

УДК 539.3:534.1

© 2002 г. Ю.Н. Санкин, А.Е. Трифанов

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ ВНЕЗАПНОМ НАГРУЖЕНИИ

Предлагается частотный метод решения задачи о колебаниях оболочек вращения с учетом рассеяния энергии при произвольном силовом нагружении и при соударении с жестким препятствием. Уравнение колебаний оболочки вращения при ненулевых начальных условиях преобразуется по Лапласу. Для полученного неоднородного дифференциального уравнения вариационным методом решается краевая задача, заключающаяся в нахождении преобразованных по Лапласу краевых поперечных и продольных сил и изгибающих моментов как функций краевых перемещений. Затем составляются уравнения равновесия узлов, т.е. соответствующие уравнения метода конечных элементов, причем используются полученные ранее результаты [1–4]. Построены амплитудно-фазочастотные характеристики (АФЧХ) для выбранных сечений оболочки. Обратное преобразование Лапласа осуществляется с использованием однозначной связи между экстремальными точками АФЧХ и коэффициентами соответствующих членов ряда в разложении по формам колебаний [3]. В связи с тем что предлагаемый подход является приближенным, применяется численное тестирование.

Аналогичным методом была решена задача о продольных колебаниях упругих стержней ступенчато-переменного сечения при соударении с жестким препятствием [5]. Ниже, в отличие от изложенной ранее процедуры [5], коэффициенты матрицы масс и матрицы жесткостей получены из вариационных соображений.

Уравнения динамики линейной вязкоупругой системы в операторной форме можно записать следующим образом:

$$D\sigma + R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + T \frac{\partial u}{\partial t} - f = 0, \quad CD^*u + C_1 D^* \frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \quad (1)$$

Здесь σ – вектор обобщенных сил или тензор напряжений, u – вектор обобщенных смещений, R – матрица инерционных характеристик или удельная масса, T – матрица внешнего рассеяния энергии, f – вектор-функция внешних нагрузок, C и C_1 – соответственно матрицы или тензоры упругих постоянных и коэффициентов внутреннего трения.

Граничные условия примем в виде

$$n_\sigma \sigma = f_S \text{ на } S_1, \quad n_u u = u_S \text{ на } S_2 \quad (2)$$

где n_σ и n_u – соответствующие операторы статической и геометрической совместности на поверхности тела, f_S – нагрузки на участке поверхности S_1 , u_S – граничные перемещения на S_2 .

Запишем условия совместности на границах конечных элементов

$$n_{\sigma+} \sigma_+ + n_{\sigma-} \sigma_- = 0 \text{ на } S'_1, \quad n_{u+} u_+ = n_{u-} u_- \text{ на } S_2 \quad (3)$$

Индексы плюс и минус соответствуют разным сторонам границы сопряжения элементов $S' = S'_1 \cup S'_2$.

Начальные условия примем в виде

$$t = 0: u = a_0, \quad \partial u / \partial t = a_1 \quad (4)$$

где a_0, a_1 – соответственно поля начальных перемещений и начальных скоростей.

Операторы D и D^* сопряженные в смысле Лагранжа, т.е.

$$\int_V (D\sigma)^T u dV = \int_V \sigma^T D^* u dV - \int_S \sigma_S^T u_S dS \quad (5)$$

где $\sigma_S = n_\sigma \sigma$, $u_S = n_u u$, V – объем конечного элемента. В общем случае граница элемента $S = S_1 \cup S_2 \cup S'_1 \cup S'_2$.

Операторные уравнения (1), граничные условия (2) и условие совместности (3) справедливы для стержней, пластин и оболочек. Поэтому обсуждаемые здесь методы универсальны для всех прикладных задач линейной вязкоупругости [6].

Преобразуем по Лапласу уравнение (1), граничные условия (2) и условия совместности (3)

$$D\sigma + R(p^2 - pa_0 - a_1) + T(pu - a_0) - f = 0, \quad (C + C_1 p)D^* u - C_1 D^* a_0 = \sigma \quad (6)$$

$$n_\sigma \sigma = f_S \text{ на } S_1, \quad n_u u = u_S \text{ на } S_2 \quad (7)$$

$$n_{\sigma+} \sigma_+ + n_{\sigma-} \sigma_- = n_\sigma \sigma' \text{ на } S'_1, \quad n_{u+} u_+ - n_{u-} u_- = n_u u' = 0 \text{ на } S'_2 \quad (8)$$

Здесь

$$u = u(p), \quad u(p) = \int_0^\infty u(t) e^{-pt} dt; \quad \sigma = \sigma(p), \quad \sigma(p) = \int_0^\infty \sigma(t) e^{-pt} dt$$

Справедлива следующая теорема [3], обобщающая результаты работ [1, 2] на задачи вязкоупругости: уравнения (6), граничные условия (7) и условия совместности (8) для обобщенных перемещений и обобщенных сил вязкоупругого тела, преобразованных по Лапласу, эквивалентны условию стационарности следующего функционала:

$$\begin{aligned} e(p) = & \frac{1}{2} \int_V [D\sigma + p^2 Ru + pTu - 2(f + pRa_0 + Ra_1 + Ta_0)]^T u dV + \\ & + \frac{1}{2} \int_V \sigma^T (D^* u - C^{*-1} \sigma - 2C^{*-1} C_1 D^* a_0) dV + \frac{1}{2} \int_{S_1} (n_\sigma \sigma - 2f_S)^T n_u u dS_1 - \\ & - \frac{1}{2} \int_{S_2} (n_\sigma \sigma)^T (n_u u - 2u_S) dS_2 + \frac{1}{2} \int_{S'_1} (n_\sigma \sigma')^T n_u u dS'_1 - \frac{1}{2} \int_{S'_2} (n_\sigma \sigma)^T n_u u' dS'_2 \end{aligned} \quad (9)$$

где $C^* = C + C_1 p$, V – объем элементов, на которые разбито тело. Здесь символ суммирования по элементам опущен.

Рассмотрим одно поле перемещений. Следуя вариационному методу, будем искать решение в форме

$$u = \sum_j \mu_j u_j, \quad \sigma = \sum_j \mu_j C^* D^* u_j + C_1 D^* a_0 \quad (10)$$

Вариации u и σ будут иметь вид

$$\delta u = \sum_j \delta \mu_j u_j, \quad \delta \sigma = \sum_j \delta \mu_j C^* D^* u_j, \quad \delta u(p) = \int_0^\infty \delta u(t) e^{-pt} dt \quad (11)$$

где u_j – соответствующие координатные функции, удовлетворяющие условиям совместности на границе элемента, вариация u понимается в указанном выше смысле.

