

УДК 539.3

© 2002 г. В.М. Александров, Д.А. Пожарский

ЗАДАЧА О ВКЛЮЧЕНИИ В ТРЕХМЕРНОМ УПРУГОМ КЛИНЕ

Фундаментальные решения для трехмерного клина применены к исследованию задач о тонком жестком эллиптическом включении в клине. Используется регулярный асимптотический метод, ранее применявшийся к контактным задачам для клина [1] и к задачам о трещине в клине [2] при эллиптической форме области контакта или трещины. Метод эффективен для включения, достаточно удаленного от ребра клина, когда в качестве нулевого приближения можно взять известное точное решение для пространства [3]. Проведен численный анализ и сравнение различных характеристик задач о включении.

Были получены [4] интегральные уравнения Фредгольма второго рода, через решения которых выражаются перемещения и напряжения в трехмерном упругом клине при действии нормальной и касательной нагрузки на одной его грани и разных условиях на другой грани. Для случая, когда эта грань свободна от напряжений, приведены [5] функции Папковича–Нейбера, совпадающие с известными решениями задач Буссинеска и Черрути, когда угол клина равен π (случай полупространства). При построении решений [4, 5] использован комплексный интеграл Фурье–Конторовича–Лебедева и техника сведения трехмерной задачи теории упругости к обобщенной по И.Н. Векуа краевой задаче Гильберта [6, 7].

Ниже при помощи этой техники получены точные решения двух краевых задач, когда в биссекториальной полуплоскости клина действует произвольно направленная сосредоточенная сила, а грани клина находятся в условиях скользящей (задача А) или жесткой (задача Б) заделки. Когда угол раствора клина равен 2π , решение задачи А совпадает с фундаментальным решением Кельвина [8] классической теории упругости. Задача А обобщает смешанную задачу для клина (на гранях заданы нормальное перемещение и касательные напряжения) [9], а задача Б – вторую основную задачу для клина [10] на случай действия сил внутри клина.

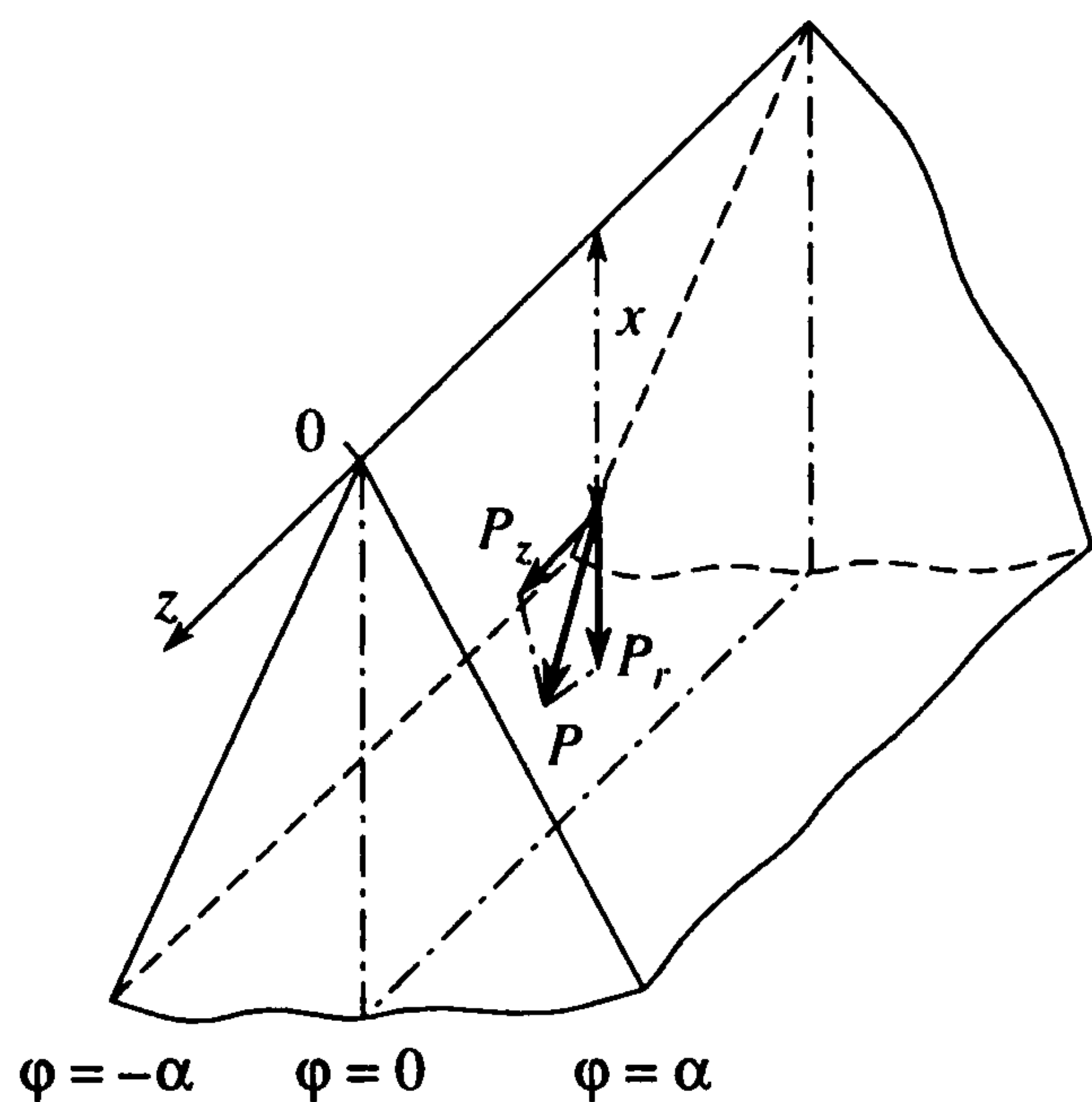
1. Сосредоточенная сила внутри трехмерного клина. В цилиндрических координатах r, φ, z рассмотрим трехмерный упругий клин ($0 \leq r < \infty, |\varphi| \leq \alpha, |z| < \infty$) с углом раствора 2α и упругими характеристиками G (модуль сдвига) и ν (коэффициент Пуассона). Ось z направим по ребру клина так, чтобы система координат была правой (фиг. 1). Пусть в срединной полуплоскости $\varphi = 0$ клина в точке $r = x, z = y$ действует произвольная сосредоточенная сила P , имеющая проекции P_r и P_z на оси координат. Грани $\varphi = \pm\alpha$ находятся в условиях скользящей или жесткой заделки (задачи А и Б соответственно). В силу симметрии задачи по угловой координате φ будем рассматривать область клина $-\alpha \leq \varphi \leq 0$. Граничные условия запишем в виде

$$\varphi = -\alpha: \quad u_\varphi = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0 \quad \text{для задачи А}$$

