

УДК 533.6

© 2002 г. О.Б. Хайруллина

### О НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ КОЛЛАПСА СИММЕТРИЧНЫХ ГАЗОВЫХ ПРИЗМ

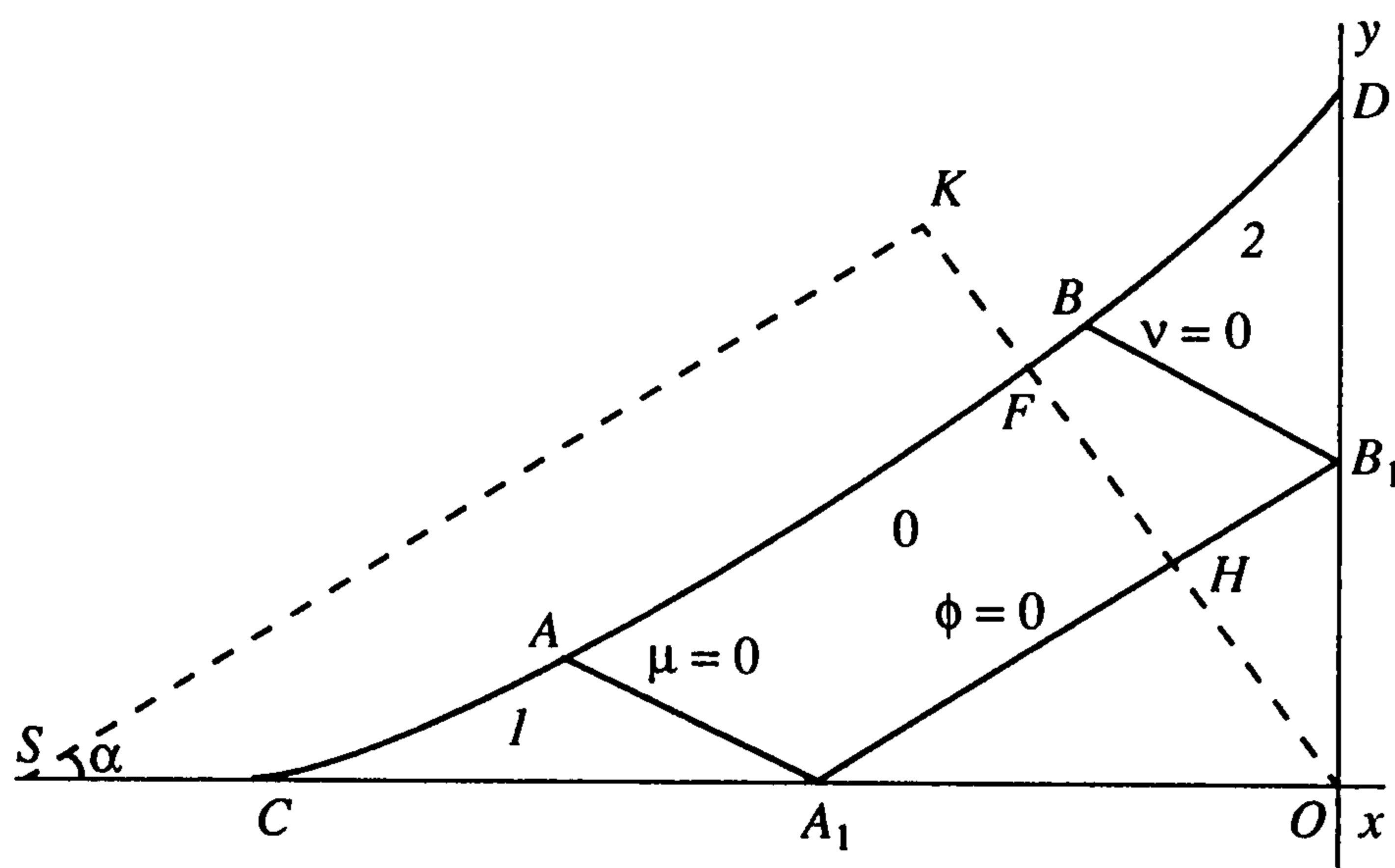
Разработан алгоритм расчета параметров безударно сжимаемого газа симметричных четырехгранных газовых призм по заданному закону движения части поршня с использованием характеристических рядов. Показано, что учет условий симметрии позволяет однозначно определить параметры течения газа и форму поршня в сжимаемой призме. В области возмущенного течения газа выделяются три подобласти, в каждой из которых потенциал скорости строится в виде характеристического ряда. В одной подобласти решение определяется заданным законом движения поршня, в двух других – условиями непротекания газа через плоскости симметрии и непрерывности его параметров на границах стыковки подобластей, являющихся характеристиками. Приведен пример расчета решения, совпадающего в части области с известным автомобилем точным решением, когда показатель адиабаты и величина двугранного угла призмы согласованы. Получено точное выражение для потенциала скорости и формы стенки сжимаемой газовой призмы.

