подставляя в формулу (2.1) выражение $r = \varepsilon^\nu\rho$, из условия совпадения старших членов асимптотики выводим упомянутое асимптотическое соотношение

$$w^\varepsilon(\boldsymbol{\eta}, s) = \delta_0 + \varepsilon^{\nu/2}\alpha(2\pi^{-1})^{1/2}K_0(s)\rho^{1/2}\sin(\varphi/2) + O(\rho^{-1/2}), \quad \rho \to \infty \tag{3.4}$$

Здесь ρ и φ – полярные координаты, ассоциированные с растянутыми координатами (3.1).

Наконец, определим значение параметра ν из условия совпадения порядков $\varepsilon^{2\nu-1}$ и $\varepsilon^{\nu/2}$ в соотношениях (3.2) и (3.4). Имеем: $\nu = 2/3$.

Соотношения (3.2), (3.4) составляют задачу для определения гармонической в полуплоскости $\eta_2 > 0$ функции $w^\varepsilon(\boldsymbol{\eta}, s)$, параметрически зависящей от координаты s.

4. Вариация границы области контакта. Согласно уравнениям (2.5) и (3.1), функцию $h_\varepsilon(s)$, определяющую положение искомой границы области контакта Γ_ε (выделяя в явном виде зависимость от параметра ε), следует представить в форме

$$h_\varepsilon(s) = \varepsilon^{2/3}h_1(s), \quad s \in \Gamma_0 \tag{4.1}$$

Наряду с полярными координатами ρ и φ на плоскости декартовых координат η_1 и η_2 введем полярные координаты ρ_h и $\varphi_h \in [0, \pi]$ с полюсом в точке $O_1 = (-h_1(s), 0)$.

Ввиду разложения (3.4), выделяя растущие на бесконечности слагаемые, положим

$$w^\varepsilon(\boldsymbol{\eta}, s) = \delta_0 + \varepsilon^{1/3}\left[\alpha(2\pi^{-1})^{1/2} K_0(s)\rho_h^{1/2}\sin(\varphi_h/2) + W^0(\boldsymbol{\eta}, s)\right] \tag{4.2}$$

Краевое условие, которому должна удовлетворять исчезающая на бесконечности гармоническая функция $W^0(\boldsymbol{\eta}, s)$, получается из (3.2) после подстановки туда выражения (4.2).

По предположению контакт осуществляется на участке $\eta_1 \geqslant -h_1(s)$, т.е. при $\eta_1 \geqslant -h_1(s)$ выполняется равенство $w^\varepsilon(\eta_1, 0, s) = \delta_0 - \varepsilon^{1/3}\Phi_1(\eta_1, s)$, причем оставшаяся часть границы полуплоскости должна быть свободна от напряжений, т.е. $\partial_2 w^\varepsilon(\eta_1, 0, s) = 0$ при $\eta_1 < -h_1(s)$. Поскольку гармоническая функция $\rho_h^{1/2}\sin(\varphi_h/2)$ в точности удовлетворяет указанным краевым условиям, находим

$$W^0(\eta_1, 0, s) = -\Phi_1(\eta_1, s), \quad \eta_1 \geqslant -h_1(s); \quad \partial_2 W^0(\eta_1, 0, s) = 0, \quad \eta_1 < -h_1(s) \tag{4.3}$$

Кроме того, в окрестности точки O_1 при $\rho_h \to 0$, согласно формуле (2.4), имеет место следующее асимптотическое поведение:

$$W^0(\boldsymbol{\eta}, s) = -(2R_1(s))^{-1}h_1(s)^2 - \alpha(2\pi^{-1})^{1/2}K_0(s)\rho_h^{1/2}\sin(\varphi_h/2) + O(\rho_h) \tag{4.4}$$

Иными словами, нормальная производная функции $W^0(\boldsymbol{\eta}, s)$ на границе полуплоскости $\eta_2 > 0$ имеет заданную корневую особенность в точке $\eta_1 = -h_1(s)$. Заметим также, что справедливость второго равенства в краевом условии (3.2) для функции (4.2) необходимо проверять апостериори.

Наконец, значение $h_1(s)$ определим из условия, что коэффициент интенсивности контактных давлений, отвечающих функции $W^0(\boldsymbol{\eta}, s)$, должен равняться $-K_0(s)$.

