

УДК 539.3

© 2002 г. В.М. Александров, Ф.В. Кудрова

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ ПРИ УЧЕТЕ ИЗНОСА

Контактные задачи при учете износа обычно сводятся к своеобразным интегральным уравнениям, содержащим фредгольмовский оператор по пространственной координате и вольтеровский оператор по времени [1, 2]. В развитие предыдущих результатов [3] предлагается эффективный метод решения подобных уравнений для случая, когда износостойкость поверхности одного из взаимодействующих тел меняется по пространственной переменной периодическим образом (двумерный случай).

В несколько иной постановке аналогичная задача рассматривалась ранее [4, 5].

1. Постановка задачи, вывод основного интегрального уравнения. Пусть упругий слой толщины h жестко зашпелен по основанию, и в его верхнюю грань удельным усилием $q(t)$, имеющим размерность напряжения и зависящим от времени t , вдавливаются жесткая бесконечная плита. Плита движется с постоянной скоростью V в направлении оси z (фиг. 1), и в области контакта плиты со слоем возникают силы кулоновского трения, вызывающие износ поверхности слоя.

Будем полагать, что износостойкость поверхности слоя периодически меняется вдоль оси x с шагом $2l$. Такая структура поверхности может быть образована, например, лазерной обработкой или при шлифовке с "прожогами".

Будем считать, что имеет место абразивный износ. Тогда, как экспериментально установлено [6], скорость линейного изнашивания

$$w = Vm(x)\tau(x, t) \tag{1.1}$$

где $m(x)$ – коэффициент износостойкости (периодическая функция с шагом $2l$), $\tau(x, t)$ – контактное касательное усилие. Отсюда следует, что для перемещения поверхности жесткой плиты в направлении оси y вследствие износа слоя будем иметь

$$v_* = -Vkm(x) \int_0^t q(x, \tau) d\tau \tag{1.2}$$

где k – коэффициент кулоновского трения, $q(x, t)$ – контактное давление. Для функции $m(x)$ далее, не нарушая общности, примем выражение

$$m(x) = m_0 + m_1 \cos(\pi x / l), \quad m_0 > m_1 > 0 \tag{1.3}$$

Перемещение поверхности жесткой плиты в направлении оси y вследствие упругого деформирования слоя определяется формулами [7]

$$v = -\frac{1}{\pi\theta} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi, t) K\left(\frac{\xi - x}{h}\right) d\xi$$

$$\theta = \frac{G}{1 - \nu}, \quad K(t) = \int_0^{\infty} \frac{L(u)}{u} \cos ut \, du \tag{1.4}$$

$$L(u) = \frac{2\chi \operatorname{sh} 2u - 4u}{2\chi \operatorname{ch} 2u + 1 + \chi^2 + 4u^2}, \quad \chi = 3 - 4\nu$$

Здесь G и ν – упругие постоянные слоя и учтено, что антиплоская деформация слоя, вызываемая касательными усилиями $\tau(x, t)$, не связана с его плоской деформацией.

Условие контакта плиты со слоем при $y = h$ имеет вид

$$v_* + v = -\delta(t), \quad |x| < \infty \quad (1.5)$$

где $\delta(t)$ – жесткое перемещение плиты в отрицательном направлении оси y под действием усилия $q(t)$, причем

$$q(t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l q(\xi, t) d\xi \quad (1.6)$$

Подставляя выражения (1.2) и (1.4) в условие (1.5), для определения контактного давления получим интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi\theta} \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi, t) K\left(\frac{\xi-x}{h}\right) d\xi + Vkm(x) \int_0^t q(x, \tau) d\tau = \delta(t) \quad (1.7)$$

решение которого должно быть найдено при интегральном условии (1.6) на интервале времени $0 \leq t \leq T$, где T ограничено лишь условиями соизмеримости перемещений v_* и v и неотрицательности давления $q(x, t)$ при всех $|x| < \infty$.