Варьируя функционал (9), выполнив второе уравнение (6), т.е. закон вязкоупругости, и, удовлетворяя условиям совместности деформаций на границе между элементами, принимая во внимание соотношения (5), (10), (11), получим

$$\int_V \{ (C^* D^* u - C_1 D^* a_0)^T + [p^2 Ru + pTu - (f + pRa_0 + Ra_1 + Ta_0)]^T \} u_j dV - \int_{S_1} f_S^T n_{ij} u_j dS_1 = 0, \quad j = 1, \dots, l \quad (12)$$

где l – число степеней свободы конечного элемента.

Уравнения (12) – обобщенная форма уравнений метода конечных элементов, основанного на узловых перемещениях. Число таких уравнений равно числу узловых перемещений, или, иными словами, числу степеней свободы N дискретной модели.

Из уравнения (12) получаем соответствующие выражения для элементов матриц жесткостей, рассеяния энергии, масс и нагрузочных членов

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \int_V (CD^* u_i)^T D^* u_j dV, \quad C_{1ij} = \int_V (C_1 D^* u_i)^T D^* u_j dV, \quad T_{ij} = \int_V (Tu_i)^T u_j dV \\ R_{ij} &= \int_V (Ru_i)^T u_j dV, \quad f_j = \int_V (f + pRa_0 + Ra_1 + Ta_0)^T u_j dV + \\ &+ \int_V (CD^* a_0)^T D^* u_j dV + \int_{S_1} f_S^T u_j dS_1 = f_j(p) + f_{1j} + f_{2j}p \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь C – матрица упругих постоянных

$$C = \begin{Bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{Bmatrix}, \quad B_k = \begin{Bmatrix} b_k & b_k \mu & 0 \\ b_k \mu & b_k & 0 \\ 0 & 0 & b_k \frac{1-\mu}{2} \end{Bmatrix}, \quad k = 1, 2$$

$$b_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}, \quad b_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

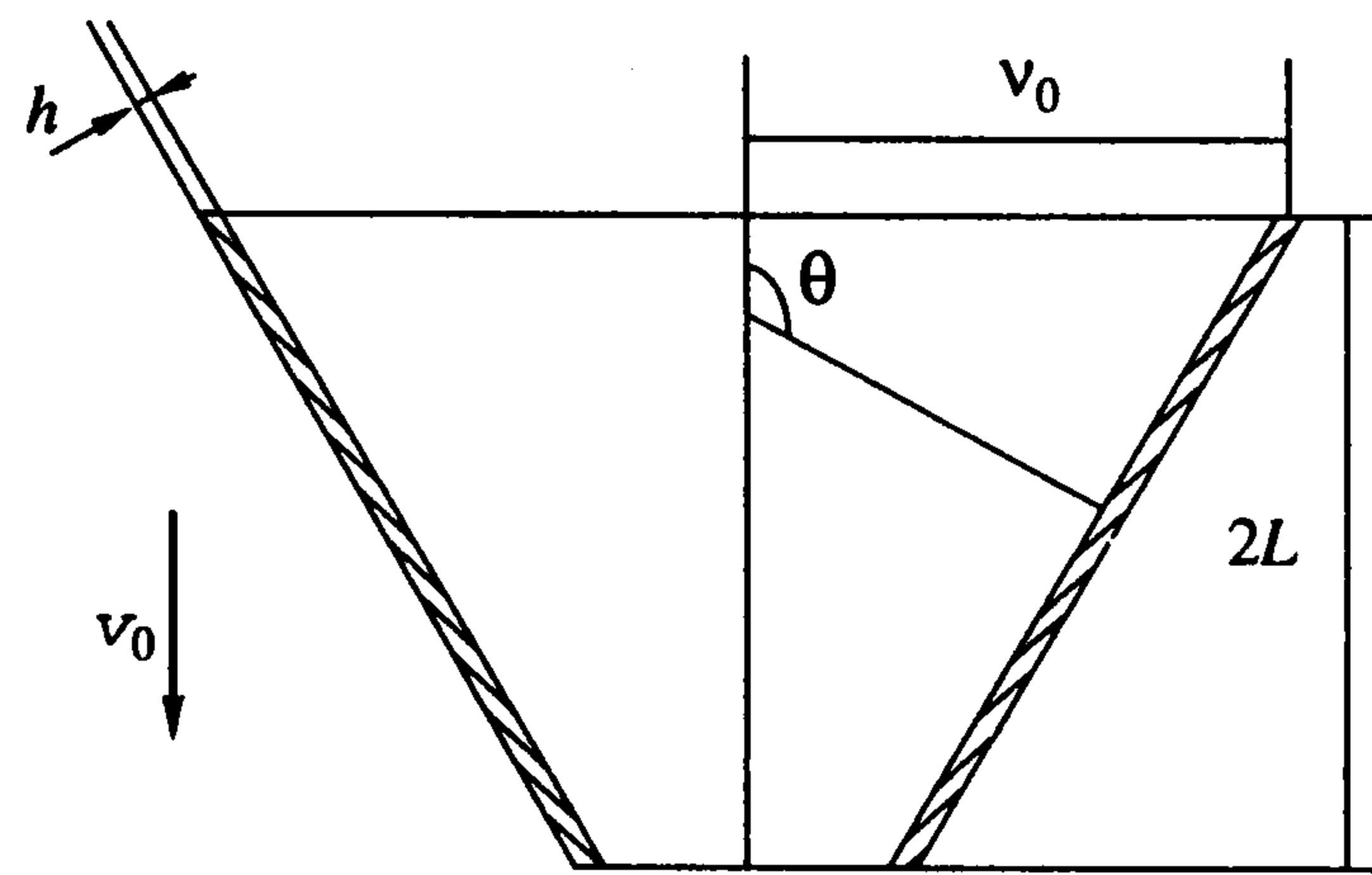
b_1 – жесткость при растяжении, b_2 – цилиндрическая жесткость при изгибе, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, h – толщина оболочки. В случае оболочки вращения вид операторов D и D^* следует из уравнений, приведенных ранее ([7], с. 33, 39).

Операторы D и D^* обладают свойством

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma} [(Dx)^T y - x^T D^* y] d\Sigma = \\ &= - \left\{ \int_0^{2\pi} \left[T_1 u + M_1 \gamma_1 + \left(S + \frac{2H}{r_2} \right) v + \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v M_1}{\partial S} - M_2 \cos \theta + 2 \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) w \right] \right\}_{\alpha_n}^{\alpha_k} v d\varphi - \\ &- \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left(Su + \frac{2Hu}{vr_1} + \frac{T_2 v}{v} + \frac{M_2 \sin \theta}{v^2} v - 2H \frac{r_1 \cos \theta}{v^2} w \right) \Big|_0^{2\pi} d\alpha \Big\} = \\ &= - \int_0^{2\pi} \left[T_1 u + \left(S + \frac{2H}{r_2} \right) v + \left(N_1 + \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) w - M_1 \gamma_1 \right] \Big|_{\alpha_n}^{\alpha_k} v d\varphi = - \int_{\Gamma} x_{\Gamma}^T y_{\Gamma} d\Gamma_1 \quad (14) \\ &x_{\Gamma}^T = \left(T_1, S + \frac{2H}{r_2}, N_1 + \frac{\partial H}{\partial \varphi}, -M_1 \right), \quad y_{\Gamma}^T = (u, v, w, \gamma_1) \end{aligned}$$