Применяя известную методику [22, 23], подставим гармонические функции $W^0(\boldsymbol{\eta}, s)$ и $\zeta(\boldsymbol{\eta}) = (2\pi)^{-1/2}\rho_h^{-1/2}\sin(\varphi_h/2)$ в формулу Грина для области, представляющей собой половину кольца с центром в точке O_1 и радиусами δ и R. Принимая во внимание равенства $\partial_2\zeta(\eta_1, 0) = 0$ при $\eta_1 < -h_1(s)$ и $\zeta(\eta_1, 0) = 0$ при $\eta_1 > -h_1(s)$, а также граничные условия (4.3), будем иметь

$$\int\limits_{S_\delta^+ \cup S_R^+} (W^0(\boldsymbol{\eta}, s)\partial_\nu\zeta(\boldsymbol{\eta}) - \zeta(\boldsymbol{\eta})\partial_\nu W^0(\boldsymbol{\eta}, s))ds_\nu + \int\limits_{-h_1(s)+\delta}^{0} \Phi_1(\eta_1, s)\partial_2\zeta(\eta_1)d\eta_1 = 0$$

Здесь S_δ^+ и S_R^+ – лежащие в полуплоскости $\eta_2 > 0$ полуокружности с центром в точке O_1 и радиусами δ и R, ∂_ν – производная вдоль внешней нормали, ds_ν – дифференциал длины дуги.

Для вычисления криволинейного интеграла по дуге S_δ^+ воспользуемся асимптотической формулой (4.4). Интеграл по дуге S_R^+ оценим, используя асимптотические соотношения $W^0(\boldsymbol{\eta}, s) = O(\rho_h^{-1/2})$ и $\zeta(\boldsymbol{\eta}) = O(\rho_h^{-1/2})$ при $\rho_h \to \infty$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$ и $R \to \infty$, в результате несложных вычислений получаем равенство

$$-\frac{\alpha}{2}K_0(s) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\lim_{\delta\to 0}\left(\int\limits_\delta^{h_1(s)} x^{-3/2}\Phi_1(x - h_1(s), s)dx - \frac{2}{\sqrt{\delta}}\Phi_1(-h_1(s), s)\right) = 0$$

Интегрируя по частям при учете значения $\Phi_1(0, s) = 0$, выводим

$$-\frac{\alpha}{2}K_0(s) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{h_1(s)} x^{-1/2}\Phi_1'(x - h_1(s), s)dx = 0 \tag{4.5}$$

где штрихом обозначена производная функции $\Phi_1(\eta_1, s)$ по первому аргументу.

Подставляя в (4.5) выражение для подынтегральной функции, согласно (3.3), находим

$$h_1(s)=\left(-\frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha K_0(s)R_1(s)\right)^{2/3} \tag{4.6}$$

Формулы (2.5), (4.1) и (4.6) в главном определяют положение искомой границы Γ_ε области контакта ω_ε. Подчеркнем, что по методу С.А. Назарова [14, 15] соотношения (4.5) и (4.6) получены без непосредственного построения функции $W^0(\eta, s)$.

5. Концентрация давлений в окрестности границы области контакта. Переходя к растянутым координатам (3.1), учтем соотношение $\partial/\partial x_3 = \varepsilon^{-2/3}\partial/\partial\eta_2$ и на основании формулы (1.4) для плотности контактных давлений в окрестности границы Γ_ε получим асимптотическое представление

$$p^\varepsilon(x_1,x_2)\simeq -\alpha^{-1}\varepsilon^{-2/3}\partial_2 w^\varepsilon(\eta_1 0,s) \tag{5.1}$$

Решение задачи (3.2), (3.4) может быть найдено в явном виде. В частности, согласно известным результатам [24], имеем (интеграл понимается в смысле главного значения по Коши)

$$-\varepsilon^{-1/3}\alpha^{-1}\partial_2 w^\varepsilon(\eta_1,0,s)=-\frac{K_0(s)}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\eta_1+h_1}}+\frac{1}{\pi\alpha\sqrt{\eta_1+h_1}}\int_{-h_1}^{0}\frac{\sqrt{t+h_1}\,\Phi_1'(t,s)}{t-\eta_1}dt \tag{5.2}$$

Заметим, что при выводе формулы (5.2) учтено условие сращивания внутреннего асимптотического представления (5.1) с внешним (2.2).

Нетрудно видеть, что контактное давление (5.1) обращается в нуль при $\eta_1 = -h_1(s)$, если только выполнено равенство (4.5).

