УДК 539.3

© 2002 г. **Г.А. Капанадзе**

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПЛАСТИНКИ ДЛЯ ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ, ОГРАНИЧЕННОЙ МНОГОУГОЛЬНИКАМИ

Рассматривается задача изгиба изотропной упругой пластинки, ограниченной двумя выпуклыми многоугольниками. Предполагается, что внутренняя граница пластинки шарнирно оперта, а на каждое звено внешнего контура действуют нормальные изгибающие моменты таким образом, что угол поворота средней поверхности пластинки – кусочно-постоянная функция. Относительно комплексных потенциалов, выражающих прогибы средней поверхности (формула Гурса), задача сведена к граничной задаче Римана – Гильберта для кругового кольца, решение которой построено в аналитической форме. Приведены оценки поведения этих потенциалов в окрестности угловых точек.

1. Постановка задачи. Пусть S – двусвязная область на плоскости z комплексной переменной, ограниченная выпуклыми многоугольниками A и B. Будем считать A внешней, а B внутренней границей области S и обозначим через A_j ($j = 1, \ldots, q$) и B_j ($j = 1, \ldots, p$) вершины (и их аффиксы), а через $L_0^{(k)}$ и $L_1^{(k)}$ – стороны многоугольников A и B. Величины внутренних углов области S при вершинах A_j и B_j обозначим через $\pi\alpha_j^0$ и $\pi\beta_j^0$, а углы между осью x и внешними нормалями к контурам L_1 и L_0 – через $\beta(t)$ и $\alpha(t)$. Положительным направлением на $L = L_0 \cup L_1 (L_0 = \bigcup L_0^{(k)}$, $L_1 = \bigcup L_1^{(k)})$ будем считать то, которое оставляет область S слева.

Предположим, что на каждом звене границы L_0 прикреплена жесткая планка и пластинка изгибается нормальными моментами, приложенными к планкам таким образом, что углы поворота средней поверхности пластинки принимают кусочно-постоянные значения, а контур L_1 шарнирно оперт.

Рассмотрим задачу: найти прогиб $w(x, u)$ средней поверхности пластинки, если на каждом звене граничного контура L_0 известны значения главного изгибающего момента M_n.

2. Некоторые вспомогательные предложения.

Задача Дирихле для кругового кольца. Пусть D $(1 < |z| < R)$ – круговое кольцо, ограниченное окружностями $l_0 (|z| = R)$ и l_1 $(|z| = 1)$. Рассмотрим задачу: найти голоморфную в кольце D функцию $\varphi(z) = u + iv$ по граничному условию

$$\operatorname{Re}[\varphi(t)] = f_j(t), \quad t \in l_j, \quad j = 0, 1 \tag{2.1}$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (2.1) имеет вид

$$\int_0^{2\pi} f_0(t) d\vartheta = \int_0^{2\pi} f_1(t) d\vartheta \tag{2.2}$$

а само решение дается формулой

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\int_{l_0} \frac{f_0(t)}{t - R^{2j} z} dt + \int_{l_1} \frac{f_1(t)}{t - R^{2j} z} dt \right] + ic_1 + c_2, \quad c_2 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f_1(t) d\vartheta \tag{2.3}$$

где c_1 – произвольная действительная постоянная.

Конформное отображение двусвязной области, ограниченной многоугольниками, на круговое кольцо. Пусть S – двусвязная область, рассмотрения выше. Рассмотрим задачу: найти вид функции $z = \omega(\zeta)$, конформно отображающей круговое кольцо $D(1 < |\zeta| < R)$ на область S.