где Σ – поверхность оболочки, $x^T = (T_1, T_2, S, M_1, M_2, H)$ – вектор усилий, T_1, M_1 и T_2, M_2 – меридиональные и окружные растягивающие усилия и изгибающие моменты,

$S = S_{12} - H_{21}/r_2 = S_{21} - H_{12}/r_1$, $H = (H_{12} + H_{21})/2$, S_{12} , S_{21} , H_{12} , H_{21} – касательные усилия и крутящие моменты, N_1 – поперечная сила, отнесенная к единице длины параллели, $y^T = (u, v, w)$ – вектор перемещений, u – перемещение по касательной к меридиану, v – перемещение по касательной к параллели, w – нормальное перемещение, x_Γ^T , y_Γ^T – соответственно векторы обобщенных сил и перемещений на краях элемента, r_1 , r_2 – главные радиусы кривизны оболочки, ν – радиус кривизны параллели, α_n , α_k – соответственно начальное и конечное значение меридиональной дуговой координаты выделенного элемента с поверхностью Σ , α – дуговая меридиональная координата. При вычислении интеграла (14) учтена периодичность по углу θ .



Фиг. 1

Уравнения (1) следует дополнить соответствующими граничными условиями, которые следуют из свойств операторов (14),

$$x_\Gamma|_{\Gamma_1} = f_\Gamma, \quad y_\Gamma|_{\Gamma_2} = u_\Gamma \quad (15)$$

Здесь Γ_1 – часть контура, где заданы усилия, Γ_2 – часть контура, где заданы перемещения. Деление граничного контура на Γ_1 , Γ_2 считается условным, так как на одном и том же участке могут быть заданы отдельные компоненты вектора обобщенных сил и дополнительные компоненты вектора перемещений.

Для конической оболочки (фиг. 1), когда $r_1 = \infty$, при осесимметричной нагрузке величина, связанная с перемещением u , не рассматривается, а оператор D^* и матрица C преобразуются к виду

$$D^* = \begin{vmatrix} d/d\alpha & 0 \\ \nu^{-1} \cos \theta & \nu^{-1} \sin \theta \\ 0 & -d^2/d\alpha^2 \\ 0 & -\nu^{-1} \cos \theta d/d\alpha \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} b_1 & \mu b_1 & 0 & 0 \\ \mu b_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \mu b_2 \\ 0 & 0 & \mu b_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Зададимся полем перемещений в виде

$$u = \beta_1 + \beta_2 \alpha, \quad w = \beta_3 + \beta_4 \alpha + \beta_5 \alpha^2 + \beta_6 \alpha^3$$

где β_1, \dots, β_6 – неизвестные коэффициенты. Такое представление может быть оправдано тем, что уравнение изгиба слабо связано с уравнением растяжения [4].

Найдем функции формы. Они определяются согласно соотношению [4]

$$\begin{vmatrix} u \\ w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_1 & 0 & 0 & U_4 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & U_3 & 0 & U_5 & U_6 \end{vmatrix} (u_i, w_i, \gamma_i, u_j, w_j, \gamma_j)^T$$

U_1, \dots, U_6 – функции формы, $u_i, w_i, \gamma_i, u_j, w_j, \gamma_j$ – перемещения и углы поворота краевых сечений.

Введем переменную $\alpha/L = \alpha_1$, где L – длина элемента по образующей. Тогда

$$U_1 = 1 - \alpha_1, \quad U_2 = 1 - 3\alpha_1^2 + 2\alpha_1^3, \quad U_3 = L(\alpha_1 - 2\alpha_1^2 + \alpha_1^3)$$

$$U_4 = \alpha_1, \quad U_5 = 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1^3, \quad U_6 = L(-\alpha_1^2 + \alpha_1^3)$$

При переходе от местной системы осей $(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{n})$ к единой системе (X, Y, Z) выразим вектор u через матрицу функций формы U и узловые перемещения

$$z^T = (u_i, w_i, dw_i/d\alpha, u_j, w_j, dw_j/d\alpha)$$

Из формул (11), учитывая, что V соответствует Σ , и $d\Sigma = 2\pi\nu L d\alpha_1$, получим для матриц жесткостей и масс выражения [8]

$$\bar{C} = 2\pi L \Lambda^T \left\{ \int_0^1 (D^*U)^T C D^* U \nu d\alpha_1 \right\} \Lambda, \quad \bar{R} = 2\pi L \Lambda^T \left\{ \int_0^1 (RU)^T U \nu d\alpha_1 \right\} \Lambda$$

$$\bar{C} = \Lambda^T C_0 \Lambda, \quad \bar{R} = \Lambda^T R_0 \Lambda, \quad i, j = 1, \dots, 6$$

$$\Lambda = \begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{Bmatrix}, \quad M = \begin{Bmatrix} \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

Для формирования системы уравнений представим матрицу жесткости и матрицу масс, разбитыми на блоки 3×3

$$C_0 = \begin{Bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ji} & A_{ji} \end{Bmatrix}, \quad R_0 = \begin{Bmatrix} m_{ij}^A & m_{ij}^B \\ m_{ji}^B & m_{ji}^A \end{Bmatrix}$$

а вектор нагрузки $f^T = (f_{ip} \ f_{ji})$. Тогда для оболочки получим следующее рекуррентное соотношение:

$$(B_{g-1g} - \omega^2 m_{g-1g}^B) Y_{g-1} + [A_{g-1g} + A_{g+1g} - \omega^2 (m_{g-1g}^A + m_{gg+1}^A)] Y_g + (B_{gg+1} - \omega^2 m_{gg+1}^B) Y_{g+1} = f_{g-1g} + f_{gg+1} + f_g \quad (16)$$

где g – номер характерного сечения, f_g – вектор нагрузки в сечении g , $Y_g, Y_{g\pm 1}$ – векторы узловых перемещений.

