

УДК 539.3

© 2002 г. Э.И. Григолюк, Е.А. Лопаницын

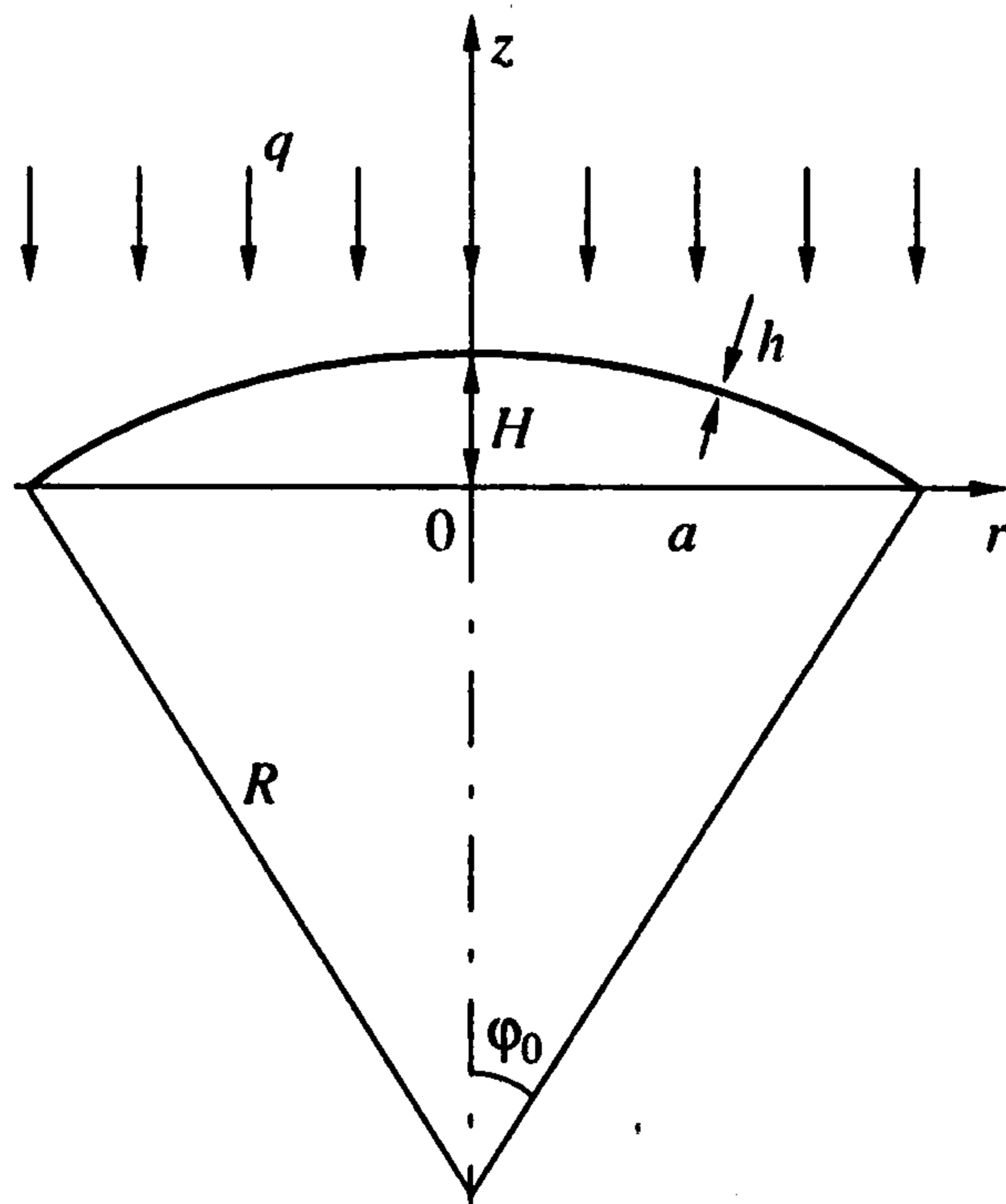
**ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ
ПОЛОГИХ СФЕРИЧЕСКИХ КУПОЛОВ**

В рамках предположения о конечности и осесимметричности прогибов упругого, пологого сферического купола, жестко защемленного по контуру и нагруженного равномерным поперечным давлением, исследуется его закритическое поведение после потери устойчивости. Решение строится на основе уравнений Маргерра методом Релея – Ритца с аппроксимацией перемещений конечными суммами по функциям Бесселя. Получающаяся при этом система нелинейных алгебраических уравнений решается методом продолжения. Проанализировано влияние параметра тонкостенности купола на его деформационную кривую. Обнаружены явления зарождения на траектории нагружения предельных точек, их слияния и последующего исчезновения, а также явления присоединения изолированных петель к основной ветви траектории нагружения и отрыва их от нее. Показана высокая чувствительность купола к отклонениям от идеальности формы.

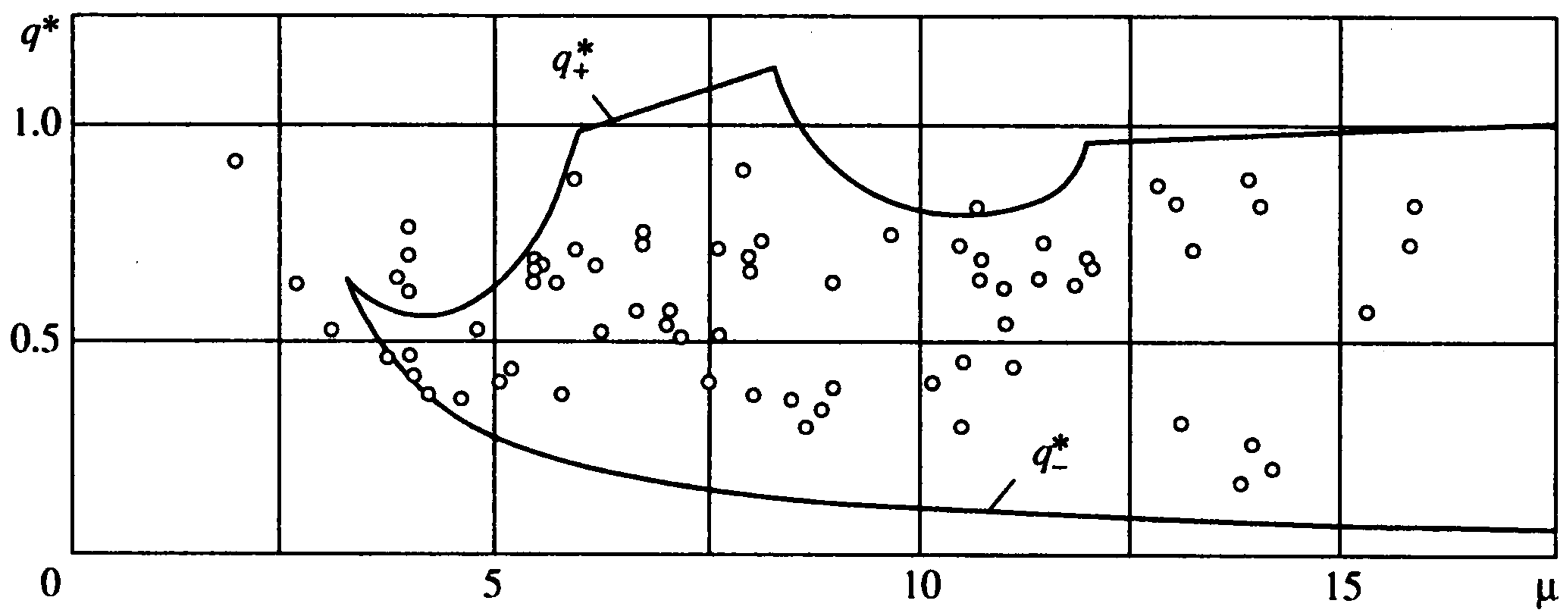
Решение полной задачи о процессе деформирования тонкостенных конструкций при действии статических нагрузок включает в себя три этапа: определение нелинейного напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции до потери ею устойчивости, решение проблемы устойчивости конструкции при наличии у нее предварительного нелинейного НДС и нахождение возможных неустойчивых состояний равновесия конструкции после потери устойчивости с последующим выходом на устойчивое послекритическое нелинейное НДС.

Выход в свет работы С.П. Тимошенко [1] (и более ранней его работы [2] по перескоку биметаллических криволинейных полос), посвященной прощелкиванию пологого шарнирно опертого стержня при поперечном давлении и определению в явной форме его верхней и нижней критических нагрузок, позволил по-иному взглянуть на существовавшую постановку проблемы потери устойчивости оболочек и понять необходимость привлечения нелинейных уравнений к ее исследованию. Кроме того, С.П. Тимошенко в своей статье обратил внимание на возможность обобщения его результатов на пологие оболочки. Не будет преувеличением сказать, что именно модель С.П. Тимошенко способствовала разработке нелинейной теории оболочек. И здесь следует вспомнить фундаментальные работы И.Г. Бубнова [3, 4] по нелинейному поведению бесконечно длинной цилиндрической панели при поперечном давлении. Стержневая модель С.П. Тимошенко была основательно использована [5] при анализе нелинейного осесимметричного поведения пологих сферических оболочек (фиг. 1). Однако только опубликование Маргерром [6] дифференциальных уравнений для тонких упругих пологих оболочек конечного прогиба, являющихся естественным обобщением уравнений Бубнова–Фёппля–Кармана [3, 4, 7, 8], позволило иметь классическую компактную систему уравнений для описания процесса нелинейного деформирования оболочки. В результате появилась возможность учесть нелинейность в процессе деформирования оболочки и получить аналитическое описание процесса ее прощелкивания и закритического поведения. Эта возможность была использована [9] для решения уравнений Маргерра в случае пологого сплошного сферического купола при равномерном поперечном давлении методом Бубнова при однопараметрическом представлении функции прогиба и анализа осесимметричного нелинейного поведения для четырех вариантов контурных условий. Впоследствии Рейсснером [10] была дана более точная система дифференциальных уравнений конечных прогибов пологих оболочек по сравнению с классическими уравнениями Маргерра.