Подставляя теперь в интеграл (5.2) выражение (3.3), для контактного давления в зоне пограничного слоя (при учете равенства (4.6)) получаем следующее асимптотическое представление:

$$p^\varepsilon(x_1,x_2)\simeq\frac{\varepsilon^{-1/3}h_1(s)}{\pi\alpha R_1(s)}F\left(\frac{\eta_1+h_1(s)}{h_1(s)}\right) \tag{5.3}$$

$$F(\xi)=2\sqrt{\xi}+(\xi-1)\ln\frac{|\sqrt{\xi}-1|}{\sqrt{\xi}+1} \tag{5.4}$$

Функция $F(\xi)$ имеет максимум при $\xi_0 \approx 0.695$, равный $F(\xi_0) \approx 2.399$. Заметим, что значение ξ_0 определяется как корень уравнения $F'(\xi) = 0$, которое после некоторых преобразований приводится к виду (ср. с результатами Н.А. Ростовцева [7])

$$\xi^{-1/2}\,\mathrm{th}\,\xi^{-1/2}=1 \tag{5.5}$$

При этом справедливо равенство

$$F(\xi_0)=2\xi_0^{-1/2} \tag{5.6}$$

Формулы (4.5) и (5.3) в первом приближении решают задачу о концентрации контактных давлений в окрестности скругленной острой кромки штампа.

6. Пример. Рассмотрим осесимметричный случай, когда контур Γ_0 представляет собой окружность радиусом b и $R_\varepsilon = \varepsilon R_1$. Давление под цилиндрическим штампом с острой кромкой распределено по закону (см., например, [1])

$$p_0(x_1,x_2)=2(\pi\alpha)^{-1}\delta_0(b^2-x_1^2-x_2^2)^{-1/2}$$

Отсюда определяем значение коэффициента интенсивности сжимающих напряжений $K_0 = -2\alpha^{-1}\pi^{-1/2}b^{-1/2}\delta_0$. Следовательно, по формулам (4.1) и (4.6) получаем

$$h_\varepsilon = \left(\frac{3\delta_0 R_\varepsilon}{2\sqrt{2}\sqrt{b}}\right)^{2/3} \tag{6.1}$$

С другой стороны, согласно известному решению [6], для определения величины h_ε имеем уравнения

$$h_\varepsilon = b(\sec\varphi_0 - 1), \quad \delta_0 = R_\varepsilon^{-1}b^2\sec\varphi_0(\operatorname{tg}\varphi_0 - \varphi_0)$$

Удерживая в разложениях только члены низших степеней, получаем приближенные уравнения $h_\varepsilon = 2^{-1}b\varphi_0^2$ и $\delta_0 = 3^{-1}R_\varepsilon^{-1}b^2\varphi_0^3$. Исключая вспомогательную переменную φ_0, приходим к формуле (6.1). Заметим, что скругление кромки штампа в главном не оказывает влияния на зависимость

$$P = 4\alpha^{-1}b\delta_0 \tag{6.2}$$

между перемещением штампа δ_0 и действующей на него силой P.

В рассматриваемой осесимметричной задаче было введено [7] понятие коэффициента концентрации давлений

$$k(x_1, x_2) = \pi b^2 P^{-1} p^\varepsilon(x_1, x_2)$$

Для максимума коэффициента концентрации получена следующая оценка [7]:

$$k_{\max} \approx \frac{3\lambda}{4\sqrt{2}}(h_\varepsilon / b)^{-1/2} \tag{6.3}$$

Здесь λ – корень уравнения $\lambda \operatorname{th}\lambda = 1$.

По формулам (5.3), (5.6) находим

$$k_{\max} \approx \frac{bh_\varepsilon}{2\delta_0 R_\varepsilon \sqrt{\xi_0}}$$

Исключая из данного соотношения величину δ_0 с помощью равенства (6.1), получаем формулу (6.3), если принять во внимание равенство $\lambda = \xi_0^{-1/2}$.

Заметим, что форма скругления, для которой удалось получить [10] простого вида аналитическое решение, в окрестности контура Γ_0 определяется уравнением $x_3 = -C(s)|n|^{3/2}$, где $C(s)$ – определенная функция. Этим, по-видимому, и объясняется значительное (15% в зоне пограничного слоя) расхождение расчетных данных [10] и [6].

7. Обсуждение результатов и обобщение. Возвращаясь от растянутых координат (3.1) к реальным, для вариации границы области контакта, согласно формуле (4.6), получаем

$$h(s) = \left(-\frac{3\sqrt{\pi}(1-\nu^2)}{2\sqrt{2}E}K_0(s)R(s)\right)^{2/3} \tag{7.1}$$

Здесь и далее не указывается зависимость величин $R(s)$ и $h(s)$ от параметра ε, введение которого было обусловлено существом применяемого асимптотического подхода.