Согласно уравнению (12), для того чтобы учесть рассеяние энергии, подставим вместо E величину $E(1 + i\omega\gamma)$, где γ – коэффициент внутреннего рассеяния энергии, и, решая систему уравнений (12), строим АФЧХ. Математическая модель оболочки вращения формируется по характерным точкам АФЧХ в виде

$$W(\omega) = \sum_j \frac{k_j}{-T_{2j}^2 \omega^2 + T_{1j} \omega i + 1} \quad (17)$$

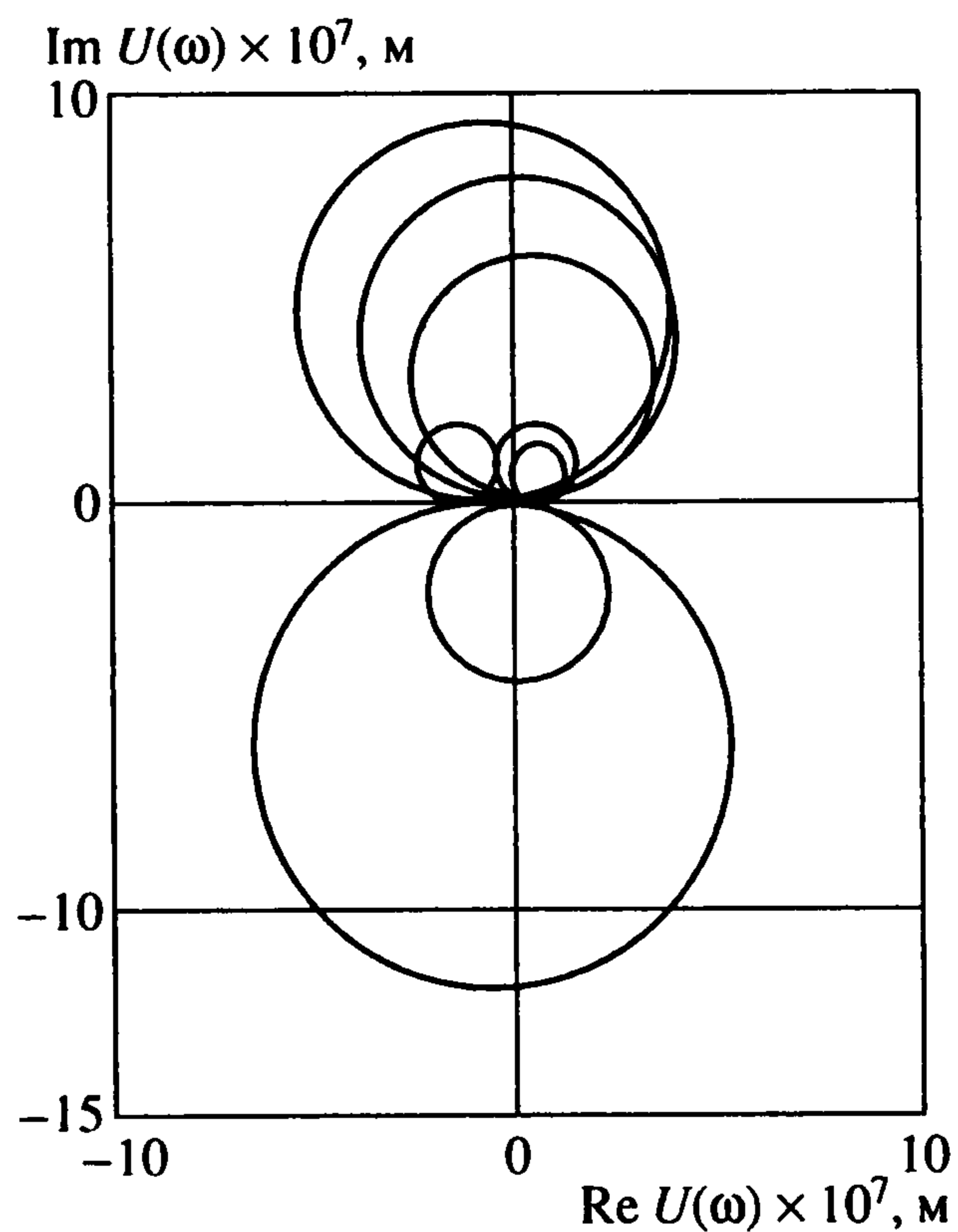
$$k_j = A_j \frac{T_{1j}}{T_{2j}}, \quad T_{2j} = \frac{1}{\omega_{1j}}, \quad T_{1j} = T_{2j} \left(1 - \left(\frac{\omega_{2j}}{\omega_{1j}} \right)^2 \right)$$

A_j – вертикальный размер витка АФЧХ.

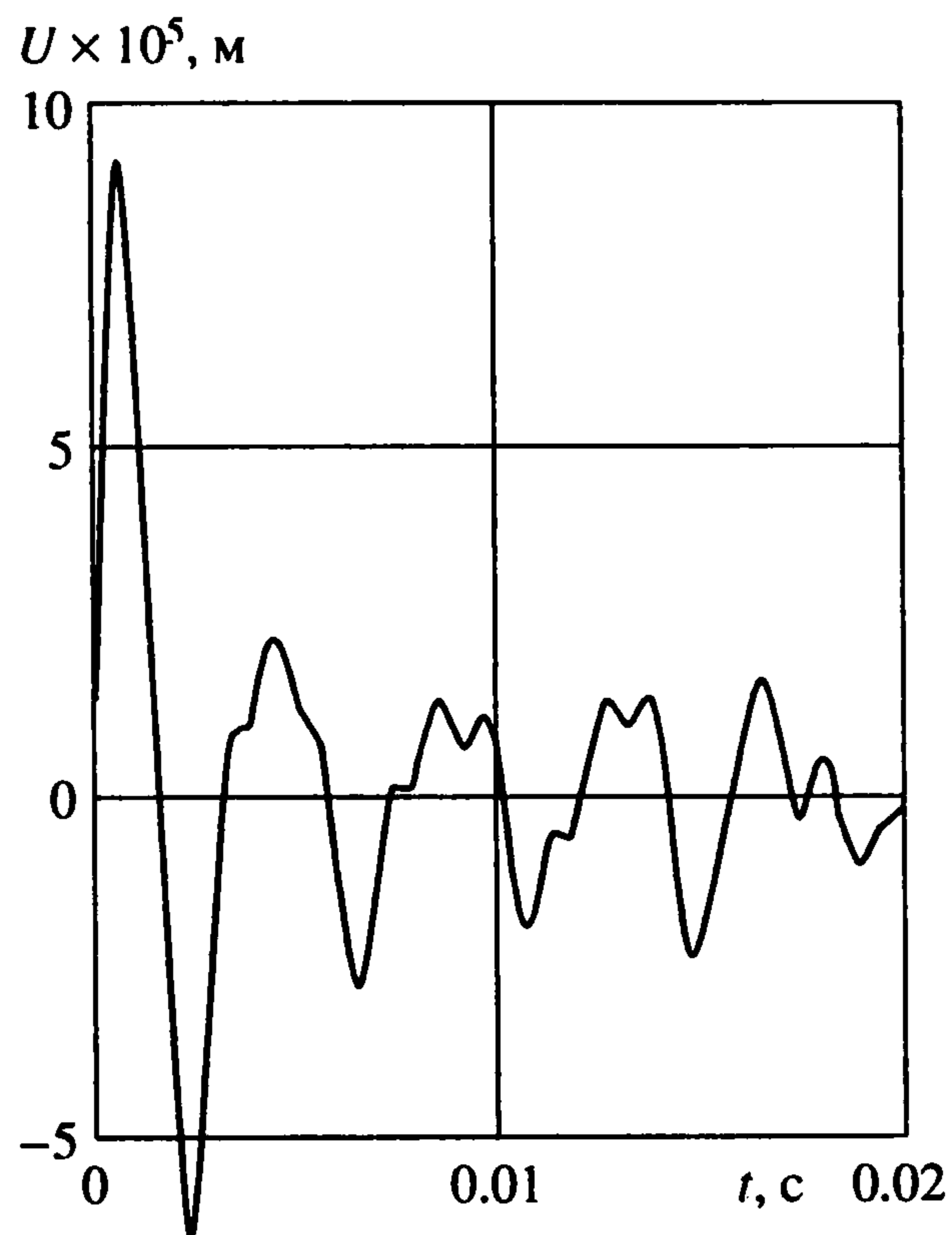
Примеры численного теста. Рассматривается следующая задача: в некоторый момент времени на коническую оболочку (фиг. 1) с параметрами $\theta = 45^\circ$, $L = 6$ м, $\nu_0 = 20$ м, $h = 0.005$ м, $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\mu = 0.3$, $q = 100$ Н/м², начинает действовать сила $q_1 = 10$ кН/м²; требуется построить переходный процесс при единичном импульсе и ступенчатом возмущении, соответствующим выше указанному давлению.