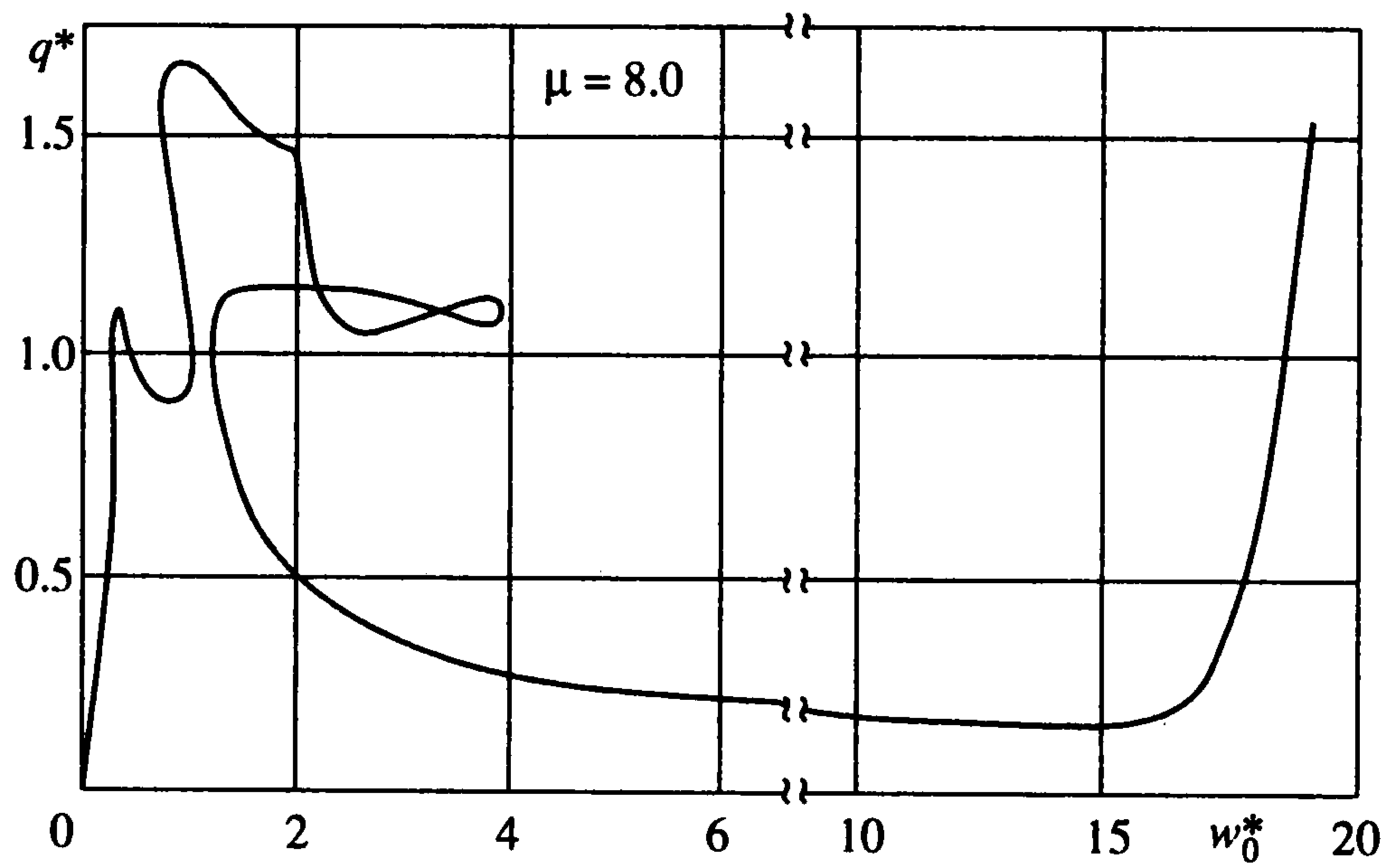
Анализ поведения пологих сферических куполов с использованием ЭВМ на основе уравнений Маргерра и Рейсснера был дан рядом авторов [11–16].



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Более подробно эти периоды развития теории и практики расчетов сферических оболочек описаны в книгах [17–19] и обзорах [20, 21].

Автором первого экспериментального исследования поведения сферических оболочек, по-видимому, является К. Бах [22]. Он обнаружил, что при некотором внешнем давлении сферическая оболочка оказывается неустойчивой – на ней появляются вмятины. Значительно позднее Болей и Секлер (1939 г.) (см. [5]) провели тщательный эксперимент с прецизионно изготовленной медной полусферой и установили, что критическое экспериментальное давление меньше в 4 раза теоретического значения, соответствующего линейной теории устойчивости оболочек (формула Цолли). Впоследствии подобные исследования поведения пологих сферических куполов под действием равномерного поперечного давления были проведены рядом авторов [23–30]. Подробное обсуждение работ этих и многих других исследователей было дано в монографии [31].

Сопоставление экспериментально и теоретически полученных значений критических нагрузок пологих сферических куполов показало их значительное расхождение. Это видно на фиг. 2, взятой из книги [31]; сплошными линиями отмечена зависимость верхней и нижней критической нагрузок осесимметрично деформирующегося пологого, жестко заделанного по контуру сферического купола от его параметра тонкостенности, определяемого в основном отношением радиуса кривизны оболочки к толщине ее стенки. Это теоретические результаты, полученные разными авторами посредством решения в основном уравнений Маргерра. Точками отмечены значения верхней критической нагрузки, которые взяты из экспериментальных работ перечисленных выше исследователей.

Такое несовпадение результатов связано как с условиями экспериментов, так и с особенностями применяемой математической модели оболочки. В первую очередь сюда относятся (см. [31]) пренебрежение начальными неправильностями формы оболочки и начальными напряжениями ней, неидеальность условий нагружения оболочки и закрепления ее на контуре, неоднородность свойств материала оболочки и несимметричность ее деформирования и т.д. Однако, как было отмечено в [31], попытки учесть в расчетах эти особенности реального сферического купола и способов его нагружения и закрепления успехом не увенчались. По сей день не существует набора параметров математической модели оболочки, записанной на основе уравнений Маргерра или Рейсснера, с помощью незначительного варьирования которых можно было бы получить весь спектр экспериментально найденных значений верхней критической нагрузки.

Одним из вариантов решения этой проблемы была попытка решить полную задачу о прощелкивании пологого сферического купола под действием равномерного поперечного давления и подтвердить тем самым его высокую чувствительность к вышеперечисленным несовершенствам. На примере идеальной оболочки такая попытка предпринималась многими исследователями ([32–36] и др.). Однако полностью решить эту задачу удалось только Месколу [37]. На фиг. 3 показана траектория нагружения жестко заделанного по контуру пологого сферического купола равномерным поперечным давлением [37]; q^* – безразмерное радиальное давление, w_0^* – относительный прогиб срединной поверхности в вершине купола. После опубликования статьи [37] никому не удалось воспроизвести полностью процесс закритического деформирования купола, а работ самого Мескола не последовало. Поэтому вопрос о закритическом поведении купола остался до конца невыясненным.

В связи со сказанным выше цель настоящей работы – решение полной задачи о геометрически нелинейном деформировании пологого сферического купола, проведение параметрического анализа процесса его деформирования и уточнение зависимости критических нагрузок, соответствующих предельным точкам траекторий нагружения, от параметра тонкостенности купола.

1. Математическая модель купола. Для описания конечных осесимметричных прогибов упругого, пологого сферического купола, нагруженного равномерным поперечным давлением q , наиболее целесообразны дифференциальные уравнения Маргерра. В смешанной форме они имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 F + \frac{Eh}{R} \nabla^2 w + \frac{Eh}{2} N_2(w, w) &= 0 \\ D \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{1}{R} \nabla^2 F - N_2(F, w) &= -q; \quad 0 \leq r \leq a \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ∇^2 – оператор Лапласа, N_2 – нелинейный дифференциальный оператор второго порядка,

$$(\nabla^2 \xi = \xi'' + \xi' / r, \quad N_2(\xi, \zeta) = (\zeta'' \xi' + \zeta' \xi'') / r, \quad D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)])$$

штрих означает производную по радиальной координате r , w – прогиб оболочки, F – функция напряжений Эри, связанная с удельными нормальными усилиями следующими соотношениями:

$$N_{rr} = F' / r, \quad N_{\theta\theta} = F''$$

R – радиус кривизны купола, E – модуль упругости его материала, h – толщина его стенки, D – ее цилиндрическая жесткость, ν – коэффициент Пуассона материала купола.

