

УДК 533.6.013.42

© 2002 г. В.А. Ковалев

СРАЩИВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ РАССЕЙНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН УПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Рассматривается задача о рассеянии стационарной плоской акустической волны упругой сферической оболочкой. Предложена процедура построения приближенного решения, основанная на сращивании разложений для различных асимптотических моделей взаимодействия оболочки с акустической средой. В окрестности нулевой частоты и частот толщинных резонансов применяются длинноволновые низкочастотные приближения уравнений теории упругости (теория оболочек Кирхгофа – Лява или ее уточнение) и длинноволновые высокочастотные приближения соответственно. Вне этих окрестностей используется модель типа плоского слоя. Сравнение с точным решением подтверждает, что предложенный подход позволяет описать с равномерной малой погрешностью рассеянное давление и резонансные компоненты парциальных мод в достаточно широком частотном диапазоне.

Асимптотические модели взаимодействия оболочки с акустической средой базируются на асимптотических приближениях трехмерных уравнений теории упругости, составляющих современную динамическую теорию оболочек (см., например, [1]). Классическая теория оболочек Кирхгофа – Лява (ТКЛ) и ее уточнения могут быть отнесены к низкочастотным приближениям. В высокочастотной (ВЧ) области существует два типа асимптотических приближений. Длинноволновое ВЧ-приближение описывает колебания оболочки на частотах, близких к частотам толщинных резонансов растяжения или сдвига. Для коротковолнового ВЧ-приближения характерно малое влияние кривизны оболочки.

Наличие областей согласования асимптотических приближений позволяет сращивать их между собой для получения равномерной аппроксимации в широком диапазоне частот. Так, например, сращиванием решений, соответствующих ТКЛ, теории длинноволновых ВЧ-колебаний и плоской (антиплоской) теории упругости удалось полностью аппроксимировать дисперсионные кривые для цилиндрической оболочки [2].

Ниже предлагается процедура сращивания асимптотических приближений в задаче рассеяния плоской акустической волны сферической оболочкой. При этом используются асимптотические модели, развитые на основе упомянутых выше приближений и описывающие взаимодействие оболочки с акустической средой. В окрестности нулевой частоты применяется асимптотическая модель, основанная на уточненной ТКЛ [3, 4], в окрестности частот толщинных резонансов – теория длинноволновых ВЧ-колебаний оболочки, погруженной в жидкость [5], вне этих окрестностей – модель типа плоского слоя [6], соответствующая коротковолновому ВЧ-приближению. Как показано ниже, область применимости последней модели перекрывается с областями применимости первых двух в низкочастотной области и вблизи частот толщинных резонансов соответственно, что и дает возможность построить равномерное приближенное решение как для рассеянного давления, так и для резонансных компонентов парциальных мод. Сравнение с точным решением [7] подтверждает высокую эффективность предложенного метода.

1. Постановка задачи. Рассмотрим рассеяние стационарной плоской акустической волны сферической оболочкой. Давление в падающей волне имеет вид

$$p_i = p_0 \exp[-i(k\xi + \omega t)] \quad (1.1)$$

где p_0 – постоянная, имеющая размерность давления, k – волновое число, ω – круговая частота, t – время, ξ – пространственная координата направлена навстречу движению волны. Пусть a и b – внешний и внутренний радиусы оболочки соответственно, $h = (a - b)/2$ – полутолщина оболочки, $R = (a + b)/2$ – радиус срединной поверхности.

Отнесем оболочку к сферической системе координат. Поскольку рассматриваемая задача осесимметрична, все величины зависят только от двух координат (r, θ) . Введем безразмерные параметры

$$\kappa = \rho / \rho_1, \quad \beta_i = c_i / c, \quad i = 1, 2; \quad \gamma = c_2 / c_1, \quad k = \omega / c \quad (1.2)$$

где c_1 и c_2 – скорости волн расширения и сдвига в оболочке соответственно, ρ_1 – плотность материала оболочки, c – скорость звука в жидкости, ρ – плотность жидкости. Давление в падающей волне можно представить в виде [8]

$$p_i = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos \theta) \quad (1.3)$$

В формуле (1.3) j_n – сферическая функция Бесселя, P_n – полином Лежандра, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опущен.

Рассеянное давление также представим в виде ряда по полиномам Лежандра

$$p_s = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) B_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta) \quad (1.4)$$

где B_n – искомые постоянные, $h_n^{(1)}$ – сферическая функция Ганкеля первого рода. Представления (1.3) и (1.4) удовлетворяют уравнению Гельмгольца для избыточного давления в жидкости, кроме того, рассеянное давление p_s удовлетворяет условию излучения при $r \rightarrow \infty$. Коэффициенты B_n определяются из контактной задачи для уравнений, описывающих движение оболочки. Решение, соответствующее трехмерным уравнениям теории упругости, получено ранее [7].

Будем считать далее, что толщина оболочки невелика, т.е. параметр тонкостенности $\eta = h/R$ мал, и рассмотрим асимптотические модели взаимодействия оболочки с жидкостью.

2. Модель типа плоского слоя. Модель "сухого" плоского слоя широко использовалась (см., например, [8]) для приближенного определения резонансных частот. Этот подход основан на аналогии между периферическими волнами, возникающими в оболочке при рассеянии акустического давления, и волнами Лэмба в слое. Для случая круговой цилиндрической оболочки построена [6] асимптотическая модель, являющаяся развитием модели плоского слоя и позволяющая описать взаимодействие оболочки с жидкостью, т.е. определить не только резонансные частоты, но также рассеянное давление и формы резонансных кривых. В данной работе эта модель применяется к сферической оболочке.

В модели типа плоского слоя уравнения колебаний оболочки имеют вид

$$\Delta_p \varphi + \beta_1^{-2} k^2 R^2 \varphi = 0, \quad \Delta_p \psi + \beta_2^{-2} k^2 R^2 \psi = 0 \quad (2.1)$$

$$\Delta_p = \partial^2 / \partial \zeta^2 + \partial^2 / \partial \theta^2, \quad \zeta = r/R - 1$$

где φ и ψ – потенциалы Ламе; через них характеристики напряженно-деформируемого состояния оболочки могут быть выражены в виде

$$u_r = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_r = \rho_1 c^2 \frac{1}{R^2} \left[-k^2 R^2 \varphi + 2\beta_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta \partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (2.2)$$

$$u_\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right), \quad \sigma_{r\theta} = \rho_1 c^2 \frac{1}{R^2} \left[k^2 R^2 \psi + 2\beta_2^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta \partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \right]$$