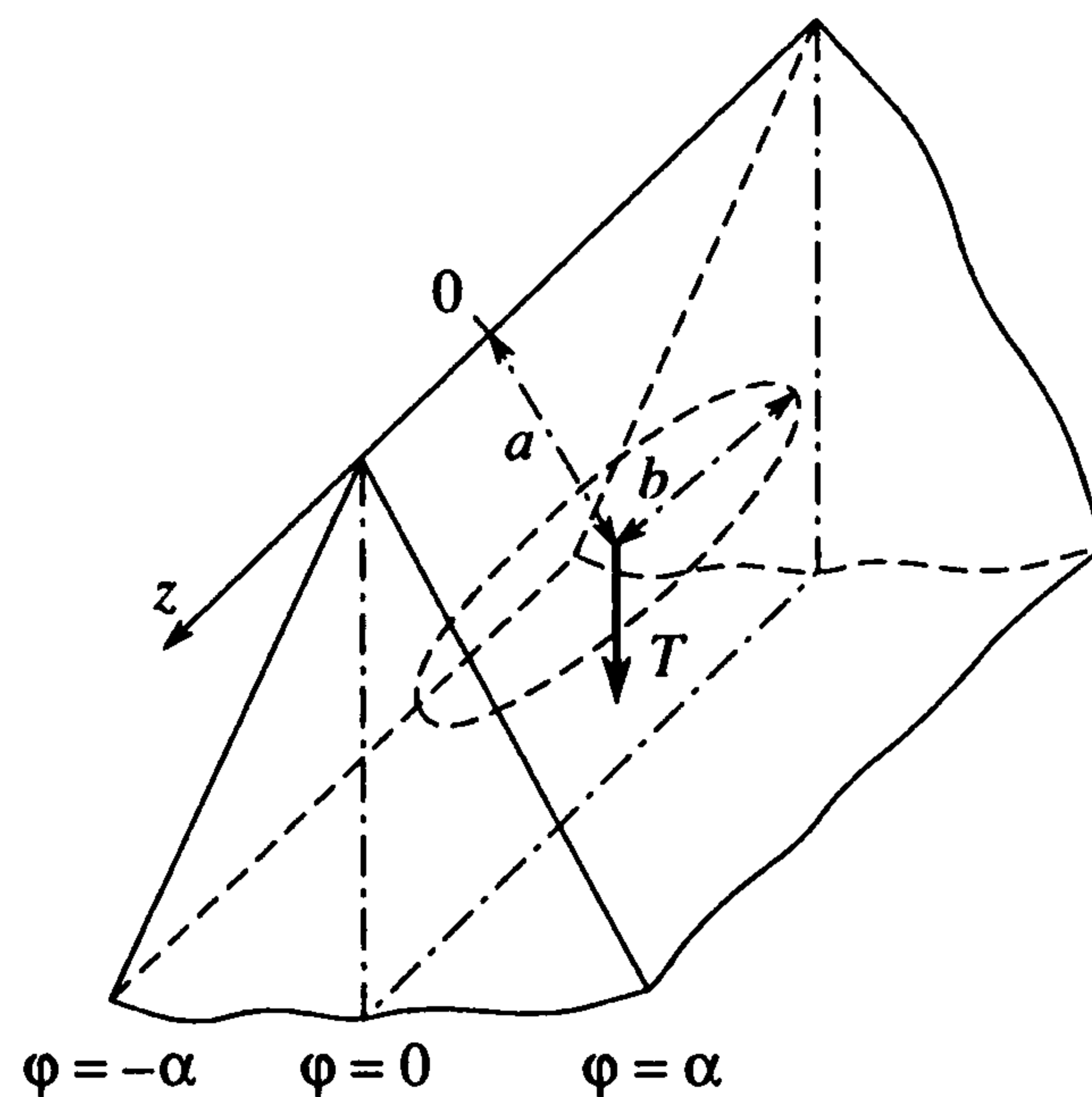
$$\varphi = -\alpha: \quad u_\varphi = u_r = u_z = 0 \quad \text{для задачи Б} \tag{1.1}$$

$$\varphi = 0: \quad u_\varphi = 0, \quad \tau_{r\varphi} = \frac{1}{2} P_r \delta(r-x) \delta(z-y), \quad \tau_{\varphi z} = \frac{1}{2} P_z \delta(r-x) \delta(z-y)$$

Предполагается также, что на бесконечности напряжения убывают.



Фиг. 1



Фиг. 2

Выразим общее решение уравнений равновесия Навье в цилиндрических координатах через три гармонические функции Папковича–Нейбера $\Phi_n = \Phi_n(r, \varphi, z)$ ($n = 0, 1, 2$) по формулам

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial r} (r\omega_1) - \omega_1, \quad \omega_1 = \sin \varphi \Phi_1 - \cos \varphi \Phi_2 \\ u_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial \omega_1}{\partial \varphi} - \omega_2, \quad \omega_2 = \cos \varphi \Phi_1 + \sin \varphi \Phi_2 \\ u_z &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \frac{r}{4(1-\nu)} \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Напряжения можно определить отсюда при помощи закона Гука.

Гармонические функции Φ_n будем разыскивать в форме интегралов Фурье по z и Конторовича–Лебедева по r . Применяя известную технику [6, 7], решение краевых задач (1.1) найдем в виде (1.2), где

$$\begin{aligned} \Phi_n(r, \varphi, z) &= \frac{1}{\pi^3 G_0} \int_0^\infty \int_0^\infty \text{sh}(\pi\tau) \mathbf{K}_{i\tau}(\beta r) \{ P_r C_n^+(\tau, \beta) \cos(\beta[z-y]) + \\ &+ P_z C_n^-(\tau, \beta) \sin(\beta[z-y]) \beta^{-1} \} d\tau d\beta, \quad n = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\mathbf{K}_{i\tau}(x)$ – модифицированная функция Бесселя. Функции

$$\begin{aligned} C_n^\pm &= A_n^\pm(\tau, \beta) \text{ch}(\varphi\tau) + B_n^\pm(\tau, \beta) \text{sh}(\varphi\tau) \\ B_0^+(\tau, \beta) &= \frac{x}{4(1-\nu)} \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x), \quad A_1^+(\tau, \beta) = 0, \quad B_2^+(\tau, \beta) = \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x) \\ B_0^-(\tau, \beta) &= \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x) + \frac{x}{4(1-\nu)} \mathbf{K}'_{i\tau}(\beta x), \quad A_1^-(\tau, \beta) = \frac{\tau}{x} \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x) \\ B_2^-(\tau, \beta) &= \mathbf{K}'_{i\tau}(\beta x) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x) \end{aligned} \quad (1.4)$$