В случае жесткой заделки купола по контуру эти уравнения должны быть доопределены граничными условиями

$$u = \vartheta_r = Q_r^0 = 0 \quad \text{при } r = 0; \quad u = \vartheta_r = w = 0 \quad \text{при } r = a \quad (1.2)$$

где u – радиальные перемещения точек срединной поверхности купола, ϑ_r – угол поворота нормали к срединной поверхности купола в радиальном направлении, а Q_r^0 – обобщенная радиальная поперечная сила

$$Q_r^0 = -D(\nabla^2 w)' + N_{rr} \vartheta_r$$

$$\text{Уравнения Маргерра – дифференциальный аналог уравнения равновесия Лагранжа} \\ \delta(\Pi - A) = 0 \quad (1.3)$$

в котором Π – потенциальная энергия деформации оболочки, A – работа внешней нагрузки

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \{B[e_{rr}^2 + 2\nu e_{rr} e_{\theta\theta} + e_{\theta\theta}^2] + D[\kappa_{rr}^2 + 2\nu \kappa_{rr} \kappa_{\theta\theta} + \kappa_{\theta\theta}^2]\} r dr d\theta, \quad B = Eh / (1 - \nu^2) \quad (1.4)$$

$$A = \int_0^a \int_0^{2\pi} q w r dr d\theta$$

Здесь e_{rr} , $e_{\theta\theta}$, κ_{rr} и $\kappa_{\theta\theta}$ – деформации и кривизны срединной поверхности оболочки

$$e_{rr} = u' - w / R + w'^2 / 2, \quad e_{\theta\theta} = u / r - w / R, \quad \kappa_{rr} = -w'', \quad \kappa_{\theta\theta} = -w' / r$$

Решение задачи о конечных прогибах пологого сферического купола удобно искать в перемещениях, которые представляются в виде функциональных рядов (всюду далее суммирование по i, p, q, r, s ведется от 1 до K)

$$u^* = \frac{a}{h^2} u = \sum_i U_i u_i(\rho), \quad w^* = \frac{w}{h} = \sum_i W_i w_i(\rho) \quad (1.5)$$

Здесь U_i и W_i – искомые обобщенные перемещения, а базисные функции $u_i(\rho)$ и $w_i(\rho)$, исходя из структуры уравнений равновесия купола (1.1) и граничных условий (1.2) задачи, зададим следующим образом:

$$u_i(\rho) = A_i J_1(\nu_i \rho), \quad w_i(\rho) = C_i [J_0(\omega_i \rho) - b_i I_0(\omega_i \rho)]$$

$$A_i = \frac{\sqrt{2}}{|J_0(\nu_i)|}, \quad C_i = \frac{1}{|J_0(\omega_i)|}, \quad b_i = \frac{J_0(\omega_i)}{I_0(\omega_i)}; \quad i = 1, 2, \dots, K$$

где J_0 и J_1 – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков, I_0 – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, A_i , C_i и b_i –

постоянные, а параметры ν_i и ω_i отыскиваются как корни следующих характеристических уравнений:

$$\nu_i: J_1(\nu) = 0, \quad \omega_i: J_1(\omega)I_0(\omega) + J_0(\omega)I_1(\omega) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, K$$

В соответствии с методом Релея – Ритца перемещения в виде (1.5) подставляются в выражения для потенциальной энергии деформации пологого сферического купола и работы внешней нагрузки (1.4). В результате после выполнения операций интегрирования потенциальная энергия деформации и работа внешней нагрузки представляются конечными суммами

$$\begin{aligned} \Pi = \pi D \left(\frac{h}{a} \right)^2 & \left[\sum_p (S_{pq}^{01} U_p U_q + S_{pq}^{02} U_p W_q + S_{pq}^{03} W_p W_q) + \right. \\ & \left. + \sum_{p,q,r} (S_{pqr}^{10} U_p W_q W_r + S_{pqr}^{11} W_p W_q W_r) + \sum_{p,q,r,s} S_{pqrs}^{19} W_p W_q W_r W_s \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$A = 2\pi D q^* \left(\frac{h}{a} \right)^2 \sum_p Q_p W_p, \quad q^* = \frac{[3(1-\nu^2)]^{1/2}}{2} \frac{qR^2}{Eh^2} \quad (1.7)$$

Здесь q^* – безразмерная поперечная нагрузка, а коэффициенты S_{pq}^{01} , S_{pq}^{02} , S_{pq}^{03} , S_{pqr}^{10} , S_{pqr}^{11} , S_{pqrs}^{19} и Q_p при обобщенных перемещениях являются функциями своих индексов, коэффициента Пуассона и параметра тонкостенности купола

$$\mu = [12(1-\nu^2)]^{1/4} [a^2 / (Rh)]^{1/2}$$

Следующим и последним этапом реализации метода Релея–Ритца является получение уравнений равновесия относительно обобщенных перемещений. Для этого потенциальная энергия деформации Π и работа внешней нагрузки A в виде конечных сумм (1.6), (1.7) подставляется в уравнение Лагранжа (1.3), где выполняется варьирование по величинам обобщенных перемещений U_i и W_i . В результате для их определения получается система нелинейных алгебраических уравнений, которая может быть записана в матричной форме

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.8)$$

$$\mathbf{f} = (f_1 f_2 \dots f_{2K})^T, \quad \mathbf{x} = (U_1 W_1 \dots U_K W_K q^*)^T$$

Под вектором \mathbf{f} имеется в виду вектор, составленный из частных производных полной потенциальной энергии деформации оболочки $\Pi - A$ по перемещениям U_i и W_i ($i = 1, 2, \dots, K$). Вектор \mathbf{x} в соответствии с идеей о равноправии переменных решения составлен из обобщенных перемещений, к числу которых добавлена безразмерная поперечная нагрузка, его порядок определяется по количеству учитываемых членов в частичных суммах (1.5): $N_{\max} = 2K + 1$.

Система нелинейных алгебраических уравнений (1.8) соответствует дискретной модели пологого сферического купола конечных прогибов и следующий этап решения задачи заключается в решении этой системы уравнений.

Решение системы нелинейных алгебраических уравнений (1.8), порядок которой здесь для упрощения письма считается равным n , строится методом непрерывного продолжения. Для этого аналогично описанному ранее подходу [38] на каждом шаге по параметру λ , близкому к длине траектории нагружения, решается система линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{J}q = \mathbf{b} \quad (1.9)$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & \cdots & f_{1,n} & f_{1,n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n,1} & \cdots & f_{n,n} & f_{n,n+1} \\ f_{1,n+1} & \cdots & f_{n,n+1} & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \cdots \\ \varphi_n \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Элементы якобиана \mathbf{J} подсчитываются как частные производные левых частей системы нелинейных алгебраических уравнений (1.8) по аргументам решения, в число которых включен параметр нагрузки. Параметр ε системы (1.9) выбирается из условия наилучшей возможной обусловленности матрицы этой системы, а параметр b – из условия близости вектора решения \mathbf{q} к нормированному: $\|\mathbf{q}\| = 1$. В результате вектор \mathbf{q} , являющийся с геометрической точки зрения касательным вектором к траектории нагружения и называемый вектором продолжения, представляет собой вектор правых частей нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/d\lambda = \mathbf{q}(\mathbf{x}) \quad (1.10)$$

численное решение которой дает координаты точек траектории нагружения оболочки.

Для компенсации накапливающихся в процессе численного решения системы уравнений продолжения (1.10) погрешностей в составляющих вектора \mathbf{x} используется метод дискретного продолжения [39]. Его основа – метод Ньютона, реализованный для расширенного пространства переменных. Каждая итерация метода Ньютона в соответствии с указанным ранее [39] организуется посредством решения системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{J}\Delta\mathbf{x} = -\mathbf{f}_0$$