Переход от уравнений теории упругости в сферической системе координат к уравнениям (2.1), (2.2) опирается на предположения

$$\partial / \partial \zeta \sim \partial / \partial \theta \sim \omega R / c_2 \sim \eta^{-1} \quad (2.3)$$

определяющие коротковолновые колебания оболочки, которым соответствуют резонансы больших номеров ($n \sim \eta^{-1}$). Условия (2.3) позволяют оставить в уравнениях теории упругости только старшие производные и заморозить радиальную координату r на срединной поверхности. На лицевых поверхностях оболочки ставятся граничные условия

$$\sigma_r|_{\zeta=\eta} = -(p_i + p_s)|_{r=a}, \quad u_r|_{\zeta=\eta} = \frac{1}{\rho c^2 k^2} \frac{\partial}{\partial r} (p_i + p_s)|_{r=a}, \quad \sigma_{r\theta}|_{\zeta=\eta} = 0 \quad (2.4)$$

$$\sigma_r|_{\zeta=-\eta} = 0, \quad \sigma_{r\theta}|_{\zeta=-\eta} = 0$$

Давления p_i и p_s определены соотношениями (1.3) и (1.4) соответственно.

Разложим потенциалы Ламе в ряды по полиномам Лежандра

$$\varphi(\zeta, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\zeta) P_n(\cos \theta), \quad \psi(\zeta, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n(\zeta)}{n_1} \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}, \quad n_1 = n + 1/2 \quad (2.5)$$

Подставляя разложения (1.3), (1.4) и (2.5) в уравнения (2.1), (2.2) и (2.4) и используя асимптотическую формулу

$$\partial^2 P_n(\cos \theta) / \partial \theta^2 \approx -n_1^2 P_n(\cos \theta), \quad n \gg 1 \quad (2.6)$$

определим неизвестные коэффициенты B_n :

$$B_n = -\frac{d_1 j_n'(x) - \chi j_n(x)}{d_1 h_n^{(1)'}(x) - \chi h_n^{(1)}(x)}, \quad \chi = 2d_2 \kappa k^3 R^3 \quad (2.7)$$

$$d_1 = 4D_s D_a, \quad d_2 = \alpha_1 (\text{ch}(\alpha_1 \eta) \text{ch}(\alpha_2 \eta) D_s + \text{sh}(\alpha_1 \eta) \text{sh}(\alpha_2 \eta) D_a), \quad x = ka$$

$$D_s = \gamma_0^4 \text{ch}(\alpha_1 \eta) \text{sh}(\alpha_2 \eta) - 4\beta_2^4 n_1^2 \alpha_1 \alpha_2 \text{sh}(\alpha_1 \eta) \text{ch}(\alpha_2 \eta), \quad \gamma_0^2 = 2n_1^2 \beta_2^2 - k^2 R^2$$

$$D_a = \gamma_0^4 \text{sh}(\alpha_1 \eta) \text{ch}(\alpha_2 \eta) - 4\beta_2^4 n_1^2 \alpha_1 \alpha_2 \text{ch}(\alpha_1 \eta) \text{sh}(\alpha_2 \eta), \quad \alpha_i = \sqrt{n_1^2 - \beta_i^{-2} k^2 R^2}, \quad i = 1, 2$$

3. Теория Кирхгофа – Лява и ее уточнение. ТКЛ и ее уточнения могут быть рассмотрены как длинноволновые низкочастотные приближения динамических уравнений теории упругости. Следовательно, эти теории пригодны для аппроксимации точного решения в окрестности нулевой частоты. В настоящей статье используется предложенная ранее [3] асимптотическая модель взаимодействия оболочки с жидкостью, базирующаяся на уточненной ТКЛ. Было рассмотрено [4] применение этой модели к сферической оболочке.

Используя результаты работы [4], запишем уравнения движения оболочки в перемещениях

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(u) + (1-\nu)u + (1+\nu) \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{3} \eta^2 \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(\gamma_1) + (1-\nu)\gamma_1 \right] + \\ & + \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{tg}^2}{c_2^2} u + \frac{\nu(1+\nu)R}{2E} \frac{\partial m}{\partial \theta} = 0 \\ & (1+\nu)(\Phi(u) + 2w) + \frac{1}{3} \eta^2 [\Delta_0 \Phi(\gamma_1) + (1-\nu)\Phi(\gamma_1)] - \\ & - \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{tr}^2}{c_2^2} w + \frac{\nu(1+\nu)R}{E} m + \frac{(1-\nu^2)R^2}{2Eh} Z = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$k_0 = \text{ctg } \theta, \quad \Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k_0 \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \Phi(f) = \frac{\partial f}{\partial \theta} + k_0 f, \quad \gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial \theta} - u$$

u – тангенциальное перемещение в направлении оси θ , w – нормальное перемещение (прогиб), E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Величины Z , m и приведенные частоты ω_{tg} , ω_{tr} определяются следующим образом:

$$Z = \left(1 - \frac{8-3\nu}{10(1-\nu)} \eta^2 \Delta_0 \right) (p_i + p_s)|_{r=a}, \quad m = -(p_i + p_s)|_{r=a} \quad (3.2)$$

$$\omega_{tg}^2 u = \omega^2 \left[u + \eta^2 (B_{00} + B_{01}z^2 + B_{02}z^4) \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(u) \right], \quad z = \frac{\omega h}{c_2} \quad (3.3)$$

$$\omega_{tr}^2 w = \omega^2 [w + \eta^2 A_{00} \Delta_0 w - z^2 (A_{01} w + \eta^2 A_{02} \Delta_0 w)] \quad (3.4)$$

$$B_{00} = -\frac{\nu^2}{3(1-\nu)^2}, \quad B_{01} = -\frac{\nu^2(3-5\nu-\nu^2)}{45(1-\nu)^3}, \quad B_{02} = \frac{\nu^2(-17+56\nu-33\nu^2-28\nu^3+5\nu^4)}{1260(1-\nu)^4}$$

$$A_{00} = \frac{7\nu-17}{15(1-\nu)}, \quad A_{01} = \frac{422-424\nu-33\nu^2}{1050(1-\nu)}, \quad A_{02} = \frac{32-96\nu+261\nu^2-197\nu^3}{15750(1-\nu)^2}$$

Условие непротекания имеет вид

$$w + \frac{\nu \eta^2}{2(1-\nu)} \Delta_0 w - \frac{\nu \eta}{(1-\nu)} \Phi(u) = \frac{1}{\rho \omega^2} \frac{\partial}{\partial r} (p_i + p_s)|_{r=a} \quad (3.5)$$

Подчеркнутые члены в приведенных уравнениях позволяют учесть поперечное обжатие оболочки и некоторые другие явления (подробнее об этом см. [3, 4]). Пренебрегая ими, приходим к модели взаимодействия оболочки с жидкостью, основанной на классической ТКЛ. Величины p_i и p_s , как и ранее, определяются соотношениями (1.3) и (1.4).