одинаковы для обеих рассматриваемых задач. Далее имеем

для задачи А

$$\begin{aligned}
 A_0^+(\tau, \beta) &= \frac{x \operatorname{cth}(\alpha\tau)}{4(1-\nu)} \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x), \quad B_1^+(\tau, \beta) = -\frac{\sin(2\alpha)}{g_-(\tau, \alpha)} \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x), \quad A_2^+(\tau, \beta) = \frac{\operatorname{sh}(2\alpha\tau)}{g_-(\tau, \alpha)} \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x) \\
 A_0^-(\tau, \beta) &= \operatorname{cth}(\alpha\tau) \left[\mathbf{K}_{i\tau}(\beta x) + \frac{x}{\kappa+1} \mathbf{K}'_{i\tau}(\beta x) \right] \\
 B_1^-(\tau, \beta) &= \frac{\tau \operatorname{sh}(2\alpha\tau) \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x) - x \sin(2\alpha) \mathbf{K}'_{i\tau}(\beta x)}{x g_-(\tau, \alpha)} \\
 A_2^-(\tau, \beta) &= \frac{\tau \sin(2\alpha) \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x) + x \operatorname{sh}(2\alpha\tau) \mathbf{K}'_{i\tau}(\beta x)}{x g_-(\tau, \alpha)}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

для задачи Б

$$\begin{aligned}
 A_0^+(\tau, \beta) &= \frac{x \operatorname{th}(\alpha\tau)}{\kappa+1} \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x) \\
 B_1^+(\tau, \beta) &= \sin(2\alpha) \frac{x \operatorname{sh}(2\alpha\tau) \mathbf{K}'_{i\tau}(\beta x) - \tau \sin(2\alpha) \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x)}{g_+(\tau, \alpha) g(\tau, \alpha)} \\
 A_2^+(\tau, \beta) &= 2 \operatorname{sh}^2(\alpha\tau) \frac{[\kappa g_+(\tau, \alpha) - \tau \operatorname{cth}(\alpha\tau) \sin(2\alpha)] \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x) + 2x \sin^2 \alpha \mathbf{K}'_{i\tau}(\beta x)}{g_+(\tau, \alpha) g(\tau, \alpha)} \\
 A_0^-(\tau, \beta) &= \operatorname{th}(\alpha\tau) \left[\mathbf{K}_{i\tau}(\beta x) + \frac{x}{\kappa+1} \mathbf{K}'_{i\tau}(\beta x) \right] \\
 B_1^-(\tau, \beta) &= \frac{\sin(2\alpha)}{g_+(\tau, \alpha)} \mathbf{K}'_{i\tau}(\beta x) + \left[\frac{\beta^2 x \sin(2\alpha) \operatorname{sh}(2\alpha\tau)}{g_+(\tau, \alpha) g(\tau, \alpha)} + \frac{\tau \operatorname{sh}(2\alpha\tau)}{x g_+(\tau, \alpha)} \right] \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x) \\
 A_2^-(\tau, \beta) &= \frac{\operatorname{sh}(2\alpha\tau)}{g_+(\tau, \alpha)} \mathbf{K}'_{i\tau}(\beta x) + \left[\frac{4\beta^2 x \sin^2 \alpha \operatorname{sh}^2(\alpha\tau)}{g_+(\tau, \alpha) g(\tau, \alpha)} - \frac{\tau \sin(2\alpha)}{x g_+(\tau, \alpha)} \right] \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x)
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь

$$g_{\pm}(\tau, \alpha) = \operatorname{ch}(2\alpha\tau) \pm \cos(2\alpha), \quad g(\tau, \alpha) = \kappa \operatorname{sh}(2\alpha\tau) - \tau \sin(2\alpha), \quad \kappa = 3 - 4\nu$$

Для функций (1.4)–(1.6) интегралы (1.3) сходятся при всех $\varphi \in [-\alpha, 0]$.

Решение задачи А в виде (1.3)–(1.5) при $\alpha = \pi$ совпадает с фундаментальным решением Кельвина для упругого пространства. Действительно, в этом случае

$$\begin{aligned}
 A_0^+(\tau, \beta) &= \frac{x \operatorname{cth}(\pi\tau)}{\kappa+1} \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x), \quad B_1^+(\tau, \beta) = 0, \quad A_2^+(\tau, \beta) = \operatorname{cth}(\pi\tau) \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x) \\
 A_0^-(\tau, \beta) &= \operatorname{cth}(\pi\tau) \left[\mathbf{K}_{i\tau}(\beta x) + \frac{x}{\kappa+1} \mathbf{K}'_{i\tau}(\beta x) \right] \\
 B_1^-(\tau, \beta) &= \frac{\tau}{x} \operatorname{cth}(\pi\tau) \mathbf{K}_{i\tau}(\beta x), \quad A_2^-(\tau, \beta) = \operatorname{cth}(\pi\tau) \mathbf{K}'_{i\tau}(\beta x)
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

и, например, для перемещений в плоскости действия силы \mathbf{P} , используя соотношения (1.2) и известные формулы ([11], формулы 2.16.52.6, 2.16.14.1), получим выражения

$$u_r(r, 0, z) = \frac{P_r R_{11} + P_z R_{12}}{4\pi G}, \quad u_z(r, 0, z) = \frac{P_r R_{21} + P_z R_{22}}{4\pi G} \tag{1.8}$$

где

$$R_{11} = \frac{1}{R} - \frac{(z-y)^2}{(\kappa+1)R^3}, \quad R_{12} = R_{21} = \frac{(r-x)(z-y)}{(\kappa+1)R^3} \quad (1.9)$$

$$R_{22} = \frac{1}{R} - \frac{(r-x)^2}{(\kappa+1)R^3}, \quad R = [(r-x)^2 + (z-y)^2]^{1/2}$$

Они в точности соответствуют фундаментальному решению Кельвина ([12], формулы (9.2), (9.4)).