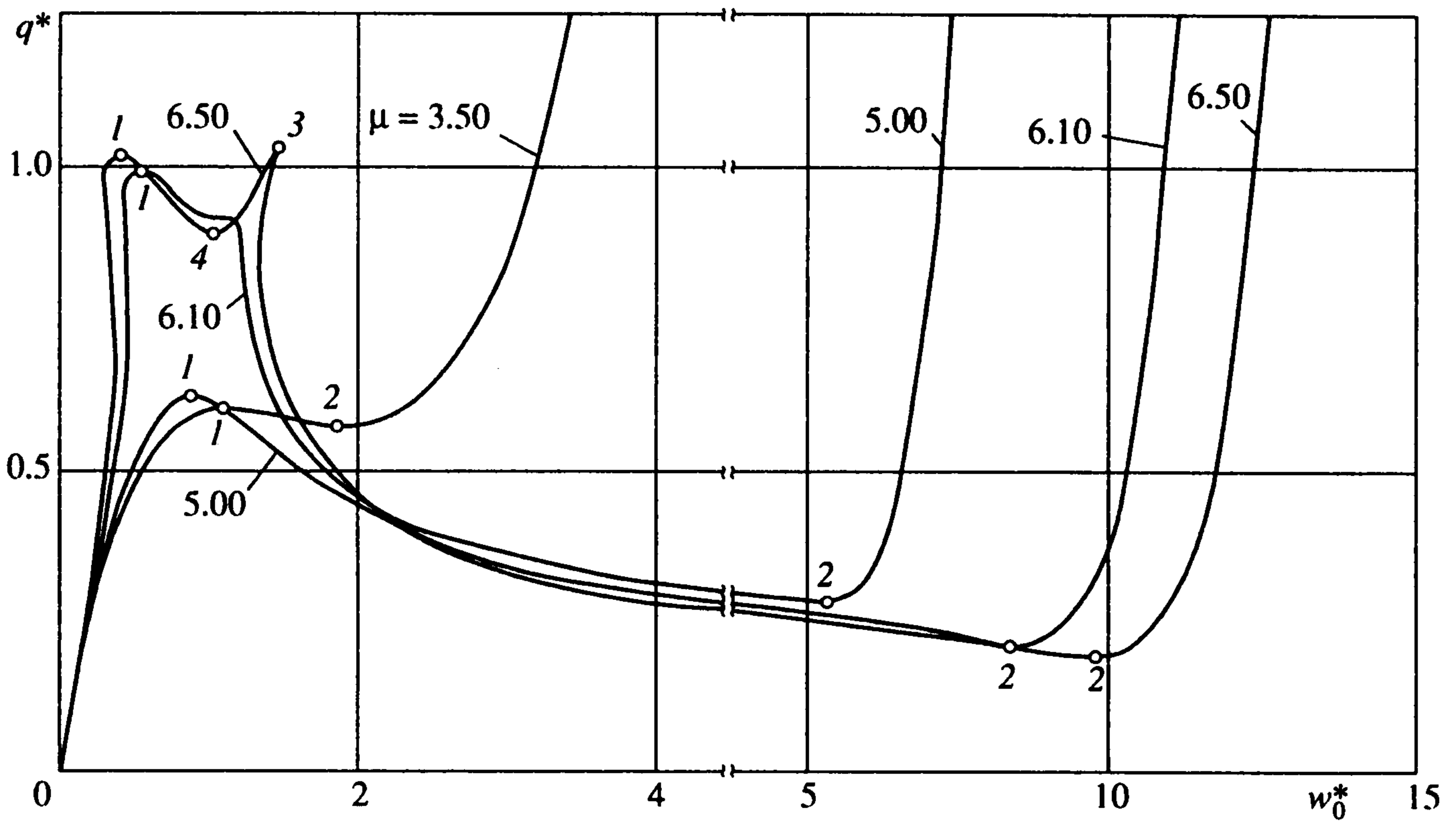
$$\Delta\mathbf{x} = (\Delta x_1 \dots \Delta x_n \Delta x_{n+1})^T, \quad \mathbf{f}_0 = (f_1 \dots f_n 0)^T$$

что позволяет уточнить вектор решения \mathbf{x} в любой регулярной точке траектории нагружения, включая ее предельные точки.

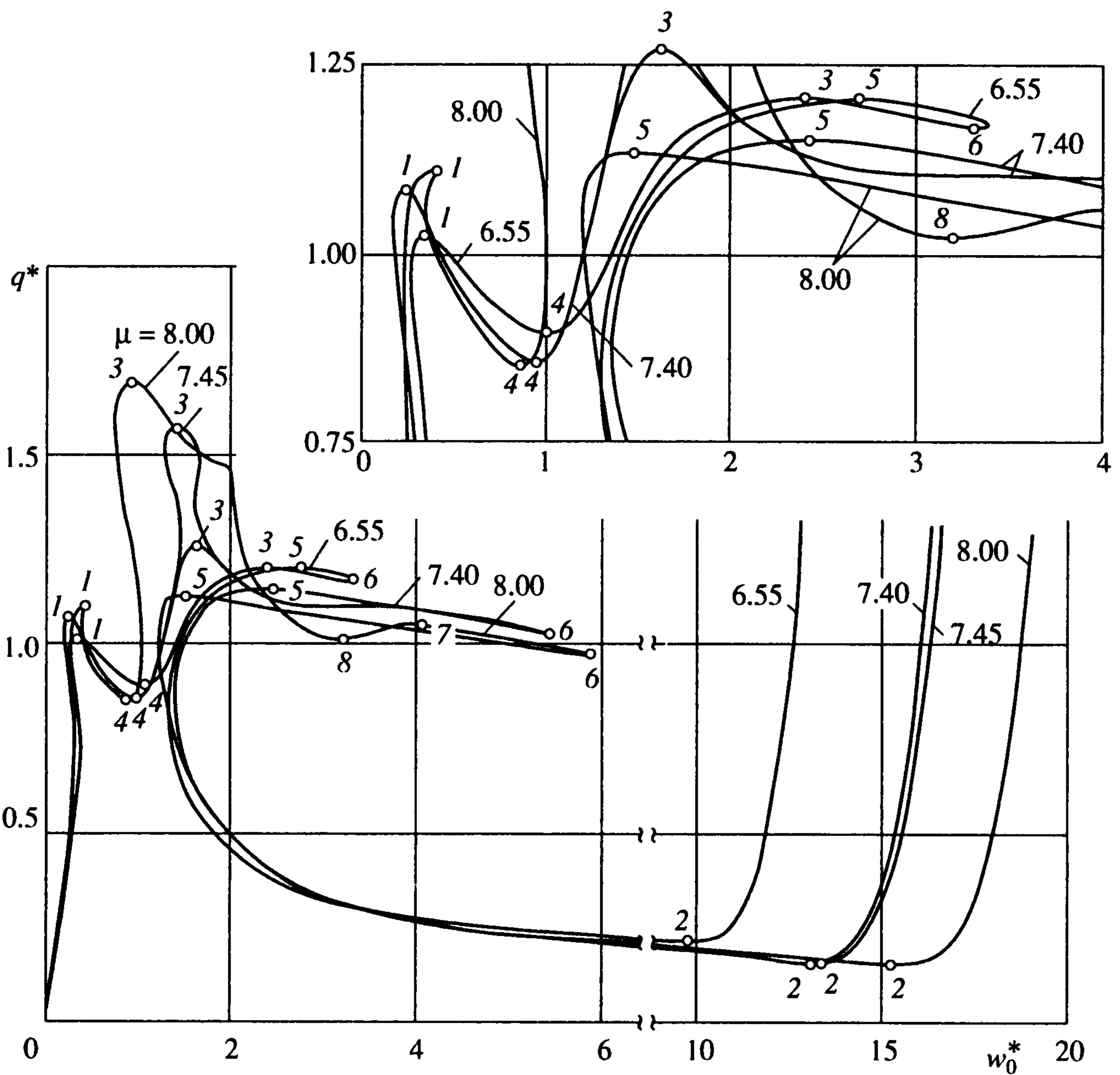
2. Влияние параметра тонкостенности на вид траектории нагружения. Практически единственным параметром пологой сферической оболочки, если не считать слабо меняющийся для металлов коэффициент Пуассона ($\nu \approx 0.3$), является параметр тонкостенности μ . Он в основном определяется углом раскрытия оболочки φ_0 и ее относительной толщиной h/R . Чем тоньше стенка оболочки и чем больше угол ее раскрытия, тем больше параметр тонкостенности μ . Если принять во внимание, что для пологих сферических оболочек угол раскрытия не превышает 22° , то для диапазона относительных толщин для тонких оболочек $h/R = 1/20 \dots 1/200$ границы изменения параметра тонкостенности оказываются следующими: $\mu = 0 \dots 18$.

Исследование влияния этого параметра проводилось на примере деформационной характеристики оболочки в координатах q^* и w_0^* в диапазоне значений μ от 3 до 16. Результаты этого исследования приведены на фиг. 4–8. Цифрами 1, 2... отмечены предельные точки, в которых оболочка в условиях осесимметричного деформирования теряет устойчивость прощелкиванием. Формы изгиба купола, соответствующие его напряженно-деформированному состоянию в этих точках, показаны в табл. 1 и на фиг. 9. Прочерки в табл. 1 означают, что при значении параметра тонкостенности μ , которое указано в рассматриваемой строке, предельная точка, которой отведена данная колонка таблицы, отсутствует на траектории нагружения (ТН).

Первая пара предельных точек (1 и 2), определяющих значения первых верхней и нижней критических нагрузок, появляется на ТН при $\mu \approx 3.3$. Их можно видеть на фиг. 4. Увеличение параметра тонкостенности вызывает эволюционное изменение вида ТН и при $\mu \approx 6.2$ приводит к появлению на ней второй пары предельных то-



Фиг. 4



Фиг. 5

чек (3 и 4). Процесс их зарождения виден при сравнении кривых с $\mu = 6.10$ и 6.50 на фиг. 4.

При дальнейшем увеличении параметра тонкостенности происходит скачкообразное увеличение критической нагрузки, соответствующей предельной точке 3, и появление еще одной пары предельных точек 5 и 6. Сравнение кривых с $\mu = 6.50$ и 6.55 на фиг. 4 и 5 дает повод предположить, что петля при $\mu = 6.55$ на фиг. 5 с точками 3, 5 и 6 существовала при значениях параметра тонкостенности меньших 6.55 в изолированном от основной ветви ТН виде, и ее появление на фиг. 5 вызвано ее слиянием с основной ветвью.