Решая уравнения (16), строим АФЧХ. Затем по формулам (17) строим передаточные функции для выбранных сечений оболочки. Для среднего сечения оболочки в разложении (17) получается восемь существенно проявляющих себя слагаемых. Коэффициенты этих слагаемых приведены ниже

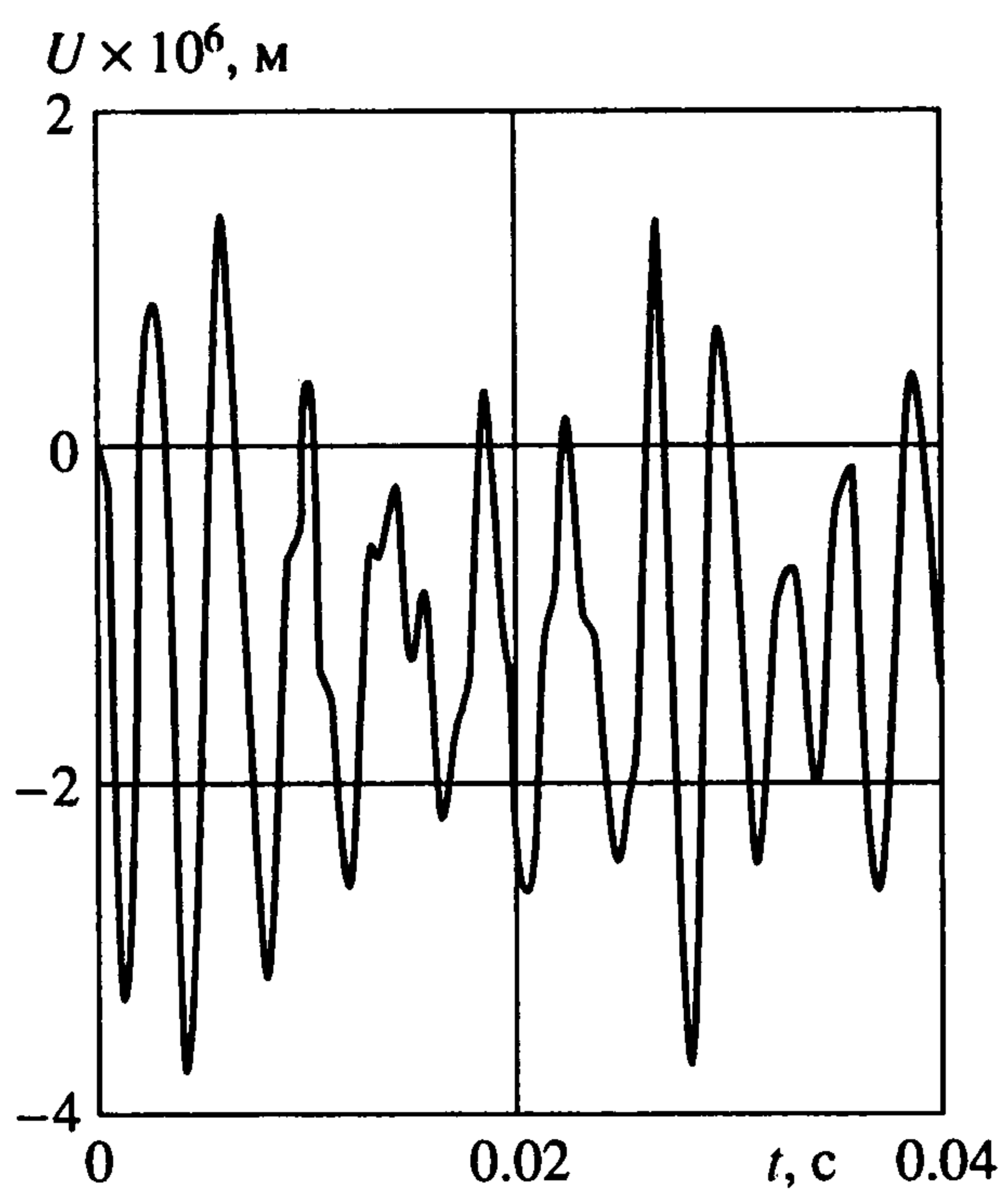
j	1	2	3	4	5	6	7	8
$-k_j \cdot 10^{12}, \text{ м}^3/\text{Н}$	12070	-1946	-9212	7828	5879	1277	1865	4444
$T_{1j} \cdot 10^9, \text{ с}$	6531	5864	5165	4670	4221	3773	3519	2168
$T_{2j}^2 \cdot 10^7, \text{ с}^2$	6478	5846	5193	4758	4289	3921	3562	2164