Производная функции $\omega(\zeta)$ представляет собой решение задачи Римана – Гильберта для кругового кольца D [1]

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}[i\,te^{-i\alpha(t)}\,\omega'(t)] = 0, \quad t \in l_0(|\zeta| = R) \\ &\mathrm{Re}[i\,te^{-i\beta(t)}\,\omega'(t)] = 0, \quad t \in l_1(|\zeta| = 1) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Необходимое условие разрешимости этой задачи в классе $h(b_1, \ldots, b_p)$ (об этом классе см. [2]) имеет вид

$$\prod_{k=1}^{q} R^2 a_k^{\alpha_k^0 - 1} \prod_{j=1}^{p} b_j^{\beta_j^0 - 1} = 1 \tag{2.5}$$

(a_k и b_k – прообразы точек A_k и B_k), а само решение данного класса дается формулой

$$\begin{aligned} \omega'(\zeta) = k^0 \prod_{k=1}^{q} \left(1 - \frac{\zeta}{a_k}\right)^{\alpha_k^0 - 1} \prod_{k=1}^{q} b_k^{(1-\beta_k^0)/2} \left(1 - \frac{b_k}{\zeta}\right)^{\beta_k^0 - 1} \times \\ \times \prod_{j=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{q} \left(1 - \frac{\zeta}{R^{2j}\alpha_k}\right)^{\alpha_k^0 - 1} \left(1 - \frac{a_k}{R^{2j}\zeta}\right)^{\alpha_k^0 - 1} \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{\zeta}{R^{2j} b_k}\right)^{\beta_k^0 - 1} \left(1 - \frac{b_k}{R^{2j}\zeta}\right)^{\beta_k^0 - 1} \end{aligned} \tag{2.6}$$

где k^0 – произвольная действительная постоянная.

3. Решение задачи. Согласно приближенной теории изгиба пластинки, прогиб $w(x, y)$ средней поверхности в рассматриваемом случае удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 w(x, y) = 0, \quad z = x + iy \in S \tag{3.1}$$

и граничным условиям

$$M_n(t) = f(t); \ \partial w / \partial s = 0, \ t \in L_0; \ w(t) = 0, \ M_n(t) = 0, \ t \in L_1 \tag{3.2}$$

На основании известных формул [2–4] имеем

$$\begin{aligned} &w(x, y) = \mathrm{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi_0(z)], \quad z \in S \\ &\frac{\partial w}{\partial n} + i\frac{\partial w}{\partial s} = e^{-i\nu(t)}[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}] \\ &2D_0(\sigma - 1)d[\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}] = \left[M_n(t) + i\int_0^s N(t)ds + ic\right]dt \\ &\psi(z) = \chi_0'(z), \ \nu(t) = a(t), \ t \in L_0, \ \nu(t) = \beta(t), \ t \in L_1; \ \varkappa = (\sigma + 3)(1 - \sigma)^{-1} \end{aligned} \tag{3.3}$$

где D_0 – цилиндрическая жесткость пластинки, σ – коэффициент Пуассона, N – перерезывающая сила, c – действительная постоянная.

В силу условия (3.2) и формулы (3.3) относительно искомых функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ получаем задачу

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}[ie^{-i\nu(t)}(\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)})] = 0 \\ &\mathrm{Re}[ie^{-i\nu(t)}(\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)})] = F_j^*, \quad t \in L_j, \ j = 0, 1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$F_1^*(t) = c^{(1)}(t), \ t \in L_1; \ F_0^*(t) = [2D_0(\sigma - 1)]^{-1} \int_0^s M_n(t) ds + c^{(0)}(t), \ t \in L_0$$

$$c^{(1)}(t) = c_k^{(1)} = \text{const}, \ t \in L_k^{(1)}, \ c^{(0)}(t) = c_k^{(0)} = \text{const}, \ t \in L_0^{(k)}$$

Постоянные $c_k^{(j)}$ $(j = 0, 1)$ заранее неизвестны и должны быть определены в ходе решения задачи таким образом, чтобы функции $\varphi(z)$ и $\bar{z}\varphi'(z) + \psi(z)$ были непрерывно продолжены в области $S + L$.

Граничные условия (3.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}[ie^{-i\nu(t)}\varphi(t)] = F_j(t) \\ &\operatorname{Re}[ie^{-i\nu(t)}(\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)})] = 0, \ t \in L_j, \ j = 0,1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

где $F_j(t) = [\varkappa + 1]^{-1} F_j^*(t), \ j = 0,1$.