Был построен [1–5] процесс неограниченного безударного сжатия газовых призм, тетраэдров, конусообразных тел специальных форм. Для некоторых форм получены точные решения. Показано, что для достижения больших плотностей газа при сжатии таких конструкций требуется энергии существенно меньше, чем при одномерных сферических сжатиях, используемых для инициирования лазерного термоядерного синтеза.

При исследовании возможностей реализации этих процессов при обжатии с помощью различных физических полей [4, 5] оказалось, что предпочтительнее замкнутые конструкции<sup>1</sup>, в которых отсутствуют неподвижные непроницаемые стенки, например симметричные призмы с двумя плоскостями симметрии. Ниже рассматривается задача о безударном сжатии таких призм, когда известен закон движения некоторой части поршня и решение задачи удовлетворяет общему нелинейному уравнению для потенциала скоростей. При построении решения за основу взят алгоритм, разработанный, но не опубликованный А.Ф. Сидоровым для случая, когда потенциал скорости газа удовлетворял волновому уравнению. Им же было показано, что использование этого уравнения в принципе не позволяет описать неограниченную кумуляцию плотности и энергии газа.

**1. Постановка задачи и метод решения.** Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  возмущенный идеальный газ с уравнением состояния  $p = a^2 \rho^\gamma$  ( $p$  – давление,  $\rho$  – плотность,  $\gamma$  – показатель адиабаты) занимает некоторый объем  $A_1CDB_1$  четырехгранной бесконечной, симметричной относительно плоскостей  $x = 0$ ,  $y = 0$  призмы, четверть сечения которой представлена на фиг. 1;  $\alpha$  – угол наклона грани призмы к плоскости симметрии  $y = 0$ . Газовая призма сжимается симметрично и безударно по заданному закону движения поршня  $CD$  на участке  $AB$ . При произвольном задании закона такое сжатие можно осуществлять до некоторого момента времени  $t = t_k$ .

<sup>1</sup> Гао Я.М. Расчетная реализация безударного сжатия и термоядерного горения двумерных (цилиндрических и осесимметричных) конфигураций DT-газа: Препринт № 21. М.: Ин-т прикладной математики им. М.В. Келдыша, РАН, 2000.



Фиг. 1

Время прохождения звуковой волной  $A_1B_1$  расстояния  $|OH| = 1$  соответствует  $t = 1$ . В покоящемся газе скорость звука  $c = 1$ .

При безударном сжатии возмущенное течение газа потенциально и удовлетворяет нелинейному уравнению для потенциала скоростей  $\Phi(x, y, t)$  [6]

$$\Phi_{tt} - (c^2 - \Phi_x^2)\Phi_{xx} - (c^2 - \Phi_y^2)\Phi_{yy} + 2\Phi_x\Phi_{xt} + 2\Phi_y\Phi_{yt} + 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} = 0 \quad (1.1)$$

$$c^2 = 1 - (\gamma - 1)[\Phi_t - \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)]$$

В области возмущенного течения выделяются три подобласти. Границами подобласти 0 являются участок поршня с заданным законом движения и характеристика  $A_1B_1$ , уравнение

$$\phi(x, y, t) = t - x \sin \alpha + y \cos \alpha - 1 = 0 \quad (1.2)$$

которой получим из (1.1) и условия примыкания к области покоя  $A_1B_1O$ , где компоненты вектора скорости  $u_1 = \Phi_x = 0$ ,  $u_2 = \Phi_y = 0$ . Подобласти 1 и 2 примыкают к плоскостям симметрии и подобласти 0 соответственно по характеристикам  $\mu = m(x, y, t) = 0$ ,  $v = n(x, y, t) = 0$ , проходящим через точки A и B. В общем случае эти характеристики неизвестны и могут быть определены из системы уравнений для характеристической полосы уравнения (1.1) после построения решения в подобласти 0.

Решение строится в виде характеристических рядов: в подобласти 0 по переменной  $\phi$ , в подобласти 1 – по  $\mu$ ,  $\phi$ , в подобласти 2 – по  $v$ ,  $\phi$ .