Было получено [4] следующее соотношение для неизвестных коэффициентов B_n :

$$B_n = -\frac{d_1 j_n'(x) + \chi j_n(x)}{d_1 h_n^{(1)'}(x) + \chi h_n^{(1)}(x)}, \quad \chi = \frac{\kappa k R}{2(1+\nu)} \beta_2^{-2} (b_2 d_2 + b_1 d_3) \quad (3.6)$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1 + \nu + \frac{1}{3} \eta^2 s, & a_{12} &= -\left(1 + \frac{1}{3} \eta^2\right) s + \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{\text{tg}}^2}{c_2^2} \\
a_{21} &= 2(1 + \nu) + \frac{1}{3} \eta^2 N s - \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{\text{tr}}^2}{c_2^2}, & a_{22} &= -N a_{11} \\
a_{31} &= 1 - \frac{\nu \eta^2}{2(1-\nu)} N, & a_{32} &= \frac{\nu \eta}{(1-\nu)} N, & b_1 &= \frac{\nu(1+\nu)}{2} \\
b_2 &= \nu(1+\nu) - \frac{1-\nu^2}{2\eta} \left(1 + \frac{8-3\nu}{10(1-\nu)} \eta^2 N\right), & N &= n(n+1), & s &= N - 1 + \nu
\end{aligned}$$

Области применения уточненной асимптотической модели и модели, основанной на классической ТКЛ, ограничены неравенствами

$$\omega R / c_2 \ll \eta^{-1}, \quad \omega R / c_2 \ll \eta^{-1/2} \quad (3.7)$$

соответственно (см. [3]). Таким образом, эти модели пригодны только для описания резонансов порожденной жидкостью волны A и резонансов волн типа Лэмба S_0 и A_0 с номерами $n \ll \eta^{-1}$ (уточненная ТКЛ) и $n \ll \eta^{-1/2}$ (классическая ТКЛ).

4. Длинноволновые высокочастотные приближения. Первые резонансы волн типа Лэмба высшего порядка соответствуют длинноволновым высокочастотным (ДВ ВЧ) колебаниям оболочки. Была построена [1, 5] асимптотическая теория ДВ ВЧ-колебаний оболочки, погруженной в жидкость. В этой теории выделяется два типа ДВ ВЧ-приближений. *Поперечное приближение* применяется в окрестности частот толщинных резонансов растяжения–сжатия, т.е. при $|z - \Lambda_{\text{st}}| \ll 1$, где z определяется формулой (3.3), $\Lambda_{\text{st}} = \pi m / \gamma$ (для антисимметричных мод) и $\Lambda_{\text{st}} = \pi(m - 1/2) / \gamma$ (для симметричных мод), $m = 1, 2, \dots$. Разрешающее уравнение поперечного приближения имеет вид

$$\eta^2 (T \Delta_0 w - 8w) + (z^2 - \Lambda_{\text{st}}^2) w = \pm \frac{(-1)^m h}{\rho_1 c_2^2} (p_i + p_s) (1 + \eta) \quad (4.1)$$

$$T = \frac{1}{\gamma^2} \mp \frac{8}{\Lambda_{\text{st}}} \left\{ \begin{array}{l} \text{tg } \Lambda_{\text{st}} \\ \text{ctg } \Lambda_{\text{st}} \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

Здесь и далее верхний (нижний) знак и верхнее (нижнее) выражение в фигурных скобках соответствуют антисимметричным (симметричным) модам.

Условие непротекания записывается следующим образом:

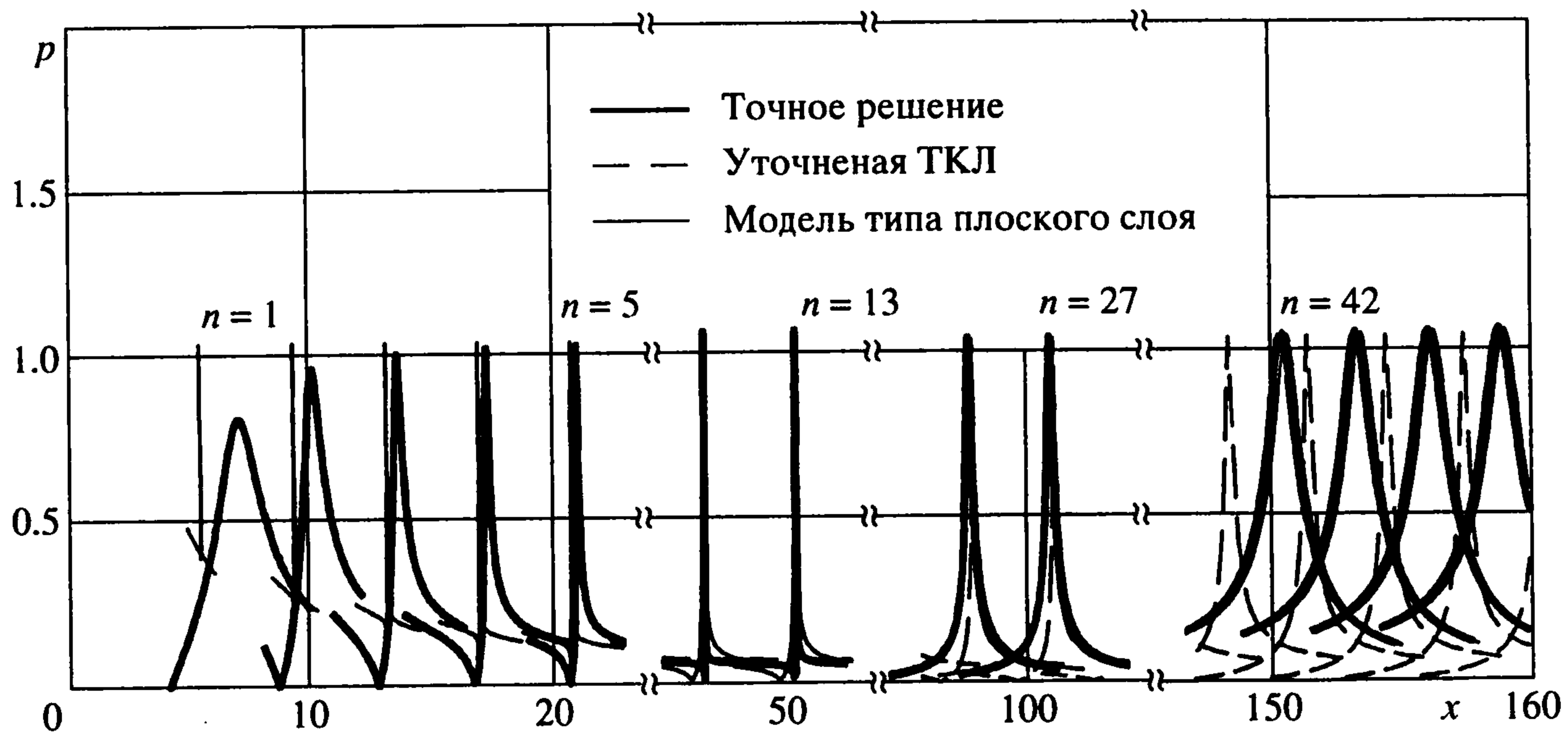
$$\pm (-1)^m w (1 - \eta) = \frac{1}{\rho c^2 k^2} \frac{\partial}{\partial r} (p_i + p_s) \Big|_{r=a} \quad (4.3)$$