Пусть функция $z = \omega(\zeta)$ конформно отображает круговое кольцо $D(1 < |\zeta| < R)$ на область S. Будем считать, что контур l_0 $(|\zeta| = R)$ переходит в L_0, а контур l_1 $(|\zeta| = 1)$ – в L_1. Обозначим через a_k и b_k прообразы точек A_k и B_k.

Обозначая $\varphi(z) = \varphi[\omega(\zeta)] = \varphi_0(\zeta)$, из граничных условий (3.5) относительно функции $\chi(\zeta) = \zeta^{-1}\varphi_0(\zeta)$ получаем граничную задачу Римана – Гильберта для кругового кольца D

$$\operatorname{Re}[i\sigma e^{-i\nu(\sigma)}\chi(\sigma)] = \Psi_j(\sigma), \ \sigma \in L_j, \ j = 0, 1; \ \Psi_j(\sigma) = F_j[\omega(\sigma)] \tag{3.6}$$

Рассмотрим однородную задачу, соответствующую задаче (3.6) при $\Psi_j(\sigma) \equiv 0$. Она имеет вид задачи (2.4), и, таким образом, решение этой однородной задачи класса $h(b_1, \ldots, b_p)$ имеет вид $\chi^0(\zeta) = \omega'(\zeta)$, причем функция $\omega'(\zeta)$ определена формулой (2.6).

Таким образом, функцию $e^{2i\nu(\sigma)}$ можно представить в виде

$$e^{2i\nu(\sigma)} = \sigma\omega'(\sigma) \ [\overline{\sigma\omega'(\sigma)}]^{-1}, \ \sigma \in l_j, \ j = 0,1$$

Теперь граничные условия (3.6) можно записать в виде

$$\Omega(\sigma) - \overline{\Omega(\sigma)} = \Theta_j(\sigma), \ \sigma \in l_j, \ j = 0,1 \tag{3.7}$$

где

$$\Omega(\zeta) = \varphi_0(\zeta)[\zeta\omega'(\zeta)]^{-1}, \ \Theta_j(\sigma) = -2ie^{i\nu(\sigma)}[\sigma\omega'(\sigma)]^{-1}\Psi_j(\sigma), \ j = 0,1$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (3.7) имеет вид

$$\int_0^{2\pi} \Theta_1(e^{i\vartheta}) d\vartheta = \int_0^{2\pi} \Theta_2(\mathrm{R}e^{i\vartheta}) d\vartheta \tag{3.8}$$

а само решение дается формулой

$$\Omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{1} K(\zeta; t)\Theta_j(t) dt + c_0^{**}, \ K(\zeta; t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t - R^{2k}\zeta} \tag{3.9}$$

где c_0^{**} – действительная постоянная.

Таким образом, решение задачи (3.5) имеет вид

$$\varphi_0(\zeta)=\Omega(\zeta)\zeta\omega'(\zeta)=-\frac{\zeta\omega'(\zeta)}{\pi(\varkappa+1)}\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k(\zeta)+c_0^* \tag{3.10}$$

$$I_k(\zeta)=\int_{l_1}\frac{e^{i\beta(\sigma)}c^{(1)}(\sigma)}{(\sigma-R^{2k}\zeta)\sigma\omega'(\sigma)}d\sigma+\int_{l_0}\frac{e^{i\alpha(\sigma)}[f_0(\sigma)+c^{(0)}(\sigma)]}{(\sigma-R^{2k}\zeta)\sigma\omega'(\sigma)}d\sigma$$

$$f_0(\sigma)=[2D_0(\sigma-1)]^{-1}\int_0^s M_n(t)ds,\;\; c_0^*=-c_0^{**}\pi(\varkappa+1)$$