Объясним, почему задачи А и Б имеют точные решения. Известно [4, 7], что задачи о действии сосредоточенных сил на грань трехмерного клина, другая грань которого находится в условиях скользящей или жесткой заделки, сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Затем перемещения в клине можно выразить в виде операторных рядов Неймана. Рассмотренные выше граничные условия (1.1) соответствуют обратным задачам, так как при $\varphi = 0$ задано перемещение u_φ вместо напряжения σ_φ . Следовательно, решения задач (1.1) должны содержать обращения указанных рядов Неймана в форме ([2], формула (1.6))

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (1-2\nu)^n T^n \right]^{-1} = I - (1-2\nu)T \quad (1.10)$$

где T – известный оператор, I – тождественный оператор.

2. Эллиптическое включение внутри трехмерного клина. Применим полученные выше формулы к задачам о тонком жестком включении в срединной полуплоскости $\varphi = 0$ трехмерного клина. Пусть включение занимает эллиптическую область Ω : $(r-a)^2/c^2 + z^2/b^2 \leq 1$, $a > c$, $b \geq c$ (фиг. 2). Между включением и упругой средой в области контакта осуществляется полное сцепление. Для простоты предположим, что приложенная к включению и действующая в полуплоскости $\varphi = 0$ сила T перпендикулярна ребру клина. Следовательно, включение смещается на величину δ в направлении действия силы. Грани клина находятся в условиях скользящей или жесткой заделки (задачи о включении А и Б соответственно). Требуется определить касательные контактные напряжения $\tau_{r\varphi}(r, 0, z) = 2\tau_1(r, z)$ и $\tau_{\varphi z}(r, 0, z) = 2\tau_2(r, z)$, $(r, z) \in \Omega$, и связь между величинами T и δ (задана только одна из этих величин).

Поскольку задачи симметричны относительно полуплоскости $\varphi = 0$, перейдем к рассмотрению задач о равновесии упругого клина $-\alpha \leq \varphi \leq 0$ с граничными условиями (1.1) для задач А или Б при $\varphi = -\alpha$ и следующими граничными условиями:

$$\varphi = 0: \quad u_r = \delta, \quad u_z = 0 \quad (r, z) \in \Omega; \quad \tau_{r\varphi} = 0, \quad \tau_{\varphi z} = 0 \quad (r, z) \notin \Omega; \quad u_\varphi = 0 \quad (2.1)$$

Используя полученные решения (1.3)–(1.6), выразим перемещения $u_r(r, 0, z)$ и $u_z(r, 0, z)$ по формулам (1.2). Заменяя в этих выражениях P_r на $2\tau_1(x, y)$ и P_z на $2\tau_2(x, y)$, интегрируя по области Ω по переменным x, y и удовлетворяя первым двум условиям (2.1), получаем систему двух интегральных уравнений относительно неизвестных контактных напряжений $\tau_n(x, y)$ ($n = 1, 2$), $(x, y) \in \Omega$. Вводя безразмерные величины

$$r_* = \frac{r-a}{b}, \quad x_* = \frac{x-a}{b}, \quad z_* = \frac{z}{b}, \quad y_* = \frac{y}{b}, \quad \delta_* = \frac{\delta}{b}, \quad c_* = \frac{c}{b} \quad (2.2)$$

$$\lambda = \frac{a}{b}, \quad \tau_n^*(r_*, z_*) = \frac{\tau_n(r, z)}{G}, \quad n = 1, 2, \quad \Omega_*: \frac{r_*^2}{c_*^2} + z_*^2 \leq 1, \quad T_* = \frac{T}{Gb^2}$$

и опуская далее звездочки, эту систему можно записать в виде

$$\int_{\Omega} \tau_1(x, y) \left[\frac{1}{R} - \frac{(z-y)^2}{4(1-\nu)R^3} + K_{11}(x, y, r, z) \right] d\Omega_{xy} +$$

$$+ \int_{\Omega} \tau_2(x, y) \left[\frac{(r-x)(z-y)}{4(1-\nu)R^3} + K_{12}(x, y, r, z) \right] d\Omega_{xy} = 2\pi\delta \quad (r, z) \in \Omega_{rz} \quad (2.3)$$

$$\int_{\Omega} \tau_1(x, y) \left[\frac{(r-x)(z-y)}{4(1-\nu)R^3} + K_{21}(x, y, r, z) \right] d\Omega_{xy} +$$

$$+ \int_{\Omega} \tau_2(x, y) \left[\frac{1}{R} - \frac{(r-x)^2}{4(1-\nu)R^3} + K_{22}(x, y, r, z) \right] d\Omega_{xy} = 0 \quad (r, z) \in \Omega_{rz}$$

где

$$K_{11}(x, y, r, z) = \frac{1}{(1-\nu)\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) \cos(\beta[z-y]) \left\{ W_1(u, \alpha)(\lambda+x) \frac{\partial}{\partial r} + W_2(u, \alpha) D_r + \right.$$

$$\left. + W_3(u, \alpha)(\lambda+x) \frac{\partial}{\partial x} D_x \right\} \mathbf{K}_{iu}(\beta[\lambda+x]) \mathbf{K}_{iu}(\beta[\lambda+r]) du d\beta$$

$$K_{12}(x, y, r, z) = \frac{1}{(1-\nu)\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) \frac{\sin(\beta[z-y])}{\beta} \left\{ W_1(u, \alpha) \frac{\partial}{\partial r} D_x + \right.$$

$$\left. + D_r W(u, \alpha, x) \right\} \mathbf{K}_{iu}(\beta[\lambda+x]) \mathbf{K}_{iu}(\beta[\lambda+r]) du d\beta$$

$$K_{21}(x, y, r, z) = -\frac{\lambda+x}{(1-\nu)\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) \beta \sin(\beta[z-y]) \left\{ W_1(u, \alpha) - W_2(u, \alpha) \frac{\lambda+r}{\lambda+x} - \right.$$

$$\left. - W_3(u, \alpha)(\lambda+r) \frac{\partial}{\partial x} \right\} \mathbf{K}_{iu}(\beta[\lambda+x]) \mathbf{K}_{iu}(\beta[\lambda+r]) du d\beta$$

$$K_{22}(x, y, r, z) = \frac{1}{(1-\nu)\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \text{sh}(\pi u) \cos(\beta[z-y]) \left\{ W_1(u, \alpha) D_x - \right.$$

$$\left. - (\lambda+r) W(u, \alpha, x) \right\} \mathbf{K}_{iu}(\beta[\lambda+x]) \mathbf{K}_{iu}(\beta[\lambda+r]) du d\beta$$

$$D_r = x - (\lambda+r) \frac{\partial}{\partial r}, \quad D_x = x + 1 + (\lambda+x) \frac{\partial}{\partial x}$$

$$W(u, \alpha, x) = W_3(u, \alpha) \beta^2 (\lambda+x) + W_4(u, \alpha) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\lambda+x} W_5(u, \alpha)$$