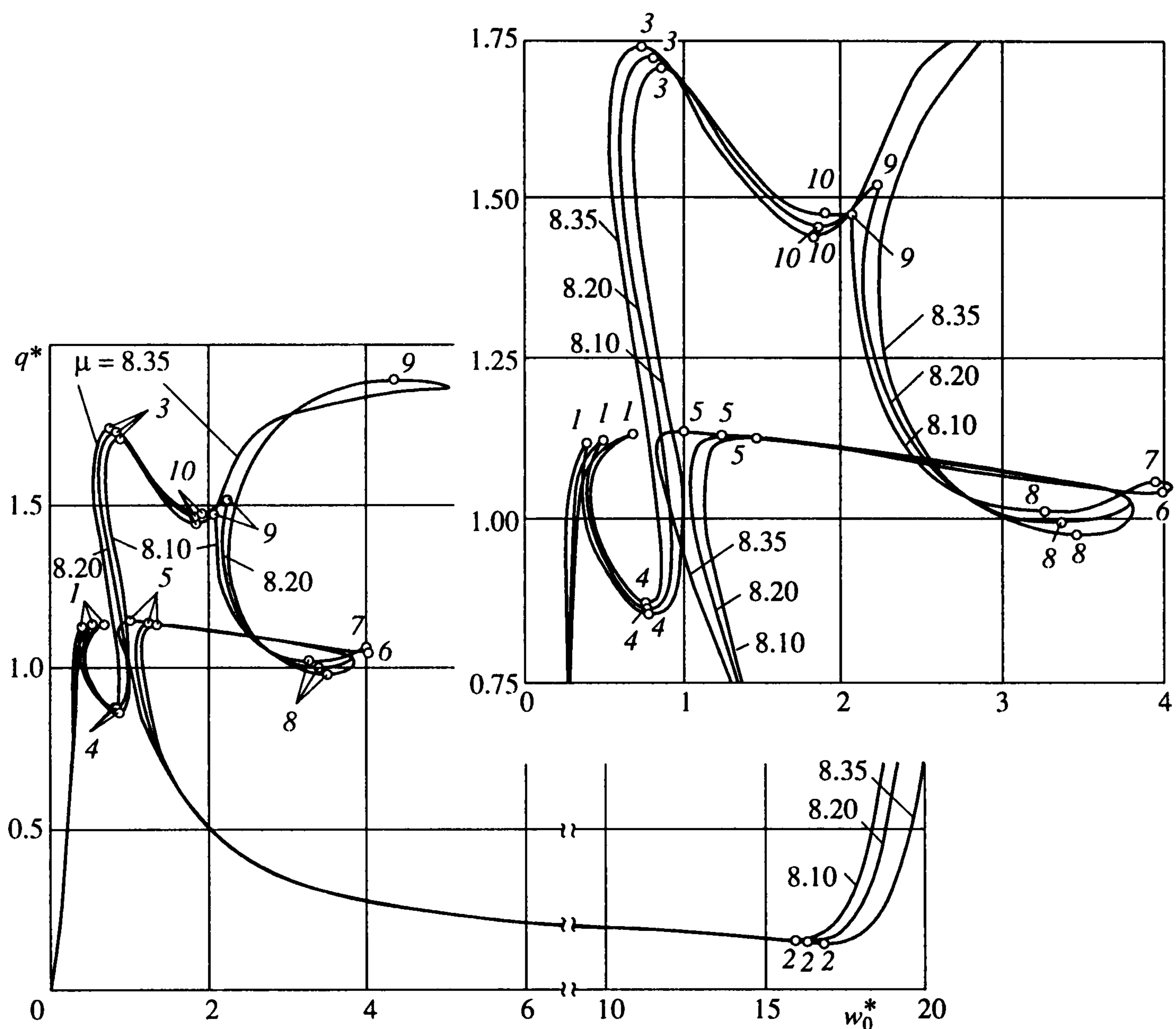
Увеличение параметра тонкостенности от значения 6.55 до значения 7.40 (фиг. 5) вызывает только эволюционное изменение ТН, но при $\mu \approx 7.44$ одновременно с зарождением третьей пары предельных точек 7 и 8 опять происходит резкое увеличение критической нагрузки, определяемой предельной точкой 3. Это, по-видимому, также связано с присоединением к основной ветви ТН изолированной петли, которая на фиг. 5 ($\mu = 7.45$) имеет предельную точку 3.

При изменении параметра тонкостенности от 7.45 до 8.20 (фиг. 5, 6) наблюдается эволюционное изменение ТН, в процессе которого исчезают предельные точки 6 и 7, и при $\mu \approx 8.25$ происходит описанный ранее процесс присоединения изолированной петли, показанной на фиг. 6. Это отчетливо видно при сравнении кривых с $\mu = 8.20$ и 8.35 на фиг. 6.

Следующее качественное изменение траектории нагружения происходит при $\mu \approx 8.36$. На фиг. 7 при $\mu = 8.36$ петли на основной ветви отсутствуют. Это может означать только отрыв от нее петли с предельными точками 3, 4, 8, 9 и 10 и переход этой петли в разряд изолированных. Это предположение подтверждается поведением предельных точек 1 и 5. Сравнение фиг. 5 и 6 показывает непрерывное сближение этих точек, что при $\mu \approx 8.36$ приводит, по всей видимости, к их слиянию.

Дальнейшее увеличение параметра тонкостенности с 8.36 до 15.00 повторяет процессы видоизменения ТН сферического купола, описанные выше для $\mu = 3.30 \dots 8.36$. Соответствующие кривые показаны на фиг. 7 и 8. Здесь тоже происходит эволюционное (см. кривые с $\mu = 8.36 \dots 12.80$ и $\mu = 12.90 \dots 14.90$) и скачкообразное (см. кривые с $\mu = 12.80$ и 12.90) изменение деформационных кривых, зарождение предельных точек (см. кривые с $\mu = 12.00$ и 12.20 и с $\mu = 14.00$ и 14.90), а также присоединение (см. кривые с $\mu = 12.80$ и 12.90) и отрыв петель при увеличении параметра тонкостенности с 14.90 до 15.00 .

Зависимость критических нагрузок, соответствующих предельным точкам 1...12 ТН, которые показаны на фиг. 4–8, приведена на фиг. 10. Она представляет собой многозначную кривую, основная часть которой (ветви 1 и 2) описывает верхнюю и нижнюю критические нагрузки (нагрузки предельных точек 1 и 2) и совпадает с известной (см. фиг. 2). Дополнительные ветви 3...12 этой кривой показывают процессы зарождения и исчезновения предельных точек высших порядков 3...12, присоединение и отрыв петель от основной ветви ТН. Некоторые из них, например ветви 4 и 6, описывают меньшие значения критических нагрузок, чем те, которые присущи ветви 1. В реальных условиях деформирования пологого сферического купола эти критические состояния, естественно, не могут быть реализованы. Их предельные точки лежат на неустойчивых участках ТН купола и попасть на них в естественных условиях деформирования нельзя. Однако тот факт, что критическое состояние купола, соответствующее предельной точке 4 (см. например фиг. 5, $\mu = 8.00$), расположено достаточно близко к критическому состоянию, соответствующему первой верхней критической нагрузке, которая вполне реализуется при реальном процессе нагружения, может оказаться полезным при расчете деформирования купола с учетом его начальных неправильностей формы. При этом рассмотрение форм прогиба купола (см. табл. 1, $\mu = 6.50 \dots 8.35$), соответствующих предельным точкам 1 и 4, обнаруживает их стационарность. Вид форм прогиба качественно не меняется при существенном изменении параметра тонкостенности оболочки. Поэтому можно пред-