В окрестности частот толщинных резонансов сдвига применяется *тангенциальное приближение*. В этом случае разрешающее уравнение и условие непротекания принимают вид

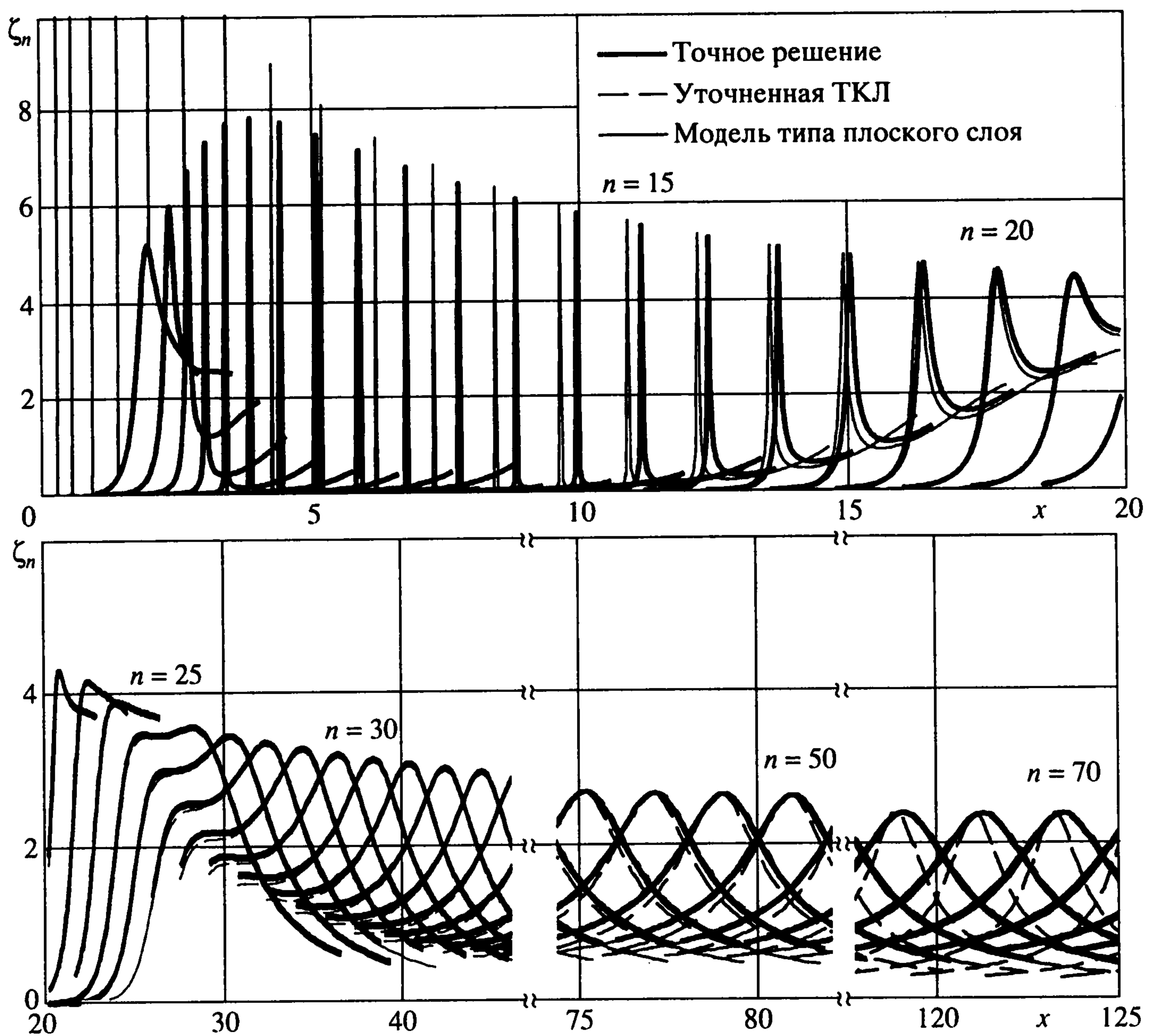
$$\eta^2 \left(P \frac{\partial}{\partial \theta} (\Phi(u)) - 4u \right) + (z^2 - \Lambda_{\text{sh}}^2) u = \frac{2(-1)^{m+1} h \gamma}{\Lambda_{\text{sh}} \rho_1 c_2^2} \eta \frac{\partial (p_i + p_s)}{\partial \theta} \left\{ \begin{array}{l} \text{ctg}(\gamma \Lambda_{\text{sh}}) \\ \text{tg}(\gamma \Lambda_{\text{sh}}) \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

$$\frac{2(-1)^m \gamma}{\Lambda_{\text{sh}}} \eta \Phi(u) \left\{ \begin{array}{l} \text{ctg}(\gamma \Lambda_{\text{sh}}) \\ \text{tg}(\gamma \Lambda_{\text{sh}}) \end{array} \right\} = \frac{1}{\rho c^2 k^2} \frac{\partial}{\partial r} (p_i + p_s) \Big|_{r=a}, \quad P = 1 \pm \frac{8\gamma}{\Lambda_{\text{sh}}} \left\{ \begin{array}{l} \text{ctg}(\gamma \Lambda_{\text{sh}}) \\ \text{tg}(\gamma \Lambda_{\text{sh}}) \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

В уравнениях (4.4), (4.5) $\Lambda_{\text{sh}} = \pi(2m - 1)/2$ (для антисимметричных мод) и $\Lambda_{\text{sh}} = \pi m$ (для симметричных мод); $m = 1, 2, \dots$. Они применимы при $|z - \Lambda_{\text{sh}}| \ll 1$.