2. Сведение к системе последовательно решаемых интегральных уравнений. Перейдем в формулах (1.6) и (1.7) к безразмерным величинам

$$x' = \frac{x}{l}, \quad t' = \frac{Vkm_0\theta t}{l}, \quad \lambda = \frac{h}{l}, \quad p(t') = \frac{q(t)}{\theta}, \quad \varphi(x', t') = \frac{q(x, t)}{\theta} \quad (2.1)$$

$$f(t') = \frac{\delta(t)}{l}, \quad n(x') = \frac{m(x)}{m_0} = 1 + m \cos \pi x', \quad m = \frac{m_1}{m_0}$$

Опуская штрихи, будем иметь

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, t) K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi + n(x) \int_0^t \varphi(x, \tau) d\tau = f(t) \quad (2.2)$$

$$p(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(\xi, t) d\xi$$

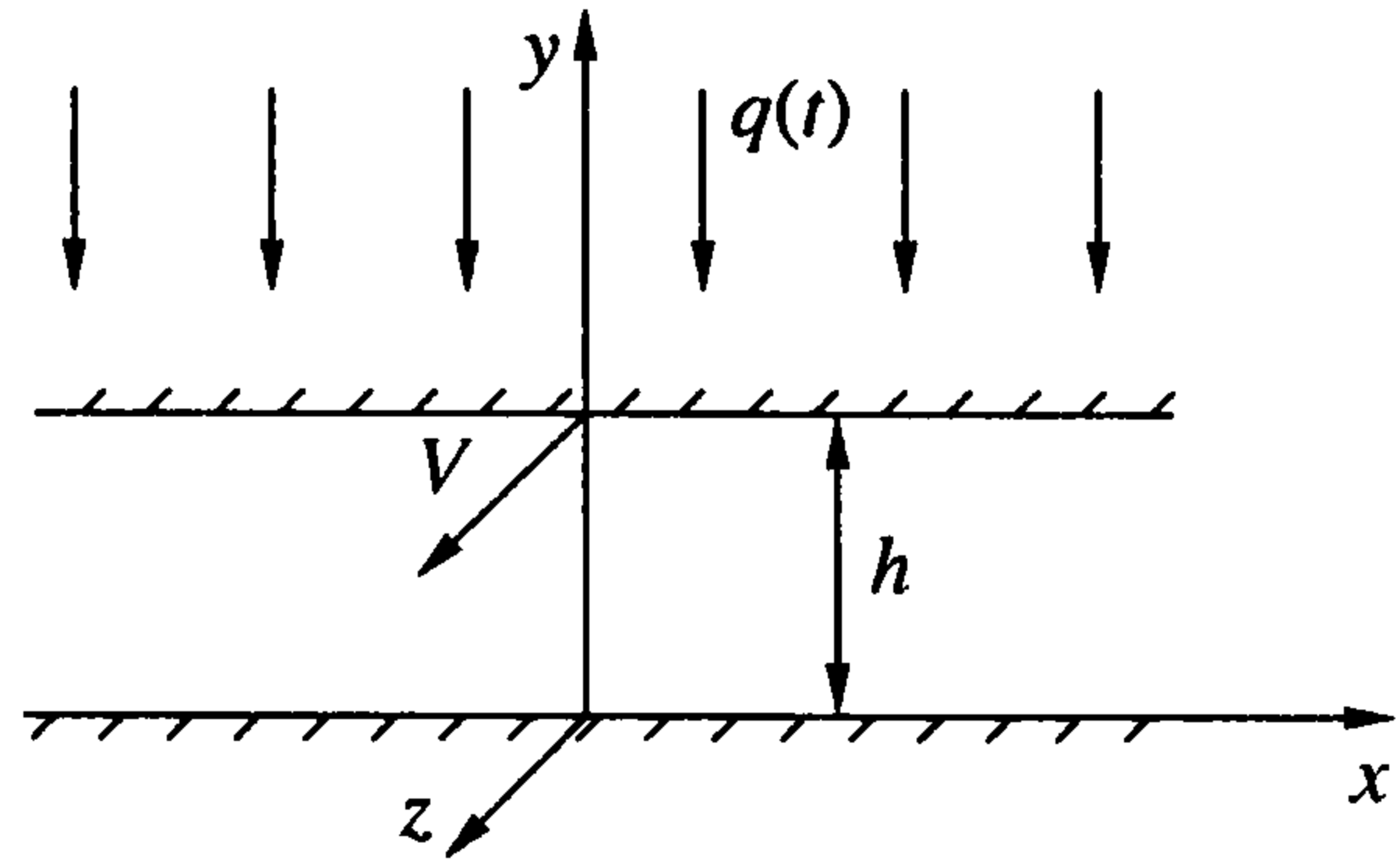
Пусть далее задано изменение во времени безразмерного жесткого перемещения плиты $f(t)$. Представим, следуя известной процедуре [8], функции $f(t)$ и $\varphi(x, t)$ в виде степенных рядов по малому временному параметру $\eta \in [0, 1)$

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \eta^i, \quad \varphi(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x) \eta^i; \quad \eta = 1 - e^{-\mu t} \quad (2.3)$$

и заметим, что μ – произвольная постоянная; назначение ее величины зависит от того, какой диапазон изменения времени t желательно изучить.