Для задачи А имеем

$$W_1(u, \alpha) = \text{cth}(\alpha u) - \text{cth}(\pi u), \quad W_2(u, \alpha) = \frac{\text{sh}(2\alpha u)}{g_-(u, \alpha)} - \text{cth}(\pi u)$$

$$W_3(u, \alpha) \equiv 0, \quad W_4(u, \alpha) \equiv W_2(u, \alpha), \quad W_5(u, \alpha) = \frac{u \sin(2\alpha)}{g_-(u, \alpha)}$$

а для задачи Б

$$W_1(u, \alpha) = \text{th}(\alpha u) - \text{cth}(\pi u)$$

$$W_2(u, \alpha) = 2 \text{sh}^2(\alpha u) \frac{\kappa g_+(u, \alpha) - u \text{cth}(\alpha u) \sin(2\alpha)}{g_+(u, \alpha) g(u, \alpha)} - \text{cth}(\pi u)$$

$$W_3(u, \alpha) = \frac{4 \sin^2 \alpha \text{sh}^2(\alpha u)}{g_+(u, \alpha) g(u, \alpha)}$$

$$W_4(u, \alpha) = \frac{\text{sh}(2\alpha u)}{g_+(u, \alpha)} - \text{cth}(\pi u), \quad W_5(u, \alpha) = -\frac{u^2 \sin(2\alpha)}{g_+(u, \alpha)}$$

Заметим, что $W_m(\alpha, u) = O(\exp[-2\alpha u])$, $u \rightarrow \infty$ ($m = 1, \dots, 5$) при фиксированном значении $\alpha \in (0, \pi]$.

В ядрах интегральных уравнений (2.3) при помощи формул (1.8) выделены главные части, соответствующие включению в бесконечном пространстве (задача А при $\alpha = \pi$, когда $K_{mn}(x, y, r, z) \equiv 0$ ($m, n = 1, 2$); см. [3], уравнения (1.16)).

Введенный в (2.2) безразмерный параметр λ характеризует относительную удаленность включения от ребра клина; функции $K_{mn}(x, y, r, z) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ ($m, n = 1, 2$). Для решения системы интегральных уравнений (2.3) применим регулярный асимптотический метод "больших λ " [7, 1-3], беря в нулевом приближении точное решение задачи о включении в пространстве ([3], формулы (1.18)). Метод основан на следующей лемме.

Лемма 1. Для задач А и Б о включении функции $K_{mn}(x, y, r, z)$ ($m, n = 1, 2$) непрерывны вместе со всеми своими производными при $(x, y), (r, z) \in \Omega$. При

$$\lambda > 1 + c \quad (\alpha \in [1, \pi]), \quad \lambda > \alpha^{-1} + c \quad (\alpha \in [c/2, 1]) \quad (2.7)$$

$$\lambda > (1 + c^2(1 + \alpha^2))^{1/2} \alpha^{-1} \quad (\alpha \in (0, c/2])$$

функции $K_{mn}(x, y, r, z)$, $(x, y), (r, z) \in \Omega$, могут быть представлены абсолютно сходящимися рядами

$$K_{mn}(x, y, r, z) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{k_l^{mn}(x, y, r, z)}{\lambda^{l+|m-n|}}, \quad m, n = 1, 2 \quad (2.8)$$

где $k_l^{mn}(x, y, r, z)$ – некоторые полиномы.

При доказательстве сходимости используются известные результаты ([1], первые две формулы (2.5)). Чтобы получить разложения (2.8), следует разложить в ряды тригонометрические функции в формулах (2.4). При этом возникают интегралы вида

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \mathbf{K}_{iu}(\beta[\lambda + x]) \mathbf{K}_{iu}(\beta[\lambda + r]) \beta^{2j} d\beta = \\ & = \frac{(2j)!}{\lambda^{2j+1}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\cos(us) \cos(ut) ds dt}{[(1 + x/\lambda) \operatorname{ch} s + (1 + r/\lambda) \operatorname{ch} t]^{2j+1}}, \quad j = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

где использовано интегральное представление модифицированной функции Бесселя. Двойной интеграл (2.9) разлагается в двойной ряд Тейлора по степеням x/λ и r/λ . Для вычисления интегральных коэффициентов в таких разложениях применяется формула ([11], формула 2.16.33.2), которую можно еще записать в другом виде ([1], последняя формула (2.5)).