Фиг. 1



Фиг. 2

В уравнениях (4.1), (4.3)–(4.5) величины p_i и p_s по-прежнему определяются разложениями (1.3) и (1.4). Рассмотрим случай антисимметричного тангенциального приближения. Разложим перемещение u в ряд по полиномам Лежандра

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta} \quad (4.6)$$

и подставим разложения (1.3), (1.4) и (4.6) в равенства (4.4) и (4.5). Используя соотношения

$$\Delta_0 P_n(\cos \theta) = -n(n+1)P_n(\cos \theta), \quad \Phi \left(\frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta) \right) = \Delta_0 P_n(\cos \theta) \quad (4.7)$$

получим систему линейных алгебраических уравнений, из которой определим неизвестные коэффициенты B_n . Они имеют вид

$$B_n = - \frac{Sj'_n(x) - Qj_n(x)}{Sh_n^{(1)'}(x) - Qh_n^{(1)}(x)} \quad (4.8)$$

$$S = -Pn(n+1) - 4 + \eta^{-2}(z^2 - \Lambda_{sh}^2), \quad Q = 4n(n+1)h\kappa k\beta_1^{-2} \operatorname{ctg}^2(\gamma\Lambda_{sh})\Lambda_{sh}^{-2}$$

Заметим, что решение (4.8) и аналогичные решения для других типов ДВ ВЧ-приближений применимы только для малых значений параметра n ($n \ll \eta^{-1}$). Но ряд (1.4) начинает сходиться только при $n \sim x \sim \eta^{-1}$ (см. [8]), т.е. решение содержит также коротковолновые компоненты. Следовательно, при вычислении рассеянного давления по формуле (1.4) ДВ ВЧ-приближения нужно использовать вместе с моделью типа плоского слоя.

5. Сращивание асимптотических приближений. Рассмотрим сращивание асимптотических приближений, описанных выше. Начнем с изучения резонансных компонентов парциальных мод, используя для выделения резонансов жесткое основание [8]

$$\zeta_n = \frac{2(2n+1)}{x} \left| B_n + \frac{j'_n(x)}{h_n^{(1)'}(x)} \right| \quad (5.1)$$

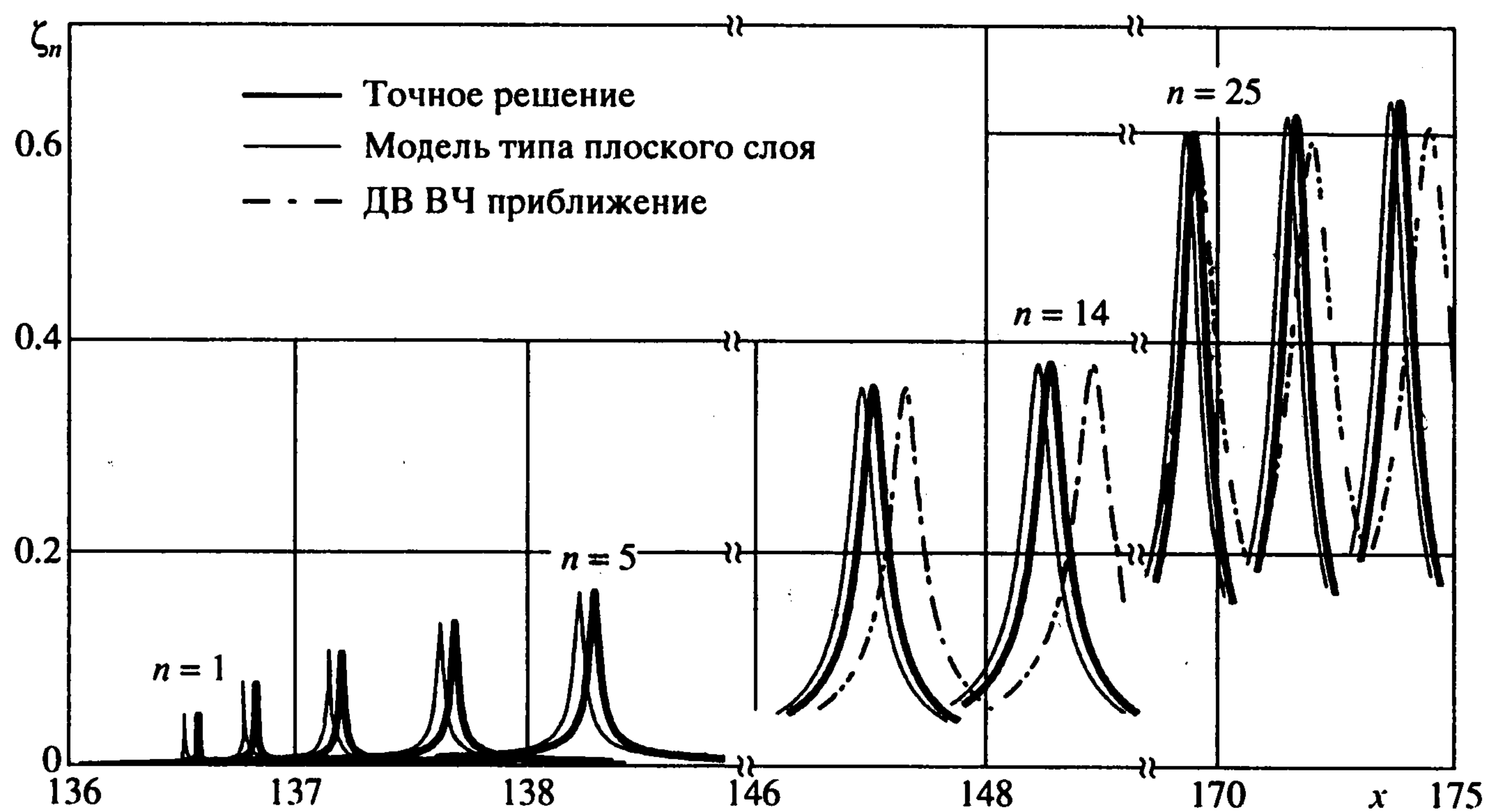
На фиг. 1 представлены резонансные компоненты для волны типа Лэмба S_0 , вычисленные по уточненной ТКЛ (штриховая линия) и модели типа плоского слоя (сплошная линия). Коэффициенты B_n в формуле (5.1) определялись либо по формуле (3.6) для уточненной ТКЛ, либо по формуле (2.7) для модели типа плоского слоя. Вычисления проводились при следующих значениях параметров задачи:

$$c_1 = 5960 \text{ м/с}, \quad c_2 = 3240 \text{ м/с}, \quad c = 1493 \text{ м/с} \quad (5.2)$$