Подставим ряды (2.3) в уравнение (2.2) и, учитывая, что

$$\int_0^t (1 - e^{-\mu\tau})^i d\tau = \frac{1}{\mu} \sum_{s=i+1}^{\infty} \frac{1}{s} \eta^s \quad (2.4)$$



Фиг. 1

получим соотношение

$$\frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \eta^i \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi + \frac{n(x)}{\mu} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \eta^s \sum_{i=0}^{s-1} \varphi_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \eta^i \quad (2.5)$$

Приравнивая здесь члены при одинаковых степенях η справа и слева, придем к бесконечной системе интегральных уравнений для последовательного определения функций $\varphi_i(x)$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = f_0 \quad (2.6)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi + \frac{n(x)}{i\mu} \sum_{s=0}^{i-1} \varphi_s(x) = f_i, \quad i \geq 1$$

Далее покажем, что любое из уравнений (2.6) может быть решено в замкнутом виде.

3. Решение для случая задания относительного перемещения плиты. Будем искать решения уравнений (2.6) в форме

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=0}^i A_j^{(i)} \cos \pi j x, \quad i \geq 0 \quad (3.1)$$

С учетом представления (1.4) ядра $K(t)$ и теоремы о свертке для интегрального преобразования Фурье [9] решение первого уравнения (2.6) получим в виде

$$\varphi_0(x) = A_0^{(0)}, \quad A_0^{(0)} = \frac{f_0}{\alpha_0}, \quad \alpha_0 = \frac{4(\kappa-1)}{(\kappa+1)^2} \quad (3.2)$$

Обозначим

$$F_i = f_i - \frac{1}{i\mu} (1 + m \cos \pi x) \sum_{s=0}^{i-1} \varphi_s(x) \quad (3.3)$$

Подставляя в (3.3) выражение (3.1) и преобразуя, получим

$$F_i = f_i - \frac{1}{i\mu} \left[\sum_{s=0}^{i-1} a_{i,s} \cos \pi s x + \frac{m}{2} \left(\sum_{s=0}^{i-2} a_{i,s+1} \cos \pi s x + \sum_{s=0}^i a_{i,s-1} \cos \pi s x \right) + m a_{i,0} \cos \pi i x \right];$$

$$a_{i,s} = \sum_{r=s}^{i-1} A_r^{(i)}, \quad a_{i,s} = 0, \quad s \geq i \quad (3.4)$$

Обозначим

$$G_i = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \quad (3.5)$$

Подставляя в (3.5) выражение (3.1) и выражение (1.4) для ядра $K(t)$ и вновь применяя теорему о свертке, найдем

$$G_i = \sum_{j=0}^i \alpha_j A_j^{(i)} \cos \pi j x, \quad \alpha_j = \frac{L(\pi j \lambda)}{\pi j}, \quad j \geq 1 \quad (3.6)$$

Приравнивая в силу системы (2.6) F_i вида (3.4) и G_i вида (3.6), получим при $i \geq 1$ следующую рекуррентную систему соотношений для определения коэффициентов $A_j^{(i)}$ в (3.1):

$$\begin{aligned}
j=0: \quad \alpha_0 A_0^{(i)} &= f_i - \frac{1}{i\mu} \left(a_{i,0} + \frac{m}{2} a_{i,1} \right) \\
j=1: \quad \alpha_1 A_1^{(i)} &= -\frac{1}{i\mu} \left(a_{i,1} + \frac{m}{2} a_{i,2} + m a_{i,0} \right) \\
2 \leq j \leq i-2: \quad \alpha_j A_j^{(i)} &= -\frac{1}{i\mu} \left[a_{i,j} + \frac{m}{2} (a_{i,j+1} + a_{i,j-1}) \right] \\
j=i-1: \quad \alpha_{i-1} A_{i-1}^{(i)} &= -\frac{1}{i\mu} \left(a_{i,i-1} + \frac{m}{2} a_{i,i-2} \right) \\
j=i: \quad \alpha_i A_i^{(i)} &= -\frac{1}{i\mu} m a_{i,i-1}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Заметим, что при $i = 1$ нужно использовать лишь первые два соотношения (3.7), при $i = 2$ – первые два и последнее соотношения, при $i = 3$ – первые два и два последних, при $i \geq 4$ – все соотношения (3.7).