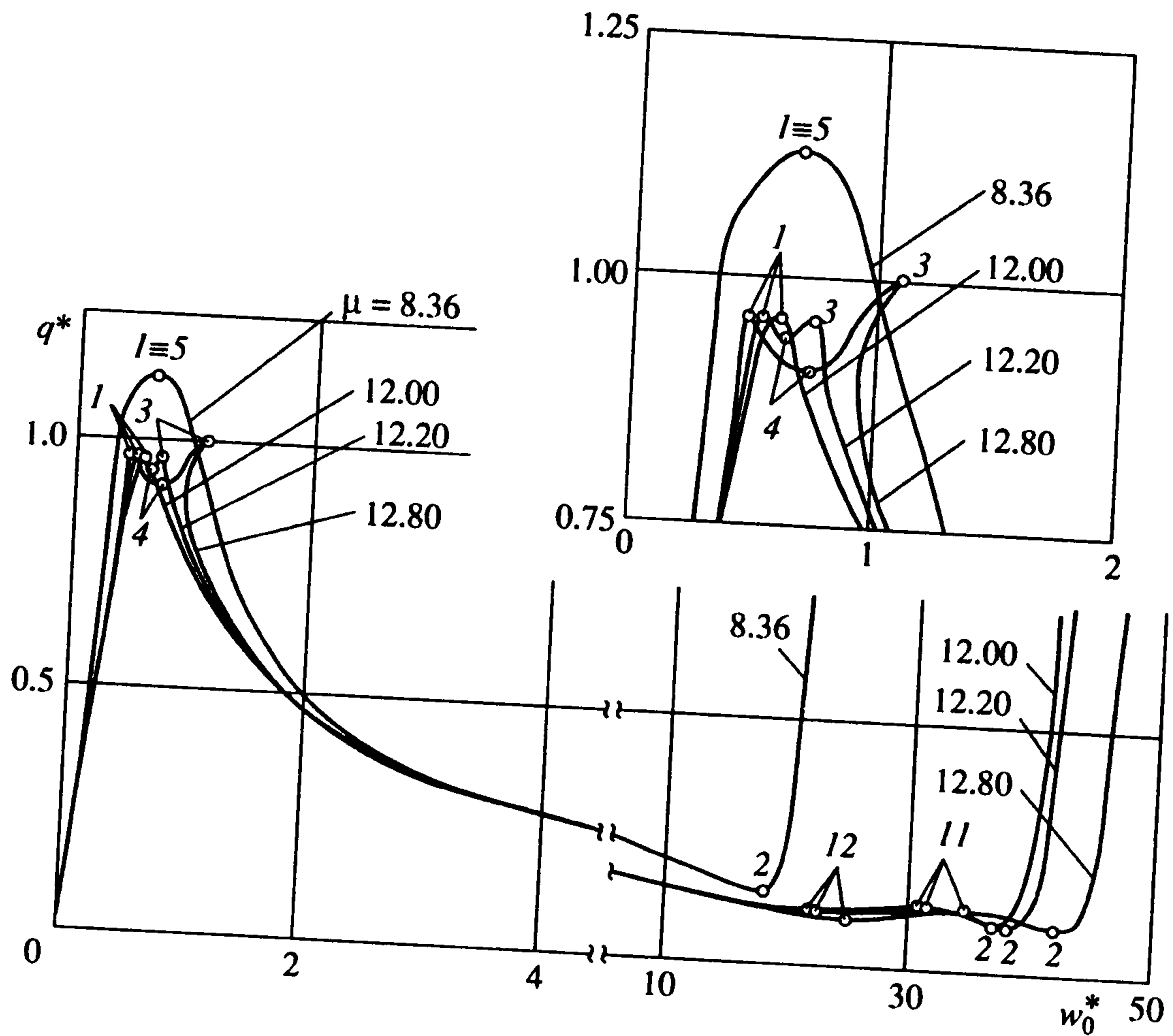
Фиг. 6

положить, что введение в расчет процесса деформирования купола начальной неправильности, пропорциональной форме его прогиба, соответствующей предельной точке 4, может заметно понизить значение первой верхней критической нагрузки и уменьшить в некоторой мере рассогласование между теоретическими и экспериментальными данными.

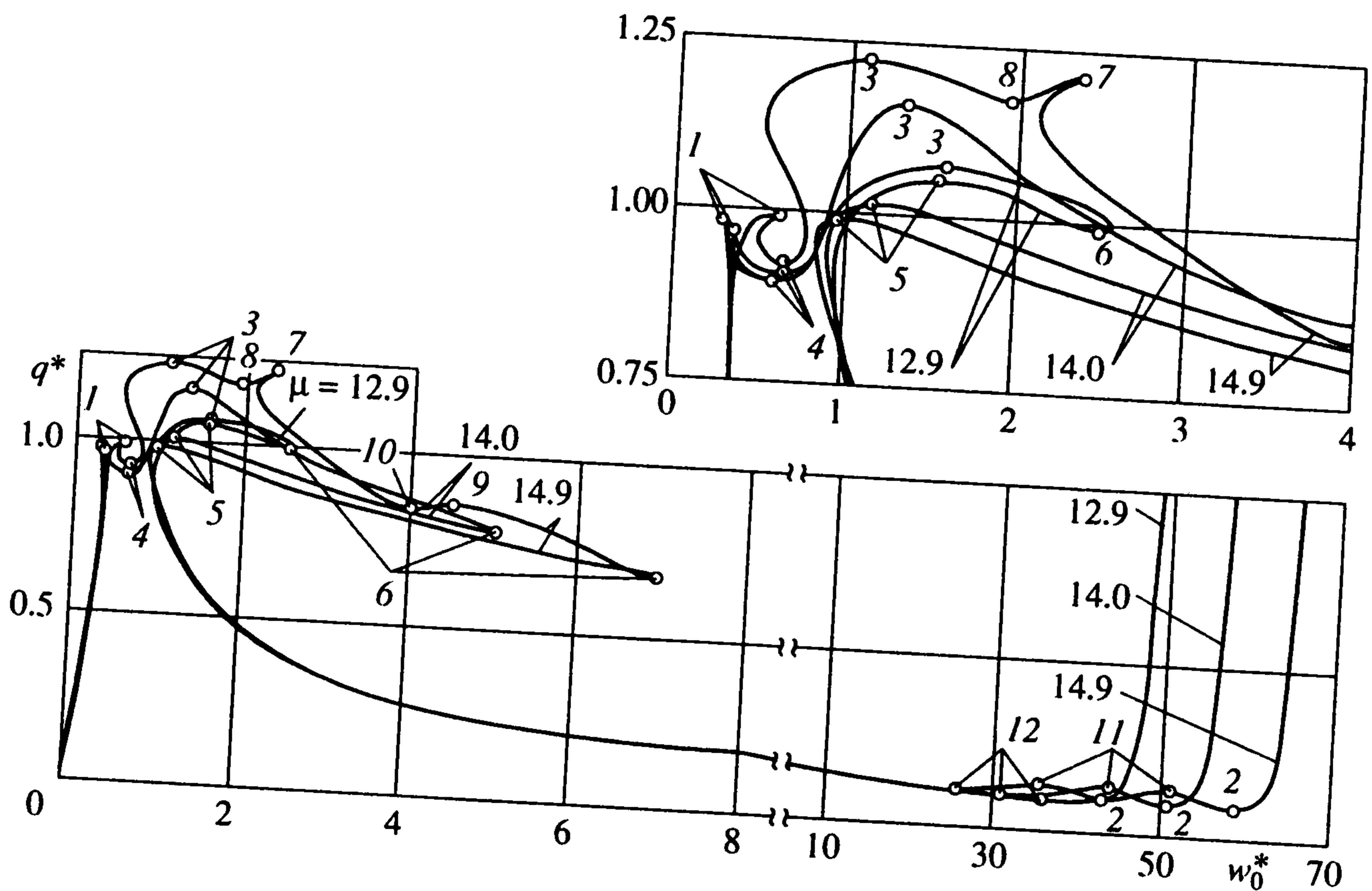
3. Точность определения критических нагрузок. Точность построения ТН сферического купола и определения его критических нагрузок определяется тремя обстоятельствами.

Во-первых, это степень адекватности математической модели купола реальным явлениям его нелинейного деформирования. В условиях упругого деформирования купола уравнения Маргерра для пологих оболочек конечного прогиба, используемые в этом расчете в качестве математической модели, считаются достаточно точными. Были попытки их уточнить, но правомерность этих уравнений ни разу не была подвергнута сомнению. Источниками погрешности в решении задачи описания процесса деформирования оболочки здесь являются квадратичный закон Кирхгоффа для представления деформаций ее срединной поверхности и предположение о ее пологости. Судя по оценкам [40, 41], эти погрешности для прогибов оболочки, меньших десяти толщин, и оболочек с углом раскрытия не более 22° не превышают 2...5%.

Во-вторых, на точность построения ТН сферического купола оказывает влияние точность метода дискретизации, т.е. метода Релея – Ритца. Она определяется точностью аппроксимации перемещений оболочки, которая может быть выяснена толь-