В результате для функций K_{mn} при $n = m$ получим

$$\begin{aligned} K_{mm}(x, y, r, z) = & \frac{C_0^{mm}}{\lambda} + \frac{C_1^{mm} x + C_2^{mm} r}{\lambda^2} + \\ & + \frac{C_3^{mm} x^2 + C_4^{mm} xr + C_5^{mm} r^2 + C_6^{mm} (z - y)^2}{\lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right), \quad m = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} C_0^{11} &= -\frac{1}{2} a_{10} + \frac{7-8\nu}{2} a_{20} - \frac{7-8\nu}{4} a_{30} - \frac{1}{4} a_{31} \\ C_1^{11} &= -\frac{1}{4} a_{10} + \frac{1}{8} a_{11} - \frac{7-8\nu}{4} a_{20} - \frac{1}{8} a_{21} + \frac{1-8\nu}{8} a_{30} - \frac{11-8\nu}{16} a_{31} \\ C_2^{11} &= \frac{3}{8} a_{10} - \frac{1}{8} a_{11} - \frac{7-8\nu}{4} a_{20} + \frac{1}{8} a_{21} + \frac{1-8\nu}{8} a_{30} + \frac{1-8\nu}{16} a_{31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3^{11} &= \frac{1}{16}a_{10} + \frac{1}{32}a_{11} + \frac{3(7-8\nu)}{16}a_{20} - \\
&\quad - \frac{15-8\nu}{32}a_{21} - \frac{3(7-8\nu)}{32}a_{30} + \frac{9-10\nu}{16}a_{31} + \frac{3}{256}a_{32} \\
C_4^{11} &= \frac{3}{8}a_{10} - \frac{5}{16}a_{11} + \frac{7-8\nu}{8}a_{20} + \\
&\quad + \frac{11-8\nu}{16}a_{21} - \frac{7-8\nu}{16}a_{30} - \frac{2-\nu}{4}a_{31} - \frac{3}{128}a_{32} \\
C_5^{11} &= -\frac{15}{16}a_{10} + \frac{9}{32}a_{11} + \frac{3(7-8\nu)}{16}a_{20} - \\
&\quad - \frac{7-8\nu}{32}a_{21} - \frac{3(13-16\nu)}{32}a_{30} - \frac{3(1-2\nu)}{16}a_{31} + \frac{3}{256}a_{32} \\
C_6^{11} &= \frac{3}{32}a_{11} - \frac{9-8\nu}{32}a_{21} + \frac{19-24\nu}{64}a_{31} + \frac{1}{256}a_{32} \\
C_0^{22} &= \frac{7-8\nu}{2}a_{10} - \frac{1}{8}a_{31} + \frac{1}{2}a_{40} - a_{50} \\
C_1^{22} &= -\frac{7-8\nu}{4}a_{10} - \frac{1}{8}a_{11} + \frac{1}{16}a_{31} - \frac{3}{4}a_{40} + \frac{1}{8}a_{41} + \frac{3}{4}a_{50} \\
C_2^{22} &= -\frac{7-8\nu}{4}a_{10} + \frac{1}{8}a_{11} + \frac{1}{16}a_{31} + \frac{1}{4}a_{40} - \frac{1}{8}a_{41} - \frac{1}{2}a_{50} \\
C_3^{22} &= \frac{3(7-8\nu)}{16}a_{10} - \frac{3-16\nu}{32}a_{11} - \frac{5}{32}a_{30} - \frac{3}{64}a_{31} + \\
&\quad + \frac{1}{256}a_{32} + \frac{15}{16}a_{40} - \frac{9}{32}a_{41} - \frac{15}{8}a_{50} + \frac{1}{16}a_{51} \\
C_4^{22} &= \frac{9-8\nu}{16}a_{10} + \frac{9-8\nu}{32}a_{11} + \frac{5}{32}a_{30} + \frac{7}{64}a_{31} - \\
&\quad - \frac{1}{256}a_{32} - \frac{9}{16}a_{40} + \frac{7}{32}a_{41} + \frac{7}{8}a_{50} - \frac{1}{16}a_{51} \\
C_5^{22} &= \frac{3(7-8\nu)}{16}a_{10} - \frac{11-8\nu}{32}a_{11} - \frac{5}{32}a_{30} - \frac{3}{64}a_{31} + \\
&\quad + \frac{1}{256}a_{32} - \frac{1}{16}a_{40} - \frac{1}{32}a_{41} - \frac{1}{8}a_{50} + \frac{1}{32}a_{51} \\
C_6^{22} &= -\frac{5-8\nu}{32}a_{11} + \frac{1}{256}a_{32} - \frac{3}{32}a_{41} + \frac{1}{16}a_{51}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Здесь введены обозначения

$$a_{mn} = \frac{1}{4(1-\nu)} \int_0^{\infty} \text{th}(\pi u) W_m(\alpha, u) f_n(u) du \tag{2.12}$$

$$f_0(u) \equiv 1, \quad f_1(u) = 1 + 4u^2, \quad f_2(u) = (1 + 4u^2)(9 + 4u^2)$$

Для функций K_{mn} при $n \neq m$ получим

$$K_{mn}(x, y, r, z) = \frac{C_0^{mn}}{\lambda^2}(z-y) + \frac{C_1^{mn}x + C_2^{mn}r}{\lambda^3}(z-y) + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right), \quad m, n = 1, 2 \tag{2.13}$$

где

$$\begin{aligned}
 C_0^{12} &= -\frac{7-8\nu}{4}a_{10} + \frac{1}{8}a_{11} + \frac{9-8\nu}{16}a_{31} - \frac{7-8\nu}{4}a_{40} - \frac{1}{8}a_{41} + \frac{7-8\nu}{8}a_{50} \\
 C_1^{12} &= \frac{3-4\nu}{4}a_{10} + \frac{3-4\nu}{8}a_{11} + \frac{5}{32}a_{30} - \frac{9-16\nu}{64}a_{31} - \frac{1}{256}a_{32} + \\
 &+ \frac{3(7-8\nu)}{8}a_{40} - \frac{3-8\nu}{16}a_{41} - \frac{3(7-8\nu)}{4}a_{50} - \frac{1}{8}a_{51} \\
 C_2^{12} &= \frac{3(7-8\nu)}{8}a_{10} - \frac{20-17\nu}{4}a_{11} - \frac{5}{16}a_{30} - \frac{3(9-8\nu)}{32}a_{31} + \\
 &+ \frac{1}{128}a_{32} + (1-\nu)a_{40} + \frac{1-\nu}{2}a_{41} - \frac{7-8\nu}{4}a_{50} + \frac{1}{8}a_{51} \\
 C_0^{21} &= -\frac{1}{8}a_{11} + \frac{1}{8}a_{21} + \frac{3}{16}a_{31} \\
 C_1^{21} &= \frac{1}{16}a_{11} - \frac{3}{16}a_{21} + \frac{5}{16}a_{30} + \frac{9}{32}a_{31} - \frac{1}{128}a_{32} \\
 C_2^{21} &= \frac{3}{16}a_{11} - \frac{1}{16}a_{21} - \frac{5}{32}a_{30} - \frac{3}{64}a_{31} + \frac{1}{256}a_{32}
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Значения постоянных a_{mn} вида (2.12) при $\nu = 0.3$ и разных углах клина 2α приведены в табл. 1 для задачи А, когда $a_{3k} \equiv 0$, $a_{4k} \equiv a_{2k}$, и задачи Б.

Таблица 1

2α	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$4\pi/3$	$5\pi/3$
	Задача А					
a_{10}	1.305	0.6836	0.4124	0.1786	0.08062	0.02984
a_{11}	7.171	2.377	1.100	0.3571	0.1392	0.04728
$-a_{20}$	0.02763	0.1786	0.2062	0.1786	0.1256	0.06586
$-a_{21}$	-1.950	0.3571	0.5498	0.3571	0.1833	0.07207
a_{50}	0.6388	0.2525	0.1031	0	-0.02247	-0.01801
a_{51}	13.68	3.030	0.8246	0	-0.06611	-0.03719
	Задача Б					
$-a_{10}$	0.4805	0.3265	0.2511	0.1786	0.1445	0.1255
$-a_{11}$	4.972	1.663	0.8213	0.3571	0.2292	0.1774
$-a_{20}$	0.5209	0.3708	0.2887	0.1786	0.1391	0.1249
$-a_{21}$	5.360	1.874	0.9328	0.3571	0.2204	0.1765
a_{30}	0.07561	0.1068	0.1354	0.1984	0.04305	0.007350
a_{31}	1.283	0.8428	0.6201	0.3968	0.09312	0.01453
a_{32}	72.52	24.18	11.75	4.762	1.054	0.1552
$-a_{40}$	0.3848	0.1786	0.04495	-0.1786	0.06166	0.1116
$-a_{41}$	3.050	0.3571	-0.1833	-0.3571	0.05282	0.1503
$-a_{50}$	0.9497	0.3532	0.1442	0	-0.01641	-0.006663
$-a_{51}$	46.66	7.492	1.659	0	-0.06285	-0.02083