Итак, в результате решения интегрального уравнения (2.2) получено искомое выражение для относительного контактного давления $\varphi(x, t)$, представляющее собой степенной ряд по приведенному времени и тригонометрический ряд по координате.

Построены графики зависимости относительного жесткого перемещения $f(t)$ и относительного усилия $p(t)$ от времени t (сплошные линии на фиг. 2), а также графики относительного контактного давления $\varphi(x, t)$ в зависимости от координаты x и времени t (фиг. 3, временной интервал $(0, 1)$; фиг. 4, временной интервал $(0, 3)$) при следующих условиях: относительная толщина слоя $\lambda = 2$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, постоянная приведенного времени $\mu = 1.2$, коэффициент трения $k = 0.3$, коэффициент износостойкости $m = 0.3$. На фиг. 5 (временной интервал $(0, 3)$) при указанных выше значениях параметров приведен график изношенной поверхности слоя, определяемой выражением

$$g(x, t) = \frac{n(x)}{\mu} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s} \eta^s \sum_{i=0}^{s-1} \varphi_i(x) \tag{3.8}$$

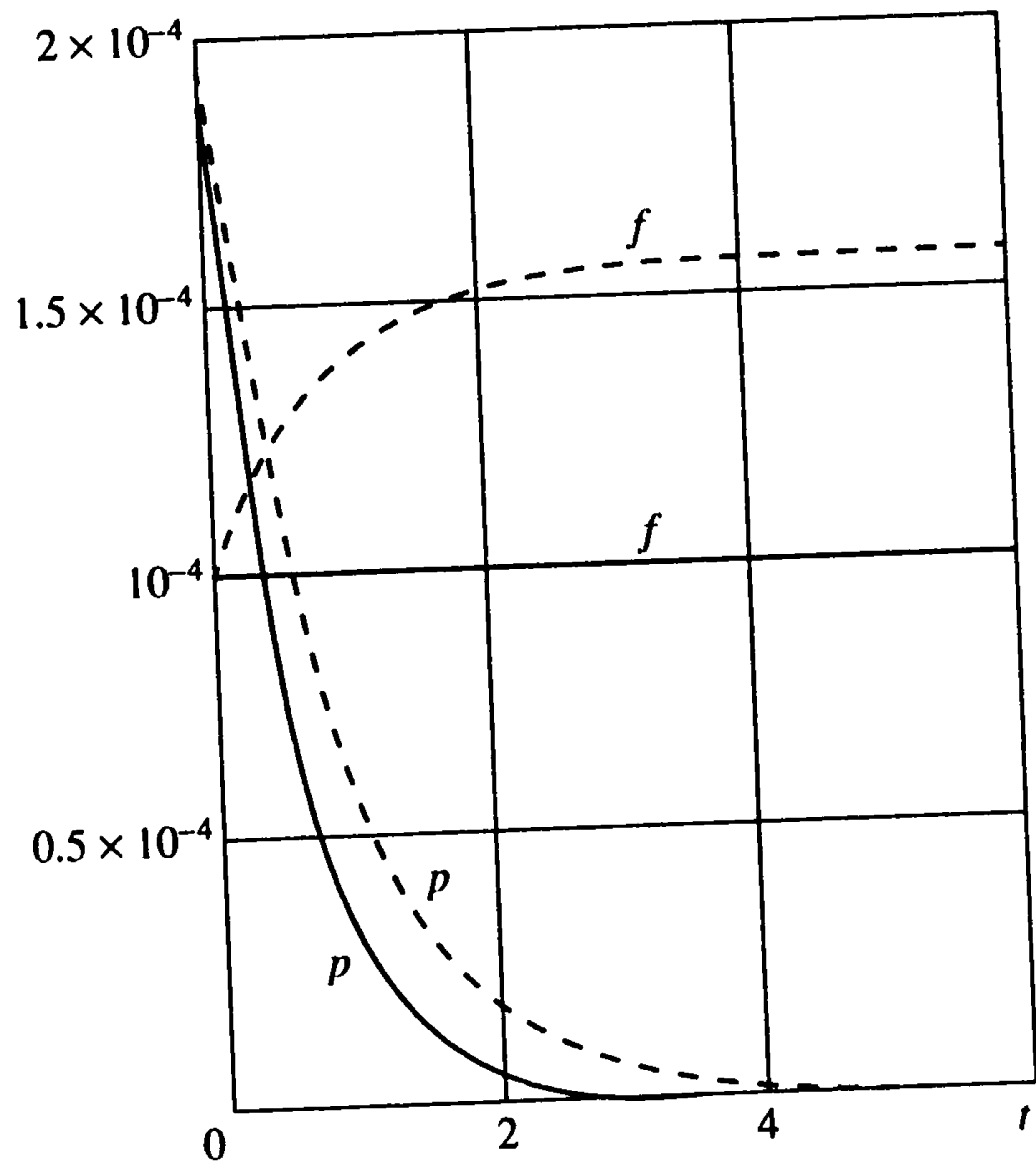
в зависимости от координаты x и времени t .