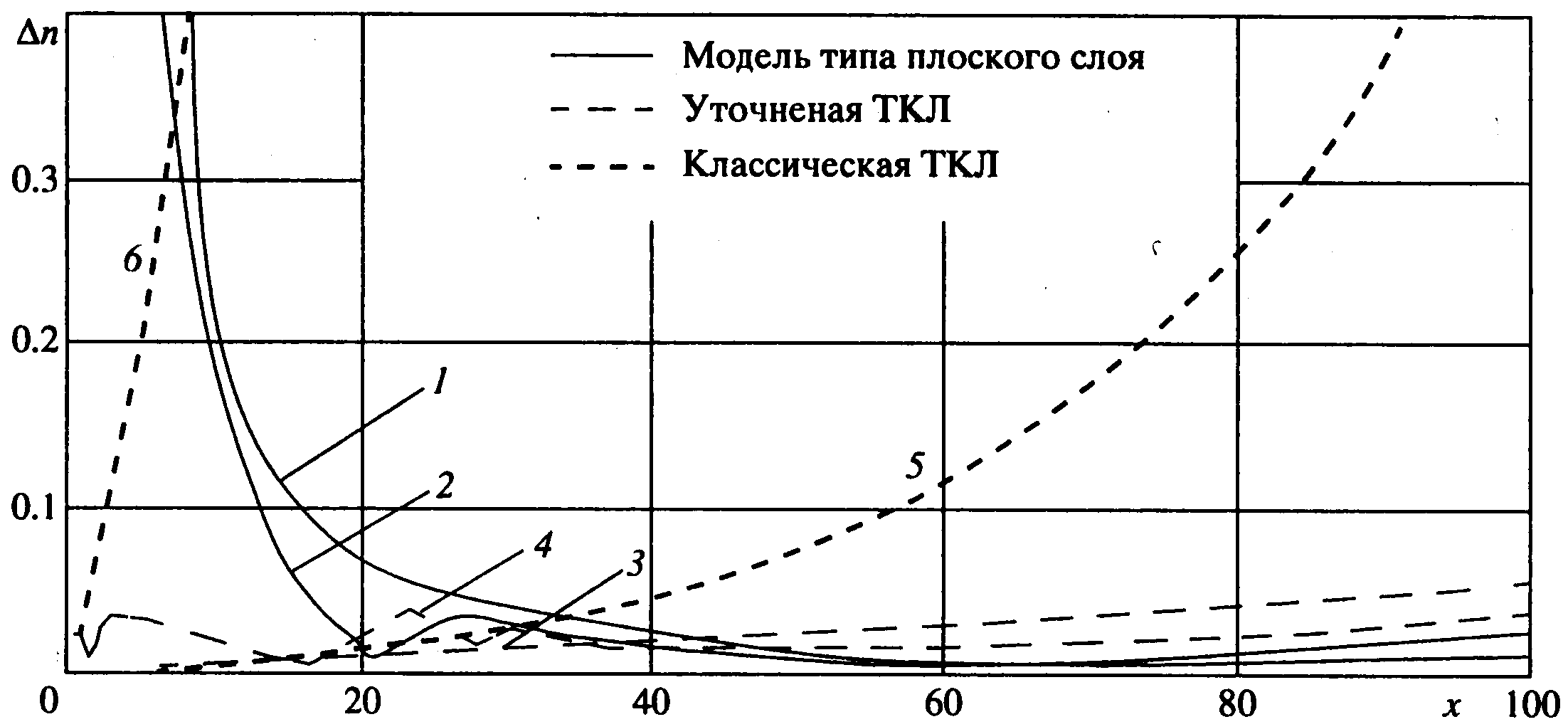
$$\rho_1 = 7700 \text{ кг/м}^3, \quad \rho = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad \eta = 1/39$$

Точное решение, полученное с использованием трехмерных уравнений теории упругости (см. [7]), также приведено на фиг. 1 и отмечено сплошной жирной линией. Аналогичное сравнение резонансных компонент представлено на фиг. 2 для порожденной жидкостью волны A (начиная с $n = 25$, она сменяется волной типа Лэмба A_0).

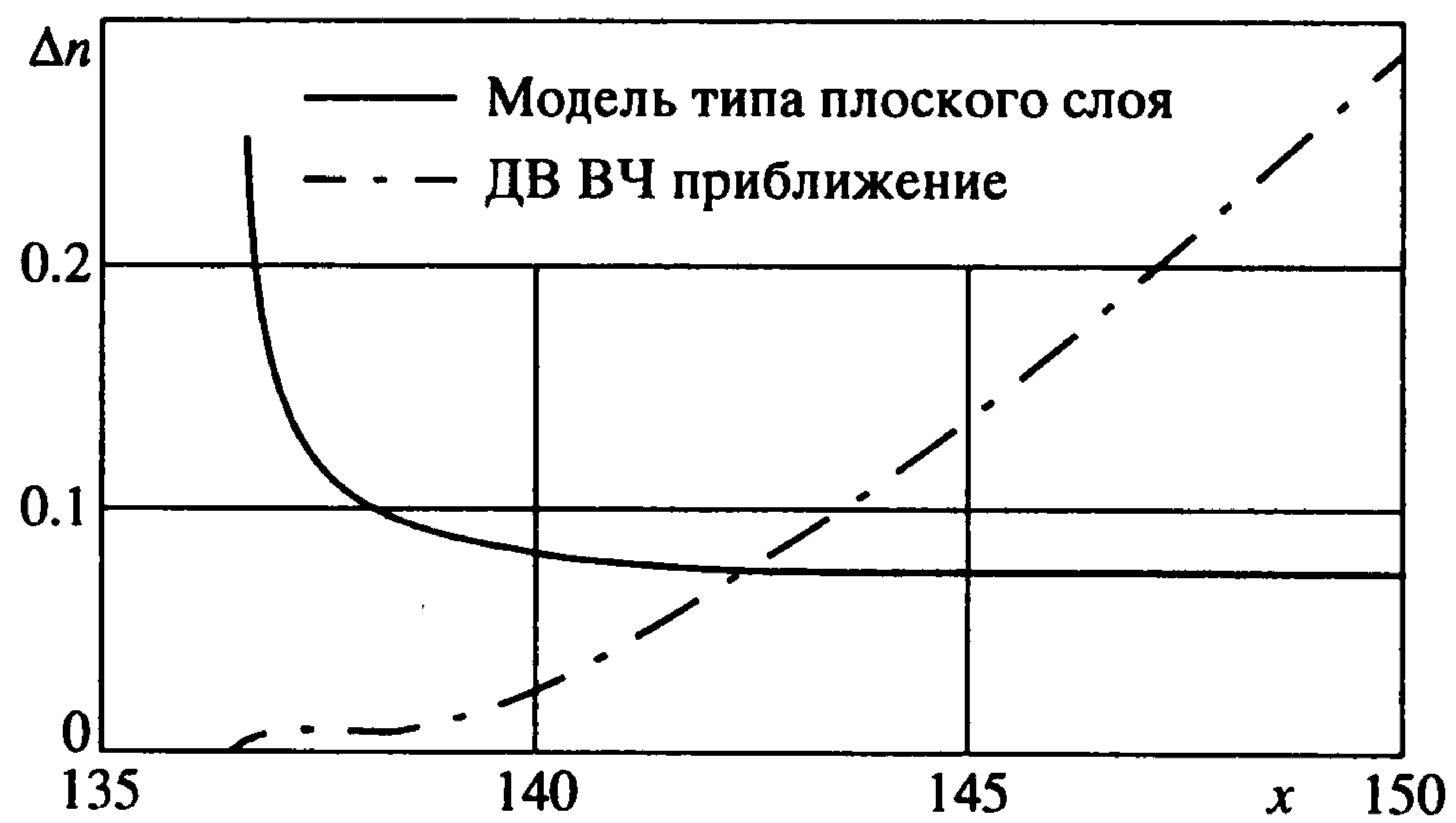
На фиг. 3 сравниваются резонансные компоненты для волны типа Лэмба A_1 , соответствующие модели типа плоского слоя (сплошная линия), ДВ ВЧ-приближению (штрихпунктирная линия) и точному решению (сплошная жирная линия). Для ДВ ВЧ-приближения коэффициенты B_n определяются формулой (4.8).