Фиг. 2



Фиг. 3



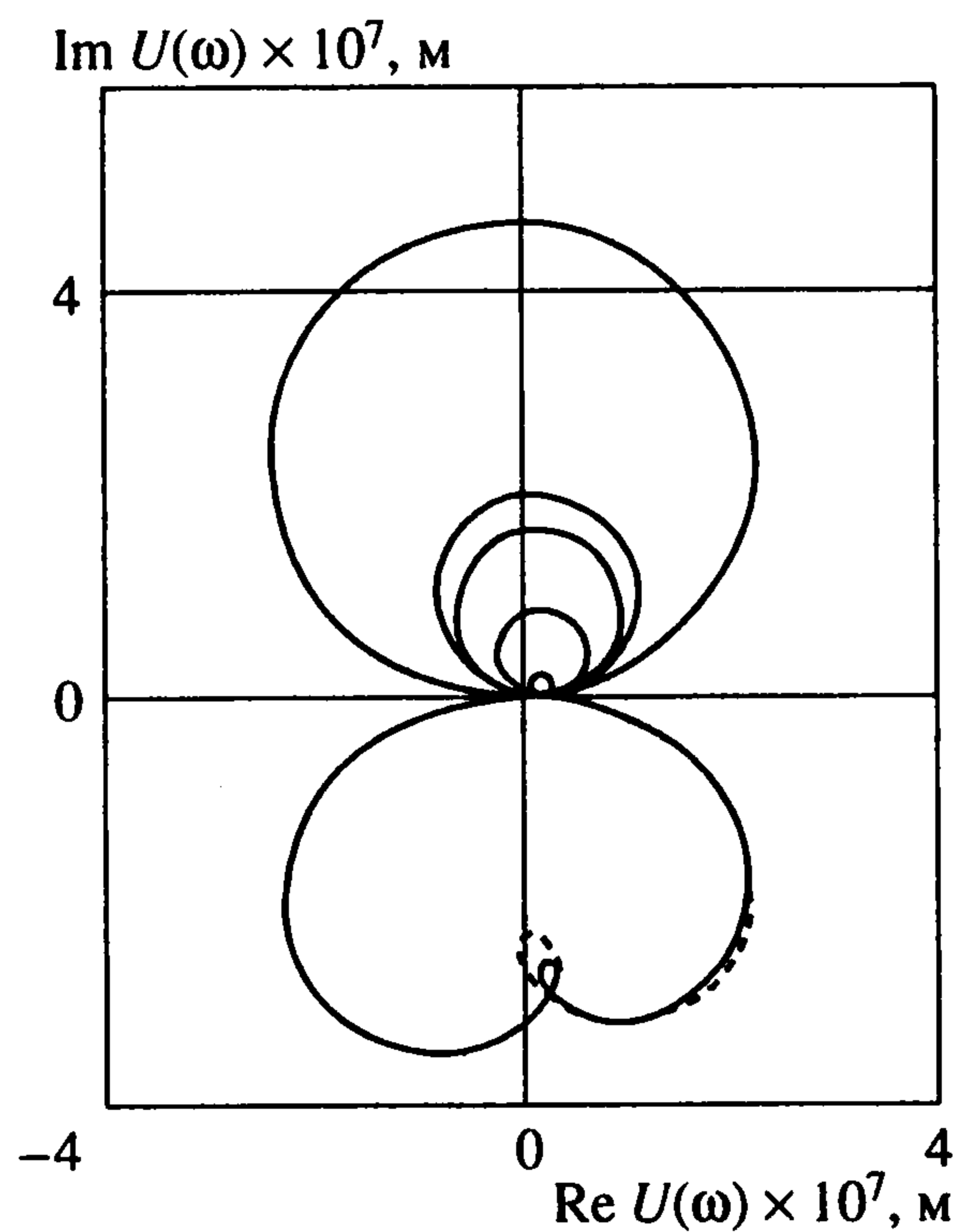
Фиг. 4

На фиг. 2 показаны АФЧХ, построенные согласно системе уравнений (16) и по формуле (17), которые практически совпадают. Средняя погрешность аппроксимации составляет менее 2%.

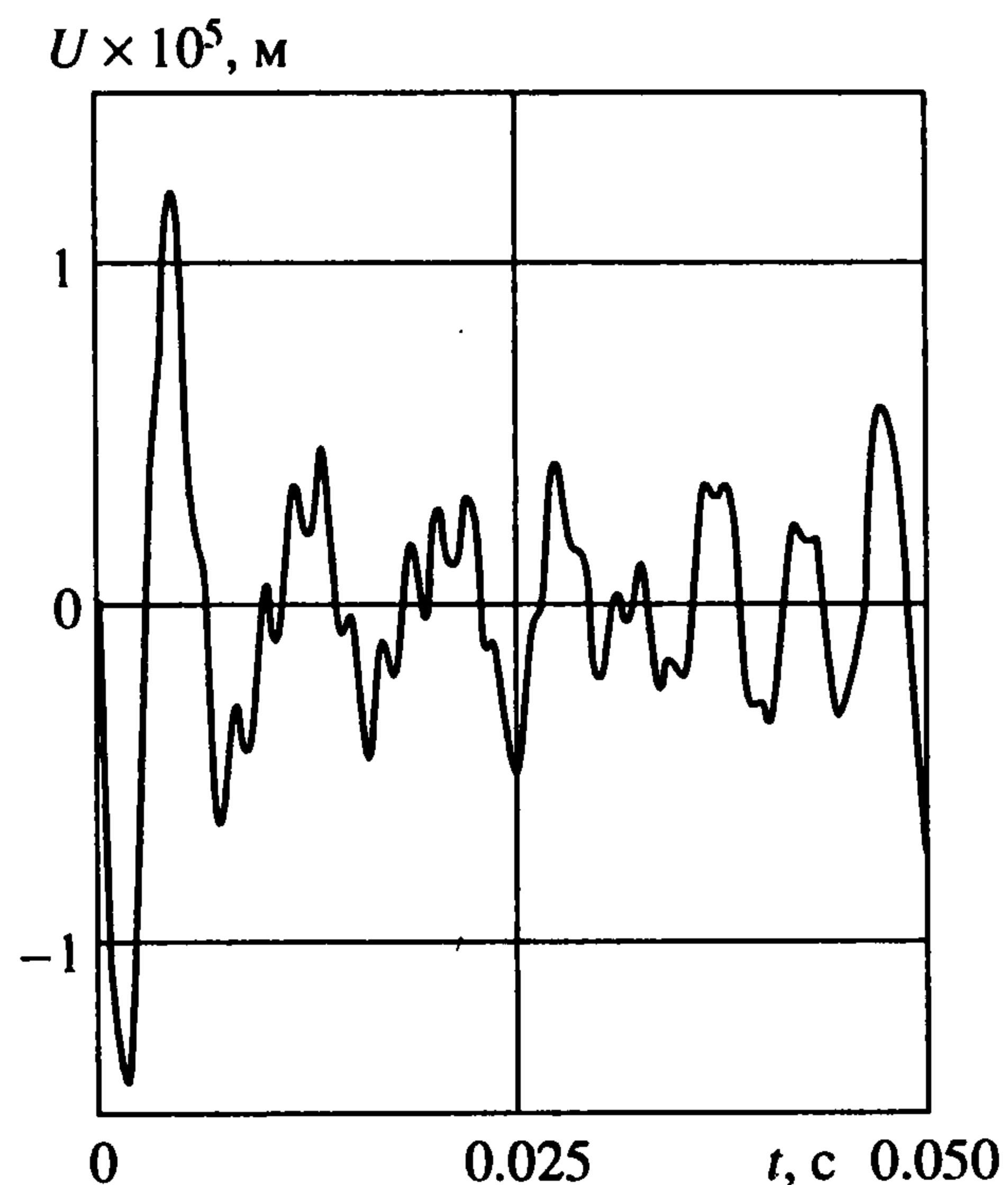
Далее, воспользовавшись приведенными выше данными, строим переходный процесс по формуле

$$u(x, t) = \sum_j \frac{2k_j}{\xi_j} \exp(-\eta_j t) \sin(\zeta_j t) \quad (18)$$

$$\xi_j = (4T_{2j}^2 - T_{1j}^2)^{1/2}, \quad \eta_j = \frac{T_{1j}}{2T_{2j}^2}, \quad \zeta_j = \frac{(4T_{2j}^2 - T_{1j}^2)^{1/2}}{2T_{2j}^2}$$