В случае данной задачи исходным являлось относительное жесткое перемещение $f(t) = 0.0001$.

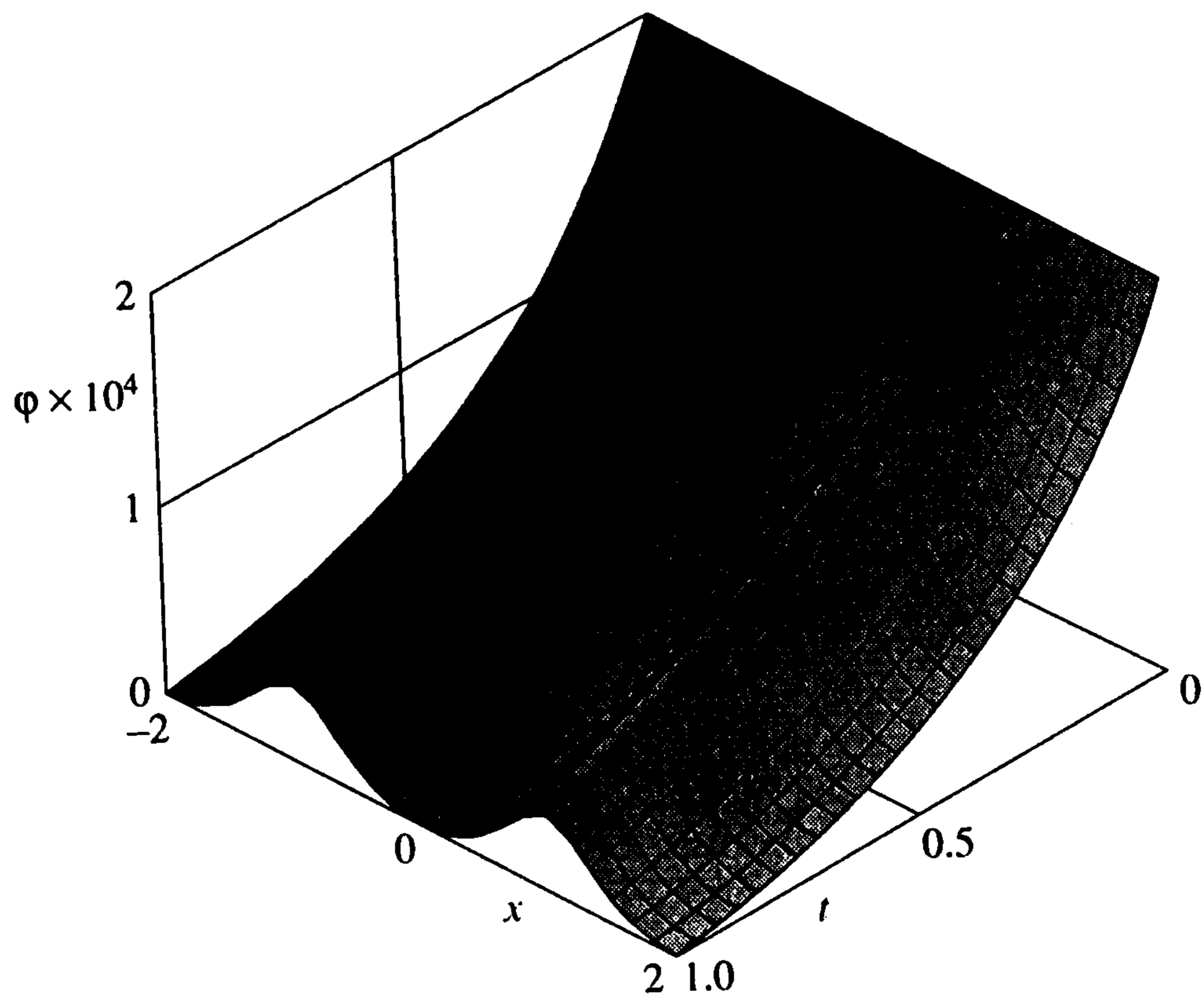
Из фиг. 2 видно, что приработка заканчивается, когда безразмерное время $t \approx 4$.