Для построения решения в подобласти 1 вводятся переменные

$$t_1 = t, \quad \mu = m(x, y, t), \quad \phi(x, y, t) = t - x \sin \alpha + y \cos \alpha - 1, \quad \Psi(\mu, \phi, t_1) = \Phi(x, y, t)$$

после чего уравнение (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} & \Psi_{tt} + \Psi_{\mu\mu} \{m_t^2 - Q + (\gamma - 1)Q\Psi_t + (\gamma + 1)m_t Q\Psi_\mu + [2m_t P + (\gamma - 1)Q]\Psi_\phi + \\ & + \frac{1}{2}(\gamma + 1)Q^2\Psi_\mu^2 + (\gamma + 1)PQ\Psi_\mu\Psi_\phi + [P^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)Q]\Psi_\phi^2\} + \\ & + \Psi_{\phi\phi} \{(\gamma - 1)\Psi_t + [(\gamma - 1)m_t + 2P]\Psi_\mu + (\gamma + 1)\Psi_\phi + [P^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)Q]\Psi_\mu^2 + \\ & + (\gamma + 1)P\Psi_\mu\Psi_\phi + \frac{1}{2}(\gamma + 1)\Psi_\phi^2\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Psi_{\mu r}(2m_r + 2Q\Psi_{\mu} + 2P\Psi_{\phi}) + 2\Psi_{\phi r}(1 + P\Psi_{\mu} + \Psi_{\phi}) + \\
& + \Psi_{\mu\phi}[2(m_r - P) + 2(\gamma - 1)P\Psi_r + 2(Q + \gamma m_r P)\Psi_{\mu} + 2(m_r + \gamma P)\Psi_{\phi} + \\
& + (\gamma + 1)PQ\Psi_{\mu}^2 + 2(Q + \gamma P^2)\Psi_{\mu}\Psi_{\phi} + (\gamma + 1)P\Psi_{\phi}^2] + \\
& + \Psi_{\mu}(m_{rr} - W) + (\gamma - 1)W\Psi_r\Psi_{\mu} + \Psi_{\mu}\Psi_{\phi}[2P_r + (\gamma - 1)W] + \\
& + \Psi_{\mu}^2[W_r + (\gamma - 1)m_r W] - \Psi_{\mu}\Psi_{\phi}^2[P_x \sin \alpha - P_y \cos \alpha - \frac{1}{2}(\gamma - 1)W] + \\
& + \Psi_{\mu}^2\Psi_{\phi}[(\gamma - 1)WP + 2m_x P_x + 2m_y P_y] + \\
& + \Psi_{\mu}^3[m_{xx}m_x^2 + 2m_{xy}m_x m_y + m_{yy}m_y^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)WQ] = 0
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$P = -m_x \sin \alpha + m_y \cos \alpha, \quad Q = m_x^2 + m_y^2, \quad W = m_{xx} + m_{yy}$$

В подобласти 2 уравнение (1.1) записывается аналогично в переменных  $t_1, \phi, v$ . Полученное уравнение и уравнение (1.3) используются при поиске решения в подобласти 0: решение ищется как в переменных  $t_1, \phi, \mu$ , так и в переменных  $t_1, \phi, v$  в зависимости от того, с решением в какой подобласти оно будет состыковываться. Далее выписывается условие согласования найденных решений в подобласти 0.

Потенциал скорости в подобласти 0 представим в виде ряда

$$\Psi(\mu, \phi, t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\mu, t_1)\phi^k \tag{1.4}$$

Так как возмущенное течение газа по характеристике  $\phi = 0$  примыкает к покою, где

$$\Phi = C = \text{const}, \quad \Phi_x = \Psi_{\mu}m_x - \Psi_{\phi} \sin \alpha = 0, \quad \Phi_y = \Psi_{\mu}m_y + \Psi_{\phi} \cos \alpha = 0$$

то

$$\Psi_{\phi}(\mu, 0, t_1) = \Psi_{\mu}(\mu, 0, t_1) = 0 \quad \text{при } m_x \cos \alpha + m_y \sin \alpha \neq 0$$

Учитывая разложение (1.4), получим первые коэффициенты ряда

$$a_0(\mu, t_1) = C = \text{const}, \quad \frac{\partial a_0(\mu, t_1)}{\partial \mu} = a_1(\mu, t_1) = 0 \tag{1.5}$$

Подставим выражение (1.4) в уравнение (1.3) для подобласти 1, перемножим ряды, приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $\phi$ . В результате получим уравнения в частных производных первого порядка для коэффициентов  $a_{k+1}$  ( $k \geq 1$ )

$$\frac{\partial a_{k+1}}{\partial t_1} + (m_r - P)\frac{\partial a_{k+1}}{\partial \mu} + (k+1)(\gamma+1)a_2 a_{k+1} = F_k \tag{1.6}$$

Правые части  $F_k$  уравнений зависят от  $a_i$ , где  $i \leq k$ .