Фиг. 5



Фиг. 6

Отклик системы на единичное импульсное воздействие, согласно формуле (18), показан на фиг. 3. Переходный процесс для ступенчатой силы при нулевых начальных условиях строится по формуле

$$u_1(x, t) = \sum_j k_j \left\{ 1 - \exp(-\eta_j t) \left(\cos(\zeta_j t) + \frac{T_{1j}}{\xi_j} \sin(\zeta_j t) \right) \right\} \quad (19)$$

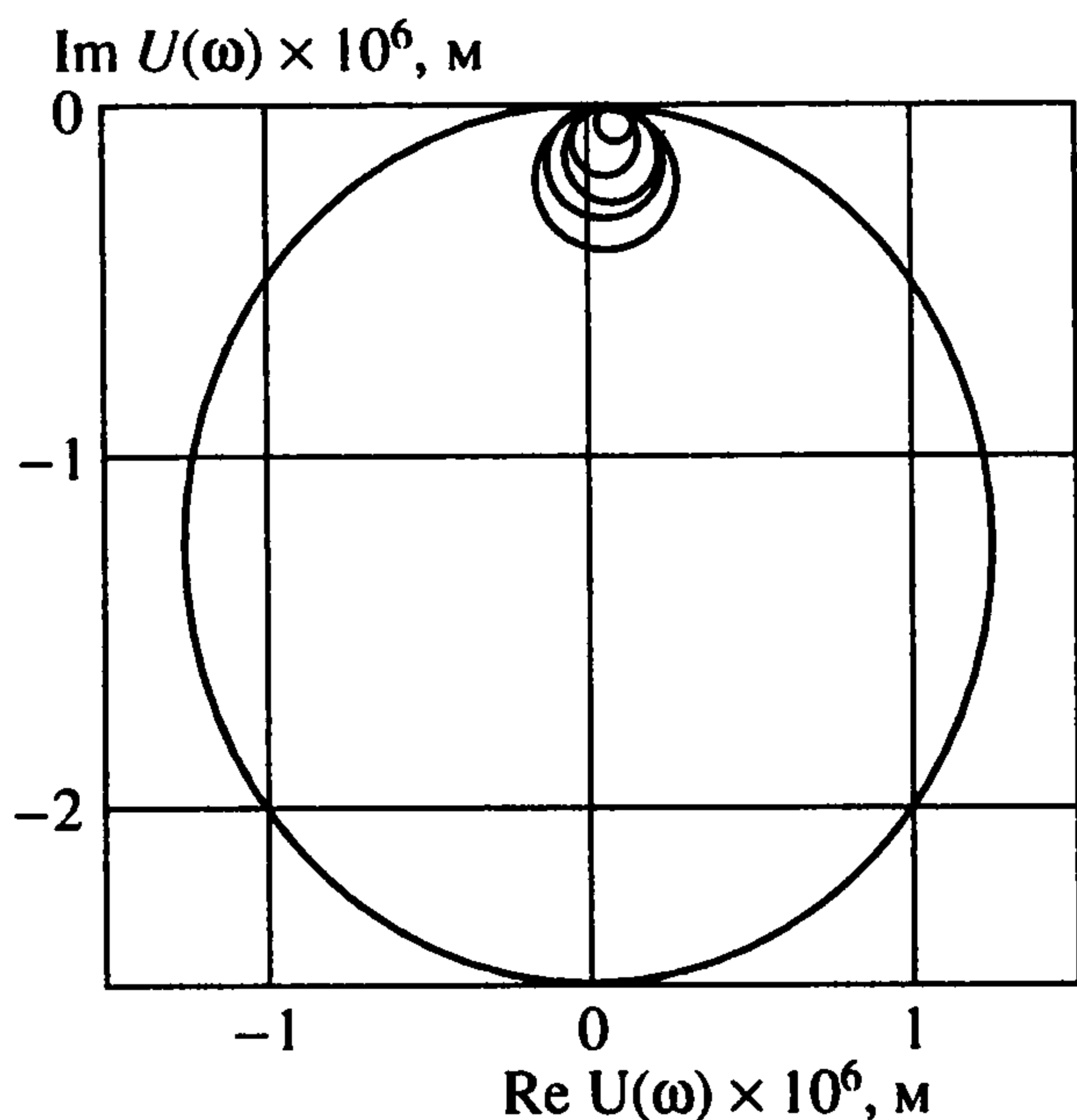
и показан на фиг. 4.

Вторая задача – исследование динамики конической оболочки при соударении с жестким препятствием при $\theta = 135^\circ$; остальные параметры задачи – те же, что в предыдущей задаче. Скорость соударения равна 0.1 м/с. Край оболочки, находящийся в контакте с препятствием, жестко зашпелен. В качестве возмущающего фактора в данном случае будет величина $q = -V_0 R$, где R – масса, приходящаяся на единицу площади срединной поверхности. Строим АФЧХ, по которым формируется математическая модель оболочки вращения при соударении с жестким препятствием. Здесь, как и в предыдущем случае, средняя погрешность аппроксимации составила менее 2%. В данном случае существенно проявляют себя семь членов ряда (17), коэффициенты которых приводятся ниже