Полученные результаты хорошо согласуются с физической картиной происходящего. Действительно, пусть задано относительное жесткое перемещение $f(t) = \text{const}$. Тогда в начальный момент времени все точки поверхности слоя будут испытывать некоторое равное давление, затем с течением времени по мере износа поверхности слоя давление будет ослабевать (причем это ослабление будет неравномерным, зависящим от переменной износостойкости поверхности, т.е. периодическим в данном случае) до тех пор, пока износ не приведет к тому, что контактирующие поверхности не перестанут соприкасаться (давление в точках поверхности слоя обратится в нуль). Относительное усилие $p(t)$ в этом случае будет экспоненциально стремиться к нулю.

4. Решение для случая задания относительного усилия на плиту. Пусть теперь задано не изменение во времени безразмерного жесткого перемещения плиты $f(t)$, а изменение во времени безразмерного удельного усилия $p(t)$ (практически это реализовать проще).



Фиг. 2



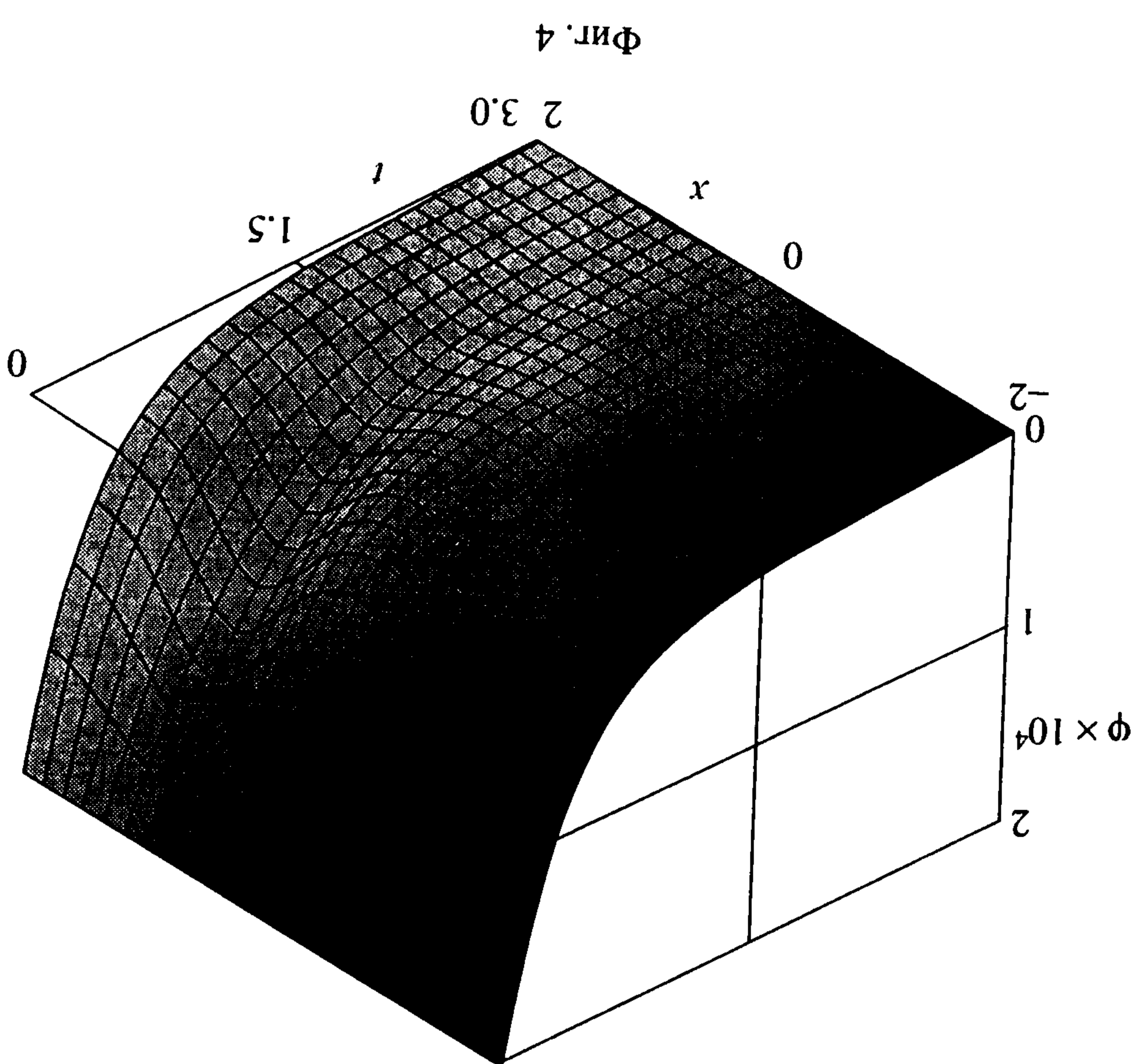
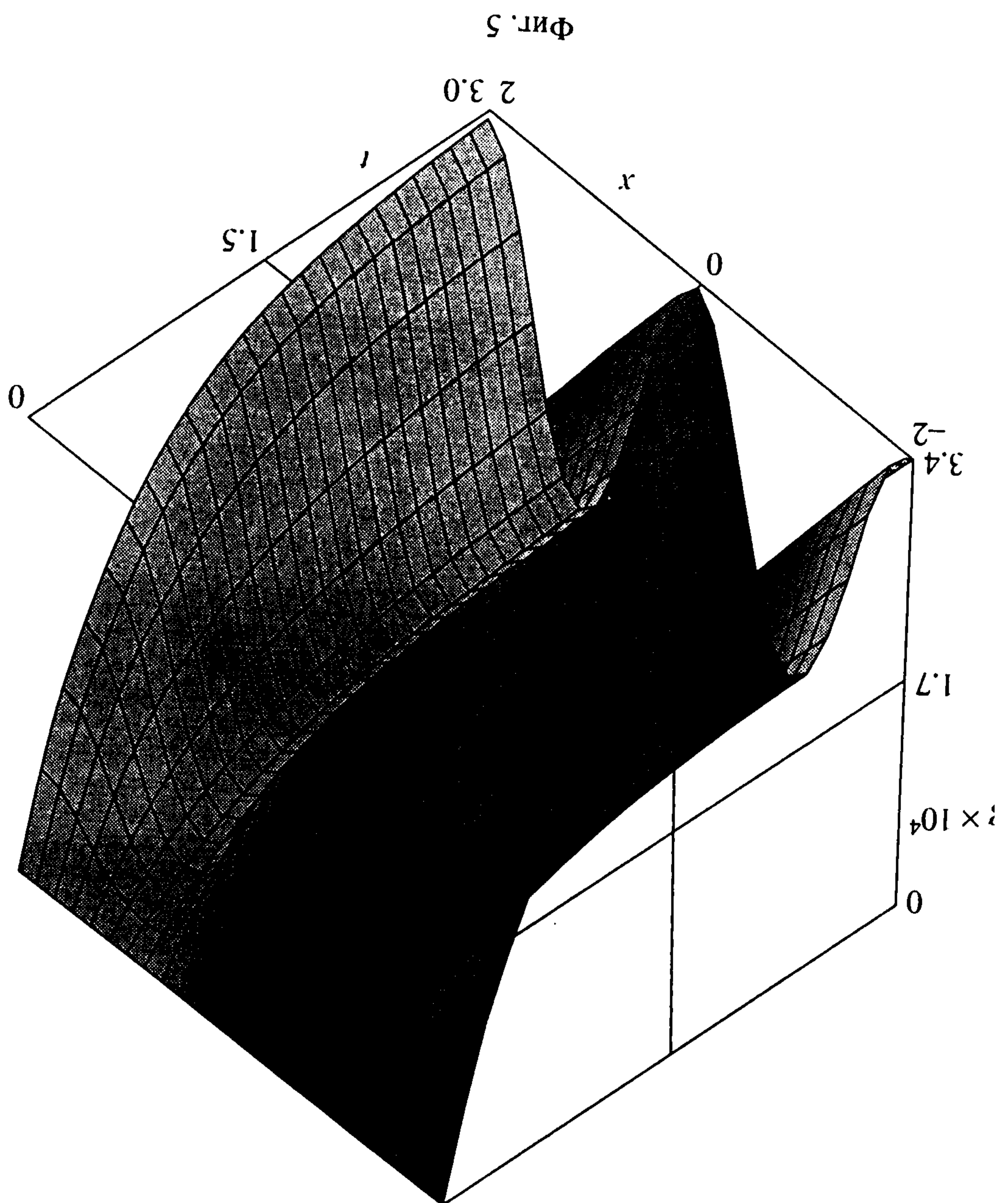
Фиг. 3