Фиг. 7



Фиг. 8

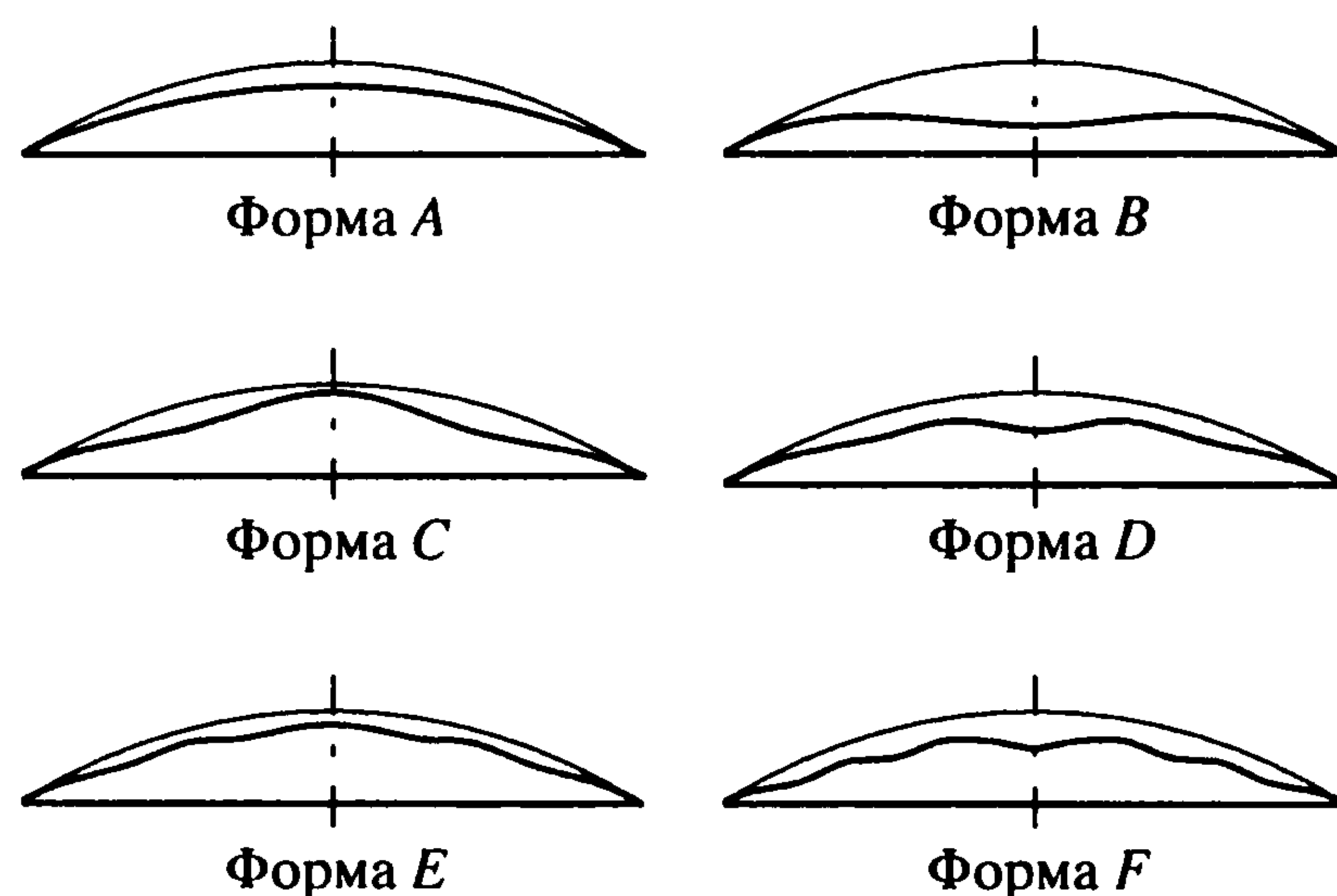
ко с помощью численного эксперимента. С этой целью для двух оболочек с параметрами тонкостенности $\mu = 8.35$ и $\mu = 14.90$, траектории которых (см. фиг. 6 и 8) являются наиболее разветвленными, были вычислены значения критических нагрузок, соответствующих их предельным точкам, при различном числе K членов в аппроксимирующих перемещения суммах (1.5). Результаты этих расчетов для не-

которых предельных точек ТН показаны в табл. 2. Прочерки в ней означают, что при значении количества членов K , которое указано в рассматриваемой строке, предельная точка, которой отведена данная колонка таблицы, отсутствует на ТН. Данные табл. 2 показывают, что четырнадцать членов в используемых суммах вполне достаточно для определения критических нагрузок сферического купола с параметром тонкостенности $\mu = 8.35$ с точностью до четырех значащих цифр, а для купола с параметром тонкостенности $\mu = 14.90$ – с точностью до трех значащих цифр. В первом случае относительная погрешность в определении критических нагрузок не превышает 0.01%, а во втором – 0.1%.

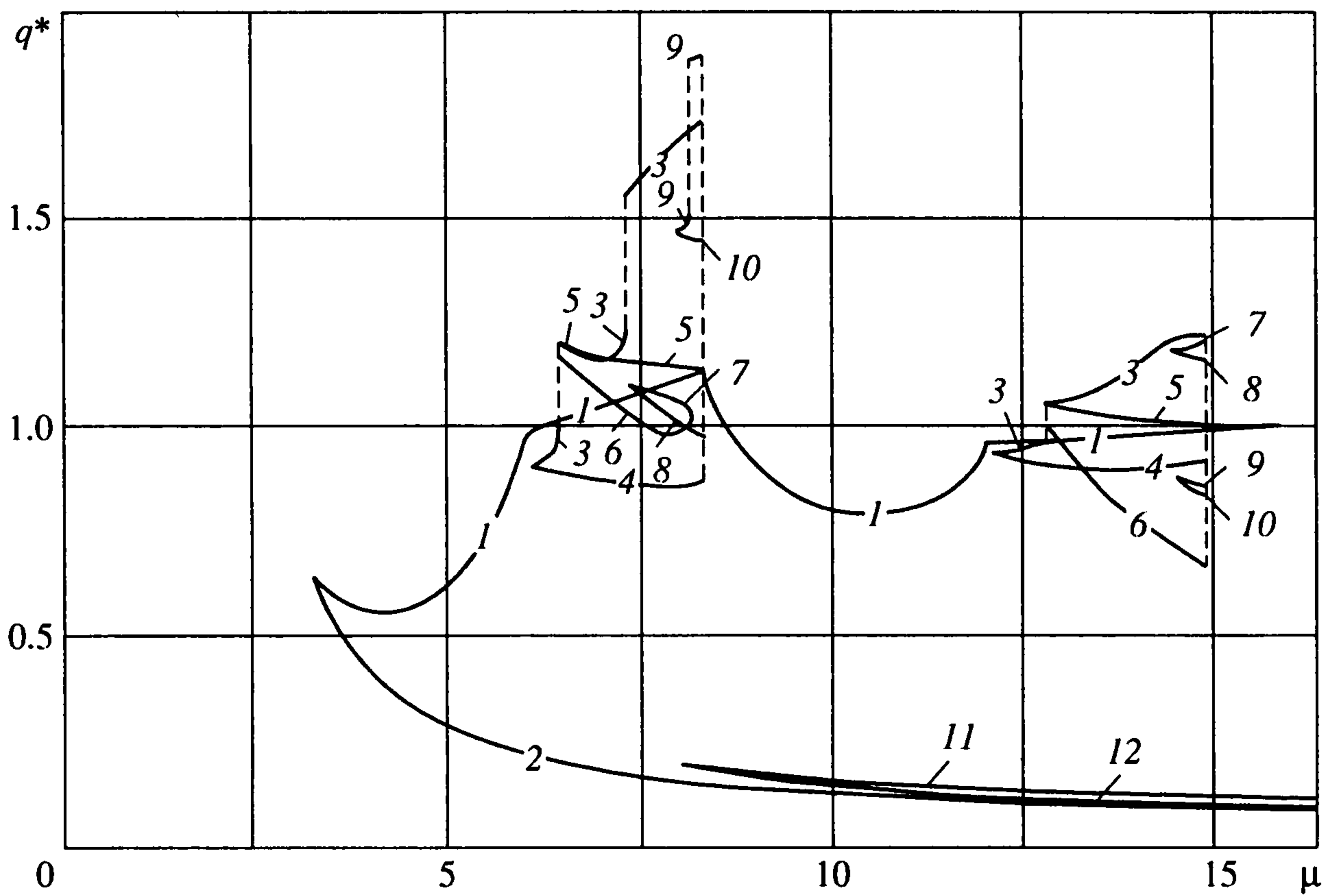
Третьим обстоятельством, определяющим точность нахождения критических нагрузок сферического купола, является точность решения системы нелинейных алгебраических уравнений равновесия (1.8) методом продолжения. Вычислительная основа реализации этого метода – формула Симпсона для вычисления определенных интегралов, метод Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений, метод Ньютона для решения систем нелинейных алгебраических уравнений и метод Кутты – Мерсона для решения задачи Коши. Погрешности применения формулы Симпсона

Таблица 1

μ	Номер предельной точки								
	1	3	4	5	6	7	8	9	10
3.50	<i>B</i>	–	–	–	–	–	–	–	–
5.00	<i>A</i>	–	–	–	–	–	–	–	–
6.10	<i>C</i>	–	–	–	–	–	–	–	–
6.50	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	–	–	–	–	–	–
6.55	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	–	–	–	–
7.40	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	–	–
7.45	<i>C</i>	<i>E</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	–	–
8.00	<i>C</i>	<i>E</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	–	–
8.10	<i>C</i>	<i>E</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>A</i>
8.20	<i>C</i>	<i>E</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	–	–	<i>D</i>	<i>A</i>	<i>C</i>
8.35	<i>C</i>	<i>E</i>	<i>C</i>	<i>C</i>	–	–	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>C</i>
8.36	<i>C</i>	<i>E</i>	–	–	–	–	–	–	–



Фиг. 9



Фиг. 10

Таблица 2

K	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_8
$\mu = 8.35$						
7	1.117	0.1562	—	—	—	—
8	1.131	0.1487	1.810	0.8674	1.144	0.9534
9	1.129	0.1470	1.830	0.8686	1.135	0.9805
10	1.130	0.1471	1.844	0.8681	1.134	0.9750
11	1.130	0.1471	1.737	0.8682	1.134	0.9754
12	1.130	0.1472	1.744	0.8682	1.135	0.9755
13	1.130	0.1472	1.741	0.8682	1.134	0.9754
14	1.130	0.1472	1.741	0.8683	1.134	0.9754
$\mu = 14.90$						
7	1.138	-0.2931	2.149	0.9637	—	—
8	1.014	-0.1549	1.239	0.6603	—	—
9	0.997	-0.0547	1.214	0.7773	—	—
10	0.998	0.0188	1.221	0.8624	0.9993	1.183
11	0.993	0.0656	1.225	0.9098	0.9949	1.179
12	0.993	0.0899	1.230	0.8995	0.9949	1.180
13	0.992	0.0878	1.214	0.9141	0.9939	1.171
14	0.992	0.0879	1.217	0.9144	0.9938	1.166

и метода Кутта – Мерсона при решении задачи контролируются двойным пересчетом по правилу Рунге и не превышают по относительной величине 10^{-6} для каждого интеграла в формуле Симпсона и для нормы решения в методе Кутта – Мерсона. Вектор невязок в методе Ньютона на последней итерации не превышает по своей норме величины, равной 10^{-5} от нормы решения. Метод Гаусса используется в расчетах в варианте, который реализует выбор главного элемента на каждом шаге прямого хода.