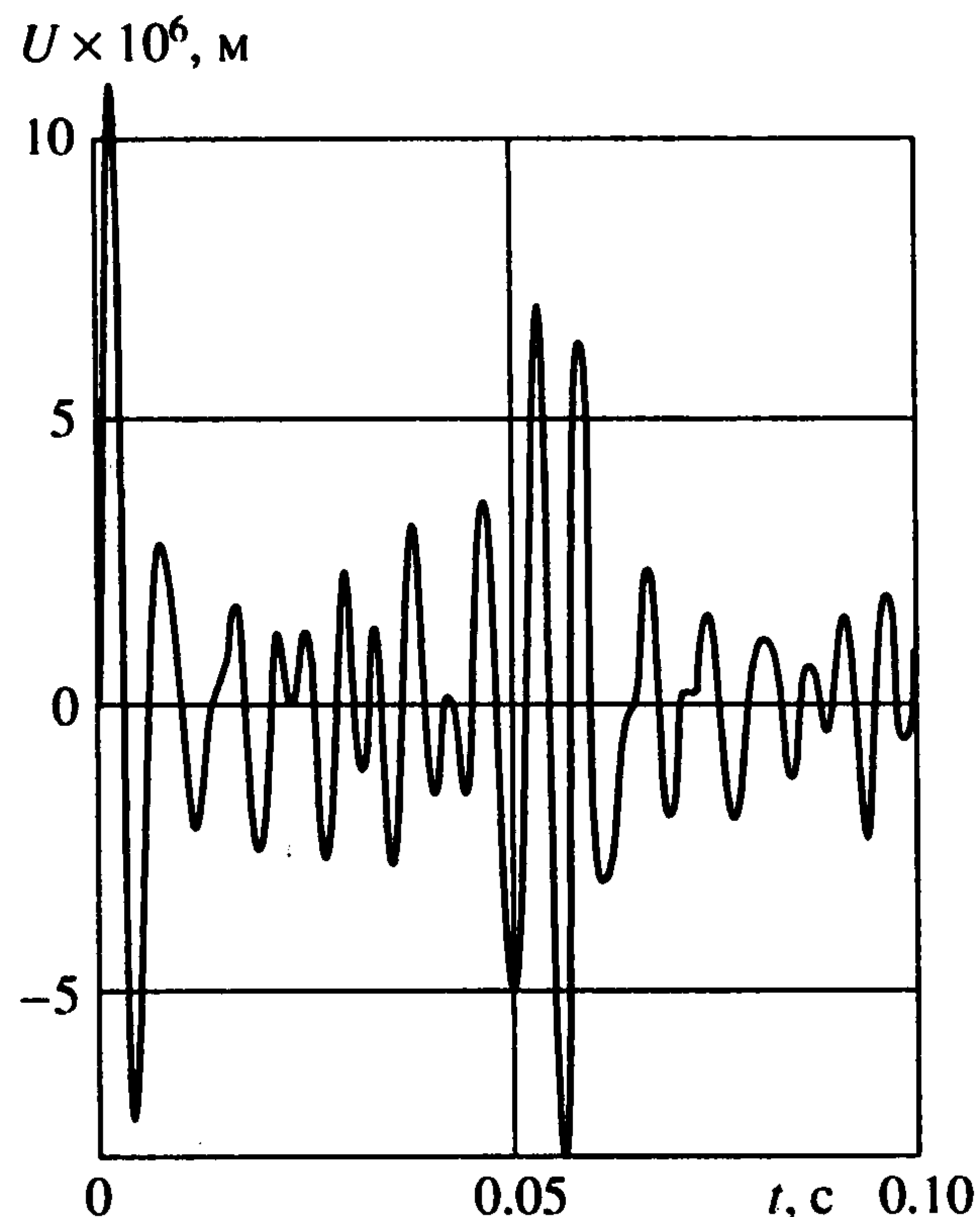
j	1	2	3	4	5	6	7
$-k_j \cdot 10^{12},$ м ³ /Н	46340	1968	1609	849	161	2607	2406
$T_{1j} \cdot 10^9, c$	12280	11020	9802	8686	7305	2618	2194
$T_{2j}^2 \cdot 10^7, c^2$	12400	11080	9816	8818	7747	2811	27820

На фиг. 5 показаны АФЧХ оболочки (сплошные линии) и модели (штриховые линии). Результат расчета отклика системы на импульсное воздействие приведен на фиг. 6.

Третья задача отличается от второй лишь тем, что после соударения оболочка отскакивает от препятствия. Построив АФЧХ, формируем математическую модель



Фиг. 7



Фиг. 8

оболочки вращения при соударении с жестким препятствием. Погрешность аппроксимации 2%. Здесь существенно проявляют себя шесть членов ряда (17), коэффициенты которых приведены ниже

j	1	2	3	4	5	6
$k_j \cdot 10^{12}, \text{ м}^3/\text{Н}$	29070	4242	3255	1840	445	24570
$T_{1j} \cdot 10^9, \text{ с}$	11620	10170	9293	7793	6874	6499
$T_{2j}^2 \cdot 10^7, \text{ с}^2$	11640	10310	9203	8351	7577	6591

На фиг. 7 показаны АФЧХ оболочки и модели, которые практически совпадают. Результат расчета отклика системы на импульсное воздействие приведен на фиг. 8.

По переходным процессам можно найти максимальную (A_{\max}) и статическую ($A_{\text{ст}}$) амплитуды, откуда по формуле $K^* = A_{\max}/A_{\text{ст}}$ найдем коэффициент динамичности. Затем, найдя статическое напряжение ($\sigma_{\text{ст}}$), по формуле $K^*\sigma_{\text{ст}} = \sigma_{\max}$ находим максимальное напряжение в рассматриваемом сечении. Приведенные решения справедливы при любом рассеянии энергии, в том числе при $\gamma = 0$, когда получаются полигармонические незатухающие колебания, а решение имеет смысл для любых промежутков времени, т.е. для сотен и тысяч циклов. Аналогично предыдущему изложенная методика позволяет исследовать колебания оболочек при любых внезапных скачках давления и исследовать звуковые колебания оболочки.

При расчете оболочек вращения переменной кривизны, когда $r_1 = r_1(\theta)$, осуществляется аппроксимация такой оболочки коническими конечными элементами с разным углом θ .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Reissner F.* On some variational theorems in elasticity // *Problems in Continuum Mechanics*. Philadelphia, Pa: SIAM, 1961. P. 370–381.
2. *Prager W.* Variational principles of linear elastostatics for discontinuous displacements, strains and stresses // *Recent Progress in Applied Mechanics. The Folkey Odquist Volume*. Stockholm: Almqvist and Wiksell, 1967. P. 463–474.
3. *Санкин Ю.Н.* Смешанные вариационные методы в динамике вязкоупругого тела с распределенными параметрами // *Учен. зап. УлГУ. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики*. 1998. Вып. 1 (5). С. 124–132.
4. *Zienkiewicz O.C.* *The Finite Element Method in Engineering Science*. L.: McGraw-Hill, 1971 = *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
5. *Санкин Ю.Н., Юганова Н.А.* Продольные колебания упругих стержней ступенчато-переменного сечения при соударении с жестким препятствием // *ПММ*. 2001. Т. 65. Вып. 3. С. 442–448.
6. *Фридман В.М., Чернина В.С.* Видоизменение метода Бубнова–Галеркина–Ритца, связанное со смешанным вариационным принципом в теории упругости // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1969. № 1. С. 64–78.
7. *Чернина В.С.* Статика тонкостенных оболочек вращения. М.: Наука, 1968. 455 с.
8. *Санкин Ю.Н., Элртыц О.О., Ряпосов А.Ю.* Применение конического конечного элемента для расчета оболочек вращения // *Прикладная математика и механика*. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. С. 35–48.

Ульяновск

Поступила в редакцию
25.IX.2001