Условие (3.6) записывается в виде

$$\int_{l_1}\frac{e^{i\beta(\sigma)}c^{(1)}(\sigma)}{\sigma^2\omega'(\sigma)}d\sigma+\int_{l_0}\frac{e^{i\alpha(\sigma)}[f_0(\sigma)+c^{(0)}(\sigma)]}{\sigma^2\omega'(\sigma)}d\sigma=0$$

Так как функция $\omega'(\zeta)$ в точках a_k имеет особенности вида $|\zeta-a_k|^{\alpha_k^{0}-1}$, то для непрерывной продолжимости функции $\varphi_0(\zeta)$ в область $D+l$ необходимо и достаточно выполнения условий

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k(a_j)+c_0^*=0,\quad j=1,\ldots,q \tag{3.11}$$

На основании известных результатов ([2], § 26) относительно поведения интеграла типа Коши вблизи точек разрыва плотности, доказывается, что при выполнении условий (3.11) функция $\varphi'(z)=\varphi_0'(\zeta)[\omega'(\zeta)]^{-1}$ вблизи точек $B_k(k=1,\ldots,p)$ удовлетворяет условию

$$|\varphi'(z)|<M|z-B_k|^{-1/\beta_k^{0}},\quad k=1,\ldots,p,\quad M=\text{const}$$

и вблизи точек $A_k(k=1,\ldots,q)$ она ограничена. Аналогично для функции $\varphi''(z)$ справедливы оценки

$$|\varphi''(z)|<M|z-B_k|^{-1-1/\beta_k^{0}},\quad k=1,\ldots,p$$

$$|\varphi''(z)|<M|z-A_k|^{1/\alpha_k^{0}-2},\quad k=1,\ldots,q$$

Перейдем к отысканию функции $\psi(z)$. Для этого воспользуемся условиями (3.5), которые запишем в виде [5]

$$\operatorname{Re}[ie^{i\nu(t)}(\psi(t)+P(t)\varphi'(t)]=\Gamma_j(t),\quad t\in L_j,\quad j=0,1 \tag{3.12}$$

где

$$\Gamma_j(t)=\operatorname{Re}[ie^{i\nu(t)}(\bar t-P(t)\varphi'(t)],\quad t\in L_j,\quad j=0,1$$

$P(t)$ – интерполяционный полином, удовлетворяющий условию $P(B_k)=\overline{B}_k(k=1,\ldots,p,$ $\overline{B}_k$ – сопряженное с B_k число).

Так как функции $\Gamma_j(t),\ t\in L_j(j=0,1)$ ограничены, задача отыскания функции $\psi(z)$ сводится к задаче, изученной выше. Решение задачи (3.12) можно построить аналогично предыдущему, а условия разрешимости этой задачи (требования непрерывной продолжимости функции $\psi(z)+P(z)\varphi'(z)$) будут иметь вид, аналогичный условиям (2.10) и (2.11). Все эти условия представятся как неоднородная система с действительными коэффициентами относительно постоянных c_1^*, $c_k^{(1)}(k=1,\ldots,p)$ и c_0^*, $c_k^{(0)}(k=1,\ldots,q)$ (c_1^* – действительная постоянная, которая появляется при решении задачи (2.12)). Доказывается, что упомянутая система имеет единственное решение, и, таким образом, поставленная задача однозначно разрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kapanadze G.* Conformal mapping of doubly-connected domain bounded by broken lines on circular ring // Bull. Georgian Academy Sci. 1999. V. 160. № 3. P. 435–437.
2. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
3. *Лехницкий С.Г.* О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит // ПММ. 1938. Т. 2. Вып. 2. С. 181–210.
4. *Фридман М.М.* О некоторых задачах теории изгиба тонких изотропных плит // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 1. С. 93–102.
5. *Банцури Р.Д.* Решение третьей основной задачи теории упругости для двухсвязных областей, ограниченных ломаными // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243. № 4. С. 882–885.

Тбилиси
e-mail: svanadze@gol.g e

Поступила в редакцию
12.VII.2001