Разыскивая теперь решение системы (2.3) при учете выражений (2.10), (2.13) в форме

$$\tau_n(x, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\tau_{nl}(x, y)}{\lambda^l}, \quad n = 1, 2
 \tag{2.15}$$

и приравнивая члены при одинаковых степенях параметра λ , получим цепочку систем двух интегральных уравнений для последовательного определения функций $\tau_{nl}(x, y)$. Каждая система имеет вид

$$\int_{\Omega} [\tau_{1l}(x, y)R_{n1} + \tau_{2l}(x, y)R_{n2}] d\Omega_{xy} = F_{nl}(r, z) \quad (r, z) \in \Omega_{rz} \quad (2.16)$$

Здесь $n = 1, 2; l = 0, 1, \dots; F_{nl}(r, z)$ – известные полиномы.

Решение системы уравнений (2.16) при фиксированном значении l базируется на следующей лемме (см. [3], с. 10).

Лемма 2. Если наибольшая степень двух полиномов $F_{1l}(r, z), F_{2l}(r, z)$ при фиксированном значении l равна j , то решение системы (2.16) представимо в виде

$$\tau_{nl}(r, z) = \frac{Q_{nl}(r, z)}{L(r, z)}, \quad L(r, z) = \left(1 - \frac{r^2}{c^2} - z^2\right)^{1/2}, \quad n = 1, 2 \quad (2.17)$$

где $Q_{nl}(r, z)$ – полиномы степени j .

Заметим, что $F_{10}(r, z) = 2\pi\delta, F_{20}(r, z) \equiv 0$, а коэффициенты последующих полиномов $F_{nl}(r, z)$ ($n = 1, 2; l = 1, 2, \dots$) при каждом фиксированном значении l являются интегралами, содержащими уже определенные при помощи леммы 2 функции $\tau_{nm}(r, z)$ ($n = 1, 2; m = 0, \dots, l - 1$) и вычисляются при помощи известной формулы ([7], с. 45, формула (6)).

Для определения неизвестных коэффициентов полиномов $Q_{nl}(r, z)$ в формуле (2.17) следует использовать полученные ранее результаты ([7], с. 44, формула (4) и [3], формула (1.7)). В итоге, отбрасывая члены порядка λ^{-4} , получим

$$\begin{aligned} \tau_1(r, z) &= \frac{\delta}{cL(r, z)} \left[T_{10} + \frac{T_{11}}{\lambda} + \frac{T_{12} + T_{13}r}{\lambda^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{T_{14} + T_{15}r + T_{16}r^2 + T_{17}z^2}{\lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right) \right] \\ \tau_2(r, z) &= \frac{\delta}{cL(r, z)} \left[\frac{T_{20}z}{\lambda^2} + \frac{(T_{21} + T_{22}r)z}{\lambda^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} T_{10} &= \frac{T_{11}}{D_1} = \frac{T_{12}}{D_1^2} = \frac{1}{D_0}, \quad D_0 = S_{00} - \frac{S_{10}}{4(1-\nu)}, \quad D_1 = -\frac{C_0^{11}}{D_0} \\ T_{13} &= \frac{T_{15}}{D_1} = \frac{4(1-\nu)}{D_0 D_2} \left\{ -C_0^{21}(S_{10} - 3c^2 S_{11}) - C_2^{11}[4(1-\nu)S_{10} - 3c^2 S_{11}] \right\} \\ T_{20} &= \frac{T_{21}}{D_1} = \frac{4(1-\nu)c^2}{D_0 D_2} \left\{ -C_2^{11}(S_{01} - 3S_{11}) - C_0^{21}[4(1-\nu)S_{01} - 3S_{11}] \right\} \\ D_2 &= kc^2 \left[(5 - 4\nu)S_{01}S_{10} - 3(c^2 S_{01} + S_{10})S_{11} \right] \\ T_{14} &= \frac{1}{D_0} \left[D_1^3 - \frac{C_3^{11}c^2 + C_6^{11}}{3D_0} - T_{16} \frac{c^2}{2} \left(S_{10} + \frac{2c^2 S_{11} - S_{20}}{4(1-\nu)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - T_{17} \frac{c^2}{2} \left(S_{01} - \frac{3S_{11}}{4(1-\nu)} \right) - T_{22} \frac{3c^2 S_{11}}{8(1-\nu)} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Постоянные T_{16} , T_{17} и T_{22} находятся из системы трех линейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_{16} \\ T_{17} \\ T_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} E_{14} \\ E_{24} \\ E_{34} \end{vmatrix} \\ E_{11} &= c^2 \left[4(1-\nu)(2c^2 S_{02} - S_{11}) - 3(4c^2 S_{12} - S_{21}) \right] \\ E_{12} &= -4(1-\nu)(c^2 S_{02} - 2S_{11}) + 3(3c^2 S_{12} - 2S_{21}) \\ E_{13} &= 3 \left[-c^2(2S_{11} + 3S_{12}) + 2S_{21} \right], \quad E_{14} = -8(1-\nu)C_5^{11} / D_0 \\ E_{21} &= c^2 \left[4c^2(S_{11} - 3S_{12}) + 4(1-\nu)(2c^2 S_{11} - S_{20}) - 2S_{20} + 3S_{30} \right] \\ E_{22} &= -4(1-\nu)(c^2 S_{11} - 2S_{20}) - c^2(2S_{11} - 9S_{21}) + 2(2S_{20} - 3S_{30}) \\ E_{23} &= -3(3c^2 S_{21} - 2S_{30}), \quad E_{24} = -8(1-\nu)C_6^{11} / D_0 \\ E_{31} &= c^2 \left[-2c^2(S_{02} - 6S_{12}) + S_{11} - 3S_{21} \right], \quad E_{32} = c^2(S_{02} - 9S_{12}) - 2(S_{11} - 3S_{21}) \\ E_{33} &= 3c^2 \left[4(1-\nu)S_{11} + S_{11} - 4c^2 S_{12} + S_{21} \right], \quad E_{34} = -4(1-\nu)C_2^{21} / D_0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