При  $k = 0$  уравнение (1.6) в силу соотношений (1.5) удовлетворяется автоматически. При  $k = 1$  с учетом (1.5) получим

$$\frac{\partial a_2}{\partial t_1} + R\frac{\partial a_2}{\partial \mu} + (\gamma+1)a_2^2 = 0; \quad R = m_r + m_x \sin \alpha - m_y \cos \alpha \tag{1.7}$$

Сделав замену переменных

$$\mu_0 = \mu, \quad t_0 = \mu - Rt_1 \tag{1.8}$$

получим решение уравнения (1.7)

$$a_2(\mu_0, t_0) = \frac{R}{(\gamma + 1)[\mu_0 - f_2(t_0)]} = \frac{R}{(\gamma + 1)T(t_0, \mu_0)} \quad (1.9)$$

зависящее от произвольной функции  $f_2(t_0)$ . Она должна определяться из краевого условия – условия непротекания на участке поршня  $AB$  (фиг. 1) с заданным уравнением движения.

Для коэффициента  $a_{k+1}$  ( $k \geq 2$ ) после замены переменных (1.8) в (1.6) будет иметь дифференциальное уравнение

$$R \frac{\partial a_{k+1}(\mu_0, t_0)}{\partial \mu_0} + (k+1)(\gamma+1)a_2(\mu_0, t_0)a_{k+1}(\mu_0, t_0) = \frac{F_k(\mu_0, t_0)}{2(k+1)} \quad (1.10)$$

Его решение

$$a_{k+1} = a_2^{k+1} \left( \frac{\gamma+1}{R} \right)^{k+1} \left[ \frac{1}{2(k+1)(\gamma+1)^{k+1}} \int \frac{R^k F_k}{a_2^{k+1}} d\mu_0 - f_{k+1}(t_0) \right] \quad (1.11)$$

зависит от произвольной функции  $f_{k+1}(t_0)$ , также определяемой из краевого условия. Рекуррентная формула (1.11) позволяет последовательно вычислять коэффициенты ряда (1.4). Так, при  $k=2$  из уравнения (1.10) в переменных  $t_0, \mu_0$  с учетом соотношений (1.5), (1.9) будем иметь

$$a_3 = \frac{1}{6(\gamma+1)T^3} \{ \int [f_2'' B_1 T + 2(f_2' - 1)^2 B_1] d\mu_0 + (f_2' - 1) \int B_2 d\mu_0 \} + f_3(t_0) \quad (1.12)$$

$$B_1 = (m_x \cos \alpha + m_y \sin \alpha)^2, \quad B_2 = -6PR - (m_{tt} - m_{xx} - m_{yy})T$$

$a_3$  зависит от параметров характеристики  $\mu = m(t, x, y)$  и в общем случае находится численно.

Аналогично выписываются уравнения и их решения при  $k \geq 3$ .

Решение в подобласти 1 строится в виде двойного ряда

$$\Psi(\mu, \phi, t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} H_{k,j}(t_1) \mu^k \phi^j \quad (1.13)$$

Из условия стыковки решений в подобластях 1 и 0 по характеристике  $\mu = 0$  при  $a_k(0, t_1) = a_k(0, t_0) \Big|_{\mu=0}$  получим связь

$$H_{0,j}(t_1) = a_j(0, t_1) \quad (1.14)$$

При этом из соотношений (1.14) и (1.5) следует

$$H_{0,0}(t_1) = a_0(0, t_1) = C = \text{const}, \quad H_{0,1}(t_1) = a_1(0, t_1) = 0 \quad (1.15)$$

При  $y = 0$  должно быть выполнено условие непротекания газа через плоскость симметрии

$$\Phi_y(x, 0, t) = \Psi_\mu(\mu^0, \phi^0, t_1) m_y(0, x, t) + \Psi_\phi(\mu^0, \phi^0, t_1) \cos \alpha = 0 \quad (1.16)$$

где

$$\phi^0 = t - x \sin \alpha - 1, \quad \mu^0 = \mu(x, 0, t)$$

Исключим  $x$  и разложим  $\mu^0$  в ряд по  $\phi^0$

$$\mu^0 = \mu \left( 0, \frac{t - \phi^0 - 1}{\sin \alpha}, t \right) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(t) (\phi^0)^l \quad (1.17)$$

Так как  $\mu = 0$  и  $\phi = 0$  пересекаются на оси  $y = 0$ , то  $c_0 = 0$ .