Разложим функцию $p(t)$ в ряд

$$p(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \eta^i \tag{4.1}$$

Подставляя ряд (4.1) и второй ряд (2.3) во второе соотношение (2.2), найдем

$$p_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi_i(\xi) d\xi \tag{4.2}$$



Теперь с учетом формулы (3.1) из равенства (4.2) определим, что

$$\varphi_0^{(i)} = p_i \quad (4.3)$$

и, следовательно, в силу решения (3.2)

$$f_0 = \alpha_0 p_0 \quad (4.4)$$

Далее используя рекуррентные формулы (3.7), найдем с учетом равенства (4.3) последовательно $A_j^i (j \geq 1)$ и f_i .

В условиях, аналогичных указанным в разд. 3, построены графики зависимости относительного жесткого перемещения $f(t)$ и относительного усилия $p(t)$ от времени t (штриховые линии на фиг. 2). Графики зависимости относительного контактного давления $\varphi(x, t)$, а также зависимости изношенной поверхности слоя $g(x, t)$, определяемой формулой (3.8), от координаты x и времени t по виду весьма похожи на соответствующие графики, приведенные на фиг. 3–5, и поэтому опущены.

Здесь исходным являлось относительное усилие $p(t) = 0.0002e^{-\mu t}$.

Из фиг. 2 видно, что в данном случае приработка заканчивается, когда безразмерное время $t \approx 6$.

Полученные результаты также хорошо согласуются с физической картиной происходящего. Действительно, если задать относительное усилие, экспоненциально стремящееся во времени к нулю, то, очевидно, это должно привести к тому, что относительное жесткое перемещение $f(t)$ будет стремиться к некоторой постоянной, и для относительного контактного давления получаются зависимости, подобные зависимостям в прямой задаче.

5. Асимптотическое решение при большом времени. Остановимся еще на случае относительно большого времени t , когда

$$f(t) = f_\infty(t + \text{const}) + f_*(t) \quad (5.1)$$

где $f_*(t) \rightarrow 0$ монотонно при $t \rightarrow \infty$. В этом случае путем несложного анализа уравнения (2.2) можно убедиться, что

$$\varphi(x, t) = f_\infty / n(x) + \varphi_*(x, t)$$

$$p(t) = f_\infty / (1 - m^2) + p_*(t) \quad (5.2)$$

где $\varphi_*(x, t) \rightarrow 0$ и $p_*(t) \rightarrow 0$ монотонно при $t \rightarrow \infty$. Справедливо и обратное утверждение: если $p(t)$ имеет вид (5.2), то $f(t)$ дается формулой (5.1), $\varphi(x, t)$ – первой формулой (5.2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00038).

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В.М., Галин Л.А., Пириев Н.П. Плоская контактная задача при наличии износа для упругого слоя большой толщины // Изв. АН СССР. МТТ. 1978. № 4. С. 60–67.
2. Александров В.М., Коваленко Е.В. Математические методы в контактных задачах с износом // Нелинейные модели и задачи механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1984. С. 77–89.
3. Александров В.М. Периодическая контактная задача для упругого слоя с учетом трения и износа // Современные проблемы механики сплошной среды. Ростов-на-Дону: МП "Книга", 1995. С. 14–18.
4. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Изнашивание неоднородно упрочненных поверхностей // Трение и износ. 1986. Т. 7. № 6. С. 985–992.

5. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 254 с.
6. Хрущев М.М., Бабичев М.А. Абразивное изнашивание. М.: Наука, 1970. 252 с.
7. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
8. Александров В.М. Контактные задачи в трибологии // Механика и научно-технический прогресс. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. С. 170–180.
9. *Vochner S.* Lectures on Fourier Integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1959. = *Бохнер С.* Лекции об интегралах Фурье. М.: Физматгиз, 1962. 360 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.V.2001