В соотношениях (2.18), (2.19) введено обозначение

$$S_{mn} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2m} \psi \sin^{2n} \psi}{(1 - e^2 \sin^2 \psi)^{m+n+1/2}} d\psi, \quad e^2 = 1 - c^2 \quad (2.21)$$

Интегралы (2.21) могут быть выражены через полные эллиптические интегралы $\mathbf{K}(e)$ и $\mathbf{E}(e)$:

$$\begin{aligned} S_{00} &= \mathbf{K}(e), \quad S_{01} = \frac{\mathbf{E}(e) - (1 - e^2)\mathbf{K}(e)}{e^2(1 - e^2)} \\ S_{02} &= \frac{-2(1 - 2e^2)\mathbf{E}(e) + (2 - 5e^2 + 3e^4)\mathbf{K}(e)}{3e^4(1 - e^2)^2} \\ S_{10} &= \frac{\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)}{e^2}, \quad S_{11} = \frac{(2 - e^2)\mathbf{E}(e) - 2(1 - e^2)\mathbf{K}(e)}{3e^4(1 - e^2)} \\ S_{12} &= \frac{-(8 - 13e^2 + 3e^4)\mathbf{E}(e) + (8 - 17e^2 + 9e^4)\mathbf{K}(e)}{15e^6(1 - e^2)^2} \\ S_{20} &= \frac{-2(1 + e^2)\mathbf{E}(e) + (2 + e^2)\mathbf{K}(e)}{3e^4} \\ S_{21} &= \frac{(8 - 3e^2 - 2e^4)\mathbf{E}(e) - (8 - 7e^2 - e^4)\mathbf{K}(e)}{15e^6(1 - e^2)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$S_{30} = \frac{-(8 + 7e^2 + 8e^4)E(e) + (8 + 3e^2 + 4e^4)K(e)}{15e^6}$$

Связь между силой T , приложенной к включению, и его перемещением δ находится из условия равновесия

$$\int_{\Omega} \tau_1(x, y) d\Omega_{xy} = \frac{T}{2} \quad (2.23)$$

которое для решения (2.18) принимает вид

$$T = 4\pi\delta \left[T_{10} + \frac{T_{11}}{\lambda} + \frac{T_{12}}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} \left(T_{14} + \frac{c^2}{3} T_{16} + \frac{T_{17}}{3} \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^4}\right) \right] \quad (2.24)$$

Значения отнесенных к δ величин T , $f_{\pm} = \lim_{r \rightarrow \pm c \mp 0} (1 \mp r/c)^{1/2} \tau_1(r, 0)$, и $f = 10^2 \cdot \lim_{z \rightarrow 1 - 0} (1 - z)^{1/2} \tau_2(0, z)$, рассчитанные по формулам (2.18)–(2.24) при $2\alpha = \pi/2$, $\nu = 0.3$ и разных значениях λ и c , даны в табл. 2.

Таблица 2

λ	4			6			∞		
	0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9	0.1	0.5	0.9
	Задача А								
T/δ	4.95	8.28	10.8	4.83	7.95	10.3	4.61	7.37	9.30
f_+/δ	2.77	0.915	0.651	2.71	0.888	0.631	2.59	0.829	0.581
f_-/δ	2.79	0.945	0.693	2.72	0.901	0.649	2.59	0.829	0.581
f/δ	2.49	1.87	2.00	1.08	0.802	0.853	0	0	0
	Задача Б								
T/δ	5.07	8.63	11.4	4.91	8.17	10.6	4.61	7.37	9.30
f_+/δ	2.86	0.973	0.714	2.76	0.920	0.664	2.59	0.829	0.581
f_-/δ	2.86	0.976	0.719	2.76	0.921	0.666	2.59	0.829	0.581
f/δ	1.38	1.10	1.24	0.597	0.469	0.521	0	0	0

Заметим, что задача А для клина с углом раствора $2\pi/n$ ($n = 1, 2, \dots$) соответствует симметричной задаче об n одинаковых включениях в бесконечном пространстве; включения расположены в полуплоскостях, угол между которыми $2\pi/n$. Для четверть-пространства (табл. 2, задача А) исследуется взаимодействие четырех включений в пространстве. Чем ближе эти включения друг к другу (чем меньше λ), тем большее усилие T требуется для смещения включений на заданную величину δ . Для задачи Б соответствующее значение T больше, чем для задачи А. Круглое включение ($c \rightarrow 1$) сдвинуть труднее, чем имеющее большой эксцентриситет (значение c мало). Коэффициент при корневой особенности касательного контактного напряжения $\tau_{r\varphi}$ немного больше на той стороне включения, которая ближе к ребру клина ($f_- > f_+$). При сдвиге включения перпендикулярно ребру для поперечного движению контактного касательного напряжения $\tau_{\varphi z}$ справедлива оценка $\tau_{\varphi z} = O(\tau_{r\varphi}/\lambda^2)$, $\lambda \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при поддержке фонда Гумбольдта (Германия) и Российского фонда фундаментальных исследований (02-01-00346).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебаков М.И. Внедрение штампа в форме эллиптического параболоида в упругий пространственный клин // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 286–295.
2. Пожарский Д.А. Об эллиптической трещине в упругом пространственном клине // Изв. РАН. МТТ. 1993. № 6. С. 105–112.
3. Александров В.М., Сметанин Б.И., Соболев Б.В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука. Физматлит, 1993. 224 с.
4. Лубягин И.А., Пожарский Д.А., Чебаков М.И. Обобщение задач Буссинеска и Черрути для случая упругого пространственного клина // Докл. АН СССР. 1991. Т. 321. № 1. С. 58–62.
5. Пожарский Д.А. О трехмерной контактной задаче для упругого клина при учете сил трения // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 151–159.
6. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наук. думка, 1979. 263 с.
7. Александров В.М., Пожарский Д.А. Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
8. Thomson W. Mathematical and Physical Papers. V. 1. Cambridge: Univ. Press, 1882. 558 p.
9. Уфлянд Я.С. Некоторые пространственные задачи теории упругости для клина // Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Наука, Физматлит, 1972. 549–553.
10. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
11. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. 750 с.
12. Hahn H.G. Elastizitätstheorie. Stuttgart: Teubner, 1985 = Хан Х.Г. Теория упругости. М.: Мир, 1988. 343 с.

Москва, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
4.X.2001