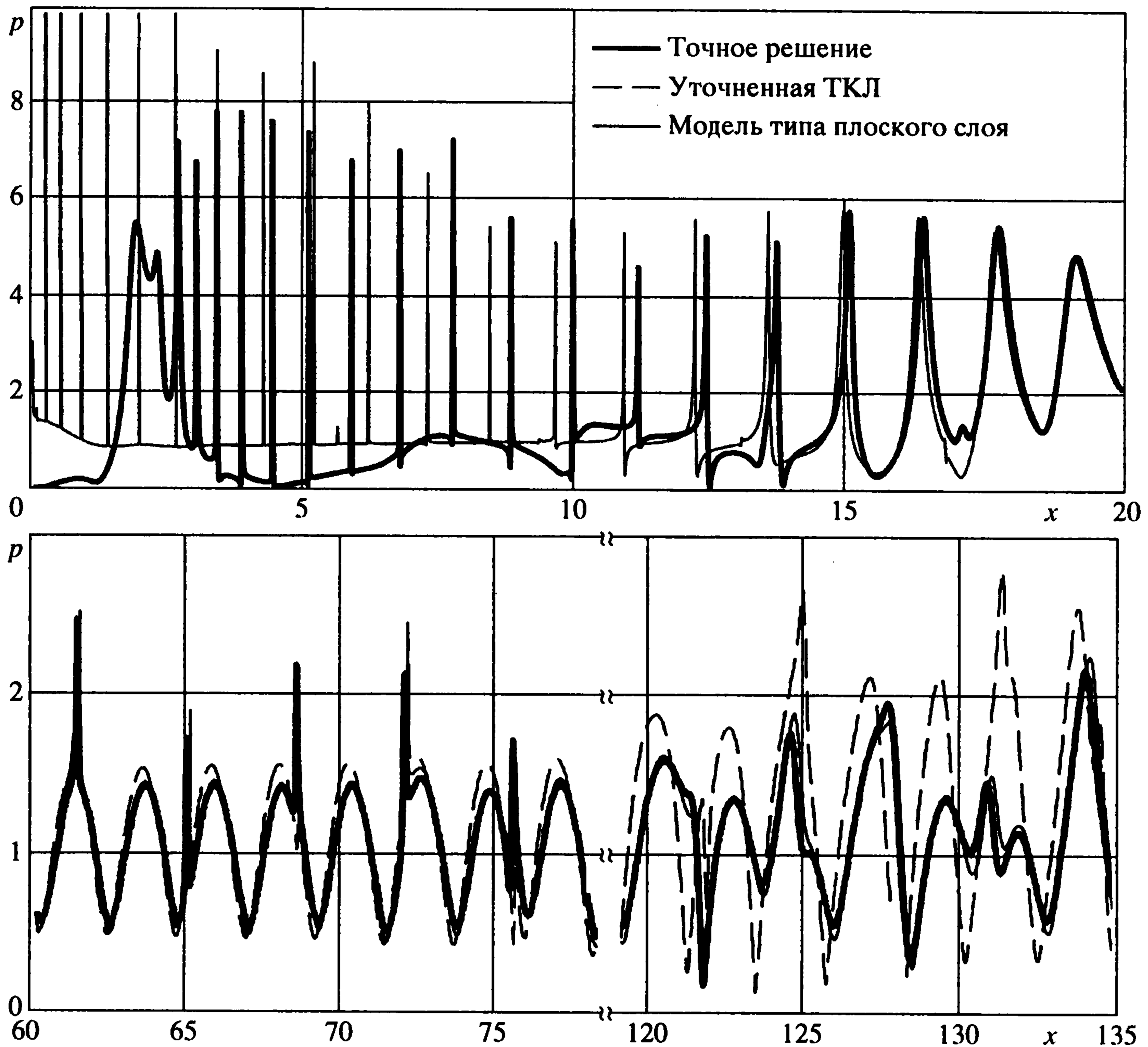
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 4, 5 представлены погрешности аппроксимации дисперсионных кривых. Здесь