В окрестности границы области контакта для давления под штампом со скругленной острой кромкой, согласно соотношению (5.3), имеем асимптотическое представление

$$p(x_1, x_2) \approx \frac{Eh(s)}{2\pi(1-\nu^2)R(s)}F\left(\frac{n + h(s)}{h(s)}\right) \tag{7.2}$$

Здесь n – расстояние при учете знака, отсчитываемое от контура Γ_0 вдоль внутренней нормали, функция $F(\xi)$ определена формулой (5.4).

На основании полученных соотношений (7.2) и (5.6) локальный максимум контактных давлений в окрестности сглаженного концентратора напряжений определяется формулой

$$\max p(x_1, x_2) \approx \frac{Eh(s)}{\pi(1-\nu^2)R(s)\sqrt{\xi_0}} \tag{7.3}$$

где ξ_0 – корень уравнения (5.5).

При помощи метода, развитого С.А. Назаровым [15], можно получить оценку погрешности построенного асимптотического решения по энергетической метрике. Формулы (7.1)–(7.3) становятся тем точнее, чем меньше величина $\max\{|\varkappa_0(s)|h(s),\ h(s)\delta_0^{-1}\}$, где $\varkappa_0(s)$ – кривизна контура Γ_0. Они были выведены для случая поступательного вдавливания штампа. Однако нетрудно показать, что формулы (7.1)–(7.3), а также (4.5), (5.1) и (5.2) сохраняют силу и в случае вдавливания штампа с перекосом при условии, что функция $K_0(s)$ отрицательна на Γ_0. Формулы (7.2) и (7.3) представляют собой обобщение результатов Н.А. Ростовцева, полученных для случая осевой симметрии.

Заметим, что предположение об односвязности области ω_0 несущественно. Так, в задаче о давлении на упругое полупространство кольцевого штампа со скругленными кромками необходимо рассматривать два пограничных слоя (которые в первом приближении не взаимодействуют между собой).

Наконец, полученные расчетные формулы оказываются пригодными и в случае давления штампа на границу упругого слоя конечной толщины. Необходимо лишь функцию $K_0(s)$ определять как решение соответствующей контактной задачи для упругого слоя.

Автор благодарит С.А. Назарова за обсуждения и помощь в работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00455).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
2. *Duvaut G., Lions J.-L.* Les Inèquations en Mècanique et Physique. Paris: Dunod, 1972 = Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
3. *Кравчук А.С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: Изд-во Мос. гос. акад. приборостр. и информатики, 1997. 339 с.
4. *Штаерман И.Я.* К теории Герца местных деформаций при сжатии упругих тел // Докл. АН СССР. 1939. Т. 25. № 5. С. 360–362.
5. *Schubert G.* Zur Frage der Druckverteilung unter elastisch gelagerten Tragwerken // Ing. – Arch. 1942. Bd. 13. H. 3. S. 132–147.
6. *Штаерман И.Я.* Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 270 с.
7. *Ростовцев Н.А.* К решению плоской контактной задачи // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 1. С. 99–106.
8. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
9. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
10. *Шишканова С.Ф.* О вдавливании в упругое полупространство эллептического штампа со скругленным краем // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 3. С. 77–80.
11. *Ahmadi N., Keer L.M., Mura T.* Non-Hertzian contact stress analysis for an elastic half-space normal and sliding contact // Intern. J. Solids and Struct. 1983. V. 19. № 4. P. 357–373.
12. *Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н. и др.* Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. Киев: Наук. думка, 1989. 232 с.
13. *Рабинович В.Л., Спектор А.А.* Вариационно-асимптотический метод решения пространственных контактных задач с краевыми эффектами // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 55–62.

14. *Назаров С.А.* Вывод вариационного неравенства для формы малого приращения трещины отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 2. С. 152–160.
15. *Назаров С.А.* О возмущениях решений задачи Синьорини для скалярного уравнения второго порядка // Мат. заметки. 1990. Т. 47. № 1. С. 115–126.
16. *Аргатов И.И.* Давление на упругое полупространство штампа с поверхностью, близкой к эллиптическому параболоиду // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2000. № 1. С. 101–105.
17. *Аргатов И.И.* Асимптотическое решение контактной задачи с полунеизвестной границей области контакта // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 462–466.
18. *Mazja V.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Bd. 1. Berlin: Akademie–Verlag, 1991. 432 S.
19. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
20. *Van Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.; L.: Acad. Press, 1964 = Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
21. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решения краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
22. *Bueckner H.F.* A novel principle for the computation of stress intensity factors // ZAMM. 1970. V. 50. H. 9. P. 529–546.
23. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nahr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
24. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
21.I.2002