Его погрешность не контролируется. Но при вычислениях с семизначной разрядной сеткой для нее имеется оценка по норме решения $\epsilon \sim 10^{-6}n$, где n – порядок системы. В данном исследовании порядок системы не превышал тридцати, поэтому относительная погрешность метода Гаусса составляла величину, не превышающую 10^{-4} .

Подводя итог сказанному, можно утверждать, что данное решение задачи о геометрически нелинейном деформировании пологого, упругого сферического купола получено с относительной погрешностью, которая не превышает 5%.

4. Заключение. Изменяемость деформационной кривой пологого сферического купола в диапазоне относительных толщин его стенки $h/R \approx 1/20 \dots 1/200$ имеет эволюционный и скачкообразный характеры. Это связано с зарождением на ТН предельных точек, с их слиянием и последующим исчезновением, а также с присоединением изолированных петель к основной ветви ТН и отрывом их от нее. Эти явления происходят часто при достаточно малом изменении параметра тонкостенности купола, что подтверждает предположение о его высокой чувствительности к отклонениям от идеальности формы. Зависимость критических нагрузок, соответствующих предельным точкам ТН, от параметра тонкостенности оболочки описывается многозначной кривой, основная часть которой совпадает с известной, а дополнительные ветви показывают процессы зарождения и исчезновения предельных точек высших порядков. Некоторые из них описывают значения критических нагрузок меньшие, чем верхняя критическая нагрузка. Этот факт может оказаться полезным при расчете деформирования купола с учетом его начальных неправильностей формы.

Работа выполнена при поддержке Конкурсного центра фундаментального естествознания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Timoshenko S.* Buckling of flat curved bars and slightly curved plates // *J. Appl. Mech.* 1935. V. 2. № 1. P. 17–20. = Выпучивание пологих стержней и слегка искривленных пластин. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 662–669.
2. *Timoshenko S.* Analysis of bi-metal thermostats // *J. Optical Soc. of Amer. and Rev. of Sci. Instruments.* 1925. V. 11. № 3. P. 233–255 = Расчет биметаллических термостатов. *Тимошенко С.П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 534–552.
3. *Бубнов И.Г.* Напряжения в обшивке судов от давления воды // *Морской сб.* 1902. Т. 311, № 8. С. 117–141; Т. 312, № 9. С. 111–139; № 10. С. 119–138; Т. 313, № 12. С. 107–130.
4. *Boobnoff I.G.* On the stresses in a ship's bottom plating due to water pressure // *Trans. Inst. Naval Arch.* 1902. V. 44, March. P. 15–46; 51–52.
5. *Karman Th. von, Tsien S.* The buckling of spherical shells by external pressure // *J. Aeronaut. Sci.* 1939. V. 7, № 2. P. 43–50.
6. *Marguerre K.* Zur Theorie der gerkrümmten Platte großer Formänderung // *Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech.* Cambridge, Massachusetts, 1938. New York: Wiley, 1939. P. 93–101.
7. *Föppl A.* Vorlesungen über technische Mechanik. Bd. 5. Die wichtigsten Lehren der höheren Elastizitätstheorie. Leipzig: B.G. Teubner, 1907. 391 S. (см. S. 132–144).
8. *Karman Th.* Festigkeitsprobleme im Maschinenbau // *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.* Leipzig: B.G. Teubner, 1910. Bd 4. S.348–352.
9. *Феодосьев В.И.* К расчету хлопающей мембраны // *ПММ.* 1946. Т. 10. Вып. 2. С. 295–300.
10. *Reissner E.* On axisymmetrical deformation of thin shells of revolution // *Proc. 3rd Sympos. Appl. Math.* N.Y.: McGraw-Hill, 1950. V. 3. P. 27–52.
11. *Reiss E.L.* On the nonlinear buckling of shallow spherical domes // *J. Aeronaut. Sci.* 1956. V. 23, № 10. P. 973–975.
12. *Simons R.M.* A power series solution of the nonlinear equations for axi-symmetrical bending of shallow spherical shells // *J. Math. and Phys.* 1956. V. 35, № 2. P. 164–176.
13. *Reiss E.L., Greenberg H. J., Keller H.B.* Nonlinear deflections of shallow spherical shells // *J. Aeronaut. Sci.* 1957. V. 24, № 7. P. 533–543.
14. *Weinitschke H.J.* On the nonlinear theory of shallow spherical shells // *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 1958. V. 6. № 2. P. 209–232.

15. *Archer R.R.* Stability limits for a clamped spherical shell segment under uniform pressure // *Quart. Appl. Math.* 1958. V. 15, № 4. P. 355–366.
16. *Budiansky B.* Buckling of clamped shallow spherical shells // *Proc. Symp. on the Theory of Thin Elastic Shells.* Delft: 1959. Amsterdam: North-Holland, 1960. P. 64–94.
17. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с. = *Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S.* Theory of plates and shells. N.Y. etc.: McGraw-Hill, 1959.
18. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.
19. *Григолюк Э.И., Кабанов В.В.* Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 359 с.
20. *Karman Th. von, Kerr A.D.* Instability of spherical shells subjected to external pressure // *Topics Appl. Mech.* Amsterdam, etc.: 1965. P. 1–22.
21. *Сунагава Мэгуми, Кумаи Нори.* Сопротивление элементов конструкций динамическому нагружению // *J. Jap. Soc. Aeronaut. and Space Sci.* 1970. V. 18, № 195. P. 154–166.
22. *Bach C.* Die Widerschtaendfähigkeit kugelförmiger Wandung gegenüber äusserem über-druck // *Z. Vereines deutscher Ingenieur.* 1902. Bd 46. H. 10. S. 333–341.
23. *Tsien H.-S.* A theory for the buckling of thin shells // *J. Aeronaut. Sci.* 1942. V. 9, № 10. P. 373–384.
24. *Klöppel K., Jungbluth O.* Beitrag zum Durchschlagsproblem dünnwandiger Kugelschalen (Versuche und Bemessungsformeln) // *Der Stahlbau.* 1953. Bd 22. H. 6. S. 121–130.
25. *Kaplan A., Fung Y.C.* A nonlinear theory of bending and buckling of thin shallow spherical shells // *NACA Techn. Notes.* 1954. № 3212. 58 p.
26. *Homewood R.H., Brine A.C., Johnson A.E.* Experimental investigation of the buckling instability of monocoque shells // *Proc. Soc. Expt. Stress Analysis.* New York: 1963. V. 18, № 1. P. 88–96.
27. *Krenzke M.A., Kiernan T.J.* Elastic stability of near perfect shallow spherical shells // *AIAA Journal.* 1963. V. 1, № 12. P. 2855–2857.
28. *Adam H.P., King P.A.* Experimental investigation of the stability of monocoque domes subjected to external pressure // *Experim. Mech.* 1965. V. 5. № 10. P. 313–320.
29. *Sunakawa M., Ichida K.* A high precision experiment on the buckling of spherical caps subjected to external pressure // *Report Inst. Space and Aeronaut. Sci. Univ. Tokyo.* Tokyo, 1974. V. 3. № 508. P. 87–121.
30. *Galletly G.D.* On the buckling of shallow spherical caps subjected to uniform external pressure // *AIAA J.* 1976. V. 14, № 9. P. 1331–1333.
31. *Григолюк Э.И., Мамай В.И.* Механика деформирования сферических оболочек. М.: Изд-во МГУ, 1983. 114 с.
32. *Weinitschke H.* On the stability problem for shallow spherical shells // *J. Math. and Phys.* 1960. V. 38, № 4. P. 209–231.
33. *Thurston G.A.* A numerical solution of the nonlinear equations for axisymmetric bending of shallow spherical shells // *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.* 1961. V. 28, № 4. P. 557–562.
34. *Шилькрут Д.И., Шевандронов Н.В., Морар В.П., Максимов Ю.А.* Решение задач нелинейной теории оболочек на аналоговых вычислительных машинах. Кишинев: Изд-во АН МолдССР, 1969. 144 с.
35. *Bauer L., Reiss E.L., Keller H.B.* Axisymmetric buckling of rigidly clamped hemispherical shells // *Intern. J. Non-Linear Mech.* 1973. V. 8. № 1. P. 31–39.
36. *Валишвили Н.В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
37. *Mescall J.* Numerical solutions of nonlinear equations for shells of revolution // *AIAA Journal.* 1966. V. 4, № 11. P. 2041–2043.
38. *Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А.* О методе непрерывного продолжения по параметру // *Докл. РАН.* 1994. Т. 335, № 5. С. 582–585.
39. *Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А.* Об одной модификации метода дискретного продолжения по параметру // *ПМТФ.* 1990. № 5. С. 95–99.
40. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.; *Власов В.З.* Избранные труды. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 528 с.
41. *Муштари Х.М., Галимов К.З.* Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 432 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.1.2001