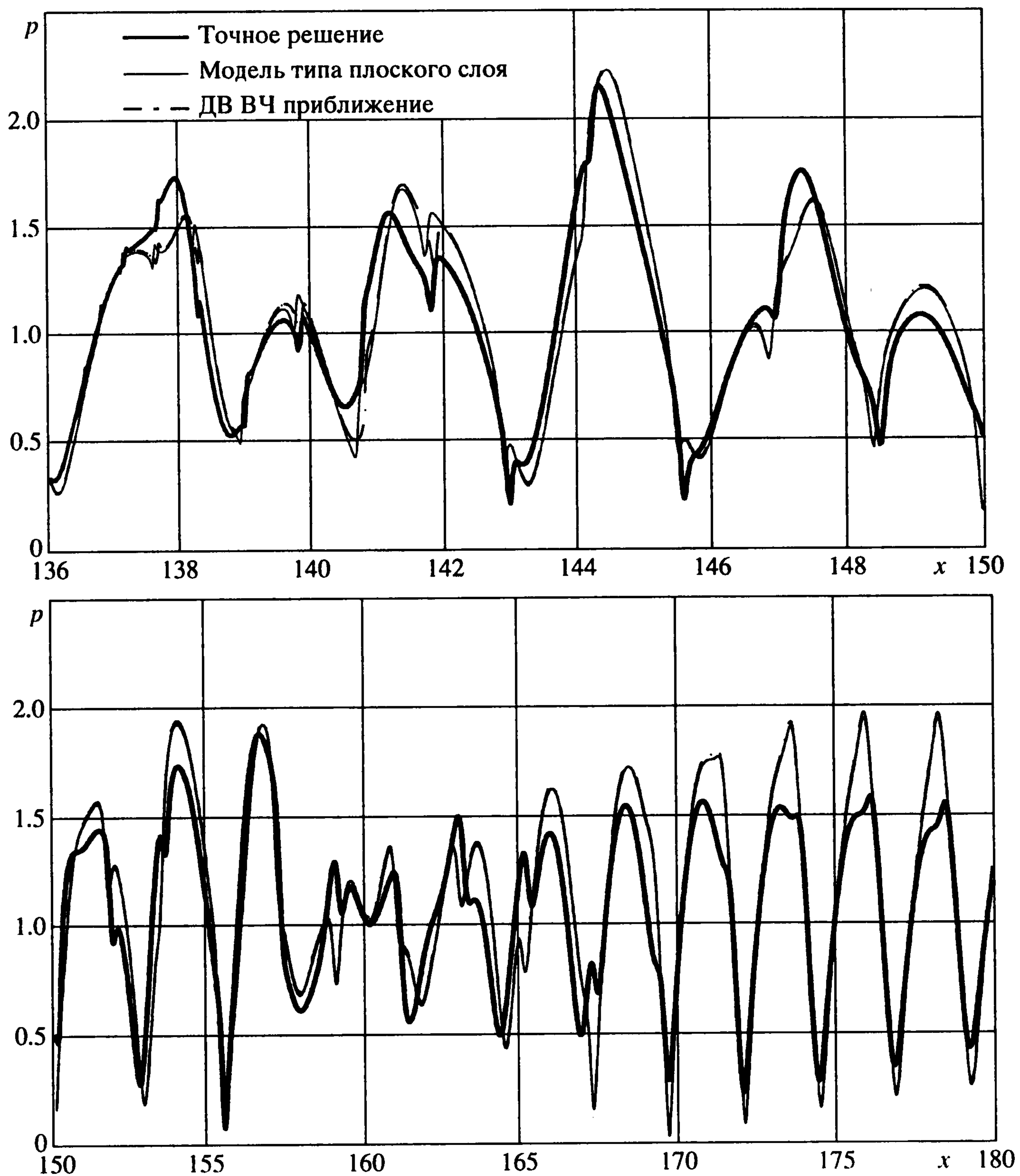
$$\Delta n = |n^{\text{app}} - n^{\text{ex}}| \quad (5.3)$$

где n^{ex} , n^{app} – точное и приближенное значения волнового числа. На фиг. 4 значения n^{app} для волны S_0 соответствуют нечетным номерам кривых, а для волн A и A_0 – четным номерам кривых. На фиг. 4 кривые 1 и 2, рассчитанные для уточненной ТКЛ, показаны тонкой штриховой линией; кривые 3 и 4 для классической ТКЛ – жирной штриховой линией и кривые 5 и 6, полученные для модели типа плоского слоя, – сплошной линией. На фиг. 5 даны погрешности аппроксимации дисперсионных кривых Δn для волны A_1 , где значения n^{app} , полученные для модели типа плоского слоя, отмечены сплошной линией и данные, рассчитанные для ДВ ВЧ-приближения, показаны штрихпунктирной линией.

Фиг. 1–5 иллюстрируют существование областей согласования рассматриваемых асимптотических моделей.

Результаты синтеза функции формы рассеянного давления [8]

$$p = \frac{2}{x} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) B_n \right| \quad (5.4)$$



Фиг. 7

в дальнем поле ($r \rightarrow \infty$) в случае рассеяния назад ($\theta = 0$) представлены на фиг. 6, 7. На фиг. 6 не приведены данные для области, где значения внешнего волнового радиуса x находится в интервале $(20, 60)$. В этой области как уточнения ТКЛ, так и модель типа плоского слоя достаточно точно описывают функцию формы рассеянного давления p . На фиг. 7 при расчете по ДВ ВЧ-приближению решение (4.8) применялось только для $n < 10$. Для вычисления остальных членов ряда (5.4) использовалась модель типа плоского слоя. Такая схема позволяет точнее описать первые резонансы волны типа Лэмба A_1 .

Результаты, представленные на фиг. 1–7, показывают, что предложенный в данной работе подход позволяет достаточно точно аппроксимировать решение задачи рассеяния. Отметим также, что уточненная теория Кирхгофа – Лява, не уступая классической теории в простоте, имеет значительно более широкую область применения.

Как известно, точное решение задачи рассеяния существует только для сферической и круговой цилиндрической оболочек. Развитый выше подход может быть обобщен на оболочки более сложной формы, для которых точного решения не существует.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaplunov J.D., Kossovich L.Yu., Nolde E.V.* Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. N.Y. etc.: Acad. Press, 1998. 226 p.
2. *Berezin V.L., Kossovich L.Yu., Kaplunov J.D.* Synthesis of the dispersion curves for a cylindrical shell on the basis of approximate theories // *Sound and Vibration*. 1995. V. 186. № 1. P. 37–53.
3. *Belov A.V., Kaplunov J.D., Nolde E.V.* A refined asymptotic model of fluids-structure interaction in scattering by elastic shells // *Flow, Turbulence and Combustion*. 1999. V. 61. № 1–4. P. 255–267.
4. *Ковалев В.А.* Применение уточненной асимптотической модели в задаче рассеяния плоской акустической волны сферической оболочкой // *Изв. РАН. МТТ*. 2002. № 2. С. 155–162.
5. *Каплунов Ю.Д.* Высокочастотные напряженно-деформированные состояния малой изменчивости в оболочках, погруженных в жидкость // *ПММ*. 1991. Т. 55. Вып. № 3. С. 478–485.
6. *Вильде М.В., Каплунов Ю.Д., Ковалев В.А.* Развитие приближения типа плоского слоя в задаче рассеяния акустических волн цилиндрической оболочкой // *Изв. РАН. МТТ*. 2002. № 3. С. 180–186.
7. *Goodman R.R., Stern R.* Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells // *J. Acoust. Soc. America*. 1962. V. 34. № 3. P. 338–344.
8. *Векслер Н.Д.* Акустическая спектроскопия. Таллинн: Валгус, 1989. 324 с.

Москва
e-mail: vlad_koval@mail.ru

Поступила в редакцию
20.XII.2001