Подставим разложения (1.13), (1.17) в условие (1.16), приравняем нулю коэффициенты при  $(\phi^0)^k$  и получим условие на плоскости симметрии  $y = 0$

$$m_y|_{y=0} \sum_{j=0}^k (k-j+1)H_{k-j+1,j} \sum_{l=0}^{\infty} C_{k-j,l} = -\cos \alpha \sum_{j=0}^k (j+1)H_{k-j,j+1} \sum_{l=0}^{\infty} C_{k-j,l} \quad (1.18)$$

где

$$C_{kj} = \sum_{l=0}^j C_{k-1,l} c_{j-l} \quad (k \geq 3), \quad C_{2j} = \sum_{l=0}^j c_l c_{j-l}, \quad C_{1j} = c_j, \quad \sum_{l=0}^{\infty} C_{0,l} = 1$$

Из условия (1.18) при  $k = 0$  и  $M_y = m_y|_{y=0} \neq 0$  следует

$$H_{1,0} = 0 \quad (1.19)$$

Для нахождения следующих коэффициентов ряда в уравнение (1.3) подставляется разложение (1.13), перемножаются ряды, приравниваются нулю коэффициенты при  $\mu^k \phi^j$ . В результате получим уравнение, связывающее  $H_{ij}$  ( $i, j \leq k+2$ ) (из-за громоздкости оно не приводится).

Оказалось, что группы коэффициентов  $H_{kj}$  для  $n = k + j$  однозначно определяются из систем линейных алгебраических уравнений, состоящих из условия стыковки (1.14) при  $j = n + 2$ , условия симметрии (1.18) при  $k = n + 1$  и  $n + 1$  уравнений для  $0 \leq k \leq n$  вида

$$(k+2)(m_t^2 - Q)H_{k+2,n-k} + 2(n-k+1)(m_t - P)H_{k+1,n-k+1} = S_{k,j} \quad (1.20)$$

где  $S_{k,j}$  – выражение, зависящее от  $H_{i,l}$  ( $i, l \geq 0, i + l \leq n + 1$ ).

Так, для  $n = 0$  система уравнений при учете найденных коэффициентов (1.15), (1.19) состоит из соотношения (1.14) при  $j = 2$ , условия симметрии (1.18) при  $k = 1$

$$m_y|_{y=0} [2H_{2,0} + H_{1,1}] = -\cos \alpha [H_{1,1} + 2H_{0,2}]$$

и уравнения (1.20) для  $k = 0$

$$(m_t^2 - Q)H_{2,0} = -(m_t - P)H_{1,1}$$

При  $m_t^2 - Q \neq 0$  из системы уравнений находим

$$H_{1,1} = -2Y, \quad H_{2,0} = 2Y(m_t - P)(m_t^2 - Q)$$

где

$$Y = \frac{H_{0,2} \cos \alpha}{M_y[-2(m_t - P)/(m_t^2 - Q) + 1] + \cos \alpha}$$

В автомобильном случае при  $m_t^2 - Q = 0$  и  $m_t - P \neq 0$

$$H_{1,1} = 0, \quad H_{2,0} = -H_{0,2} \cos \alpha / M_y \quad (1.21)$$

Для определения следующей группы коэффициентов выписываются уравнения (1.20) для  $n = k + j = 1$ , условие симметрии (1.18) при  $k = 2$  и условие стыковки (1.14) при  $j = 3$  и учете уже известных  $H_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, 2$ ). В результате получим систему четырех алгебраических уравнений для четырех неизвестных коэффициентов  $H_{0,3}, H_{1,2}, H_{2,1}, H_{3,0}$

$$H_{0,3}(t_1) = a_3(0, t_1)$$

$$2(m_t - P)H_{1,2} + (m_t^2 - Q)H_{2,1} = F_{0,1}$$

$$2(m_t - P)H_{2,1} + 3(m_t^2 - Q)H_{3,0} = F_{1,0} \quad (1.22)$$

$$(M_y + 2 \cos \alpha)H_{1,2} + (2M_y + \cos \alpha)H_{2,1} + 3M_y H_{3,0} = F_c$$

где

$$\begin{aligned} F_{0,1} &= -2 \frac{\partial H_{0,2}}{\partial t_1} - m_t \frac{\partial H_{1,1}}{\partial t_1} - 2(\gamma + 1)H_{0,2}^2 - (\gamma + 1)[m_t + 2P]H_{0,2}H_{1,1} - \\ &- 2[2m_t P + (\gamma - 1)Q]H_{0,2}H_{2,0} - (\gamma + 1)m_t Q H_{1,1}H_{2,0} - (Q + \gamma m_t P)H_{1,1}^2 - \\ &- \frac{1}{2}(m_{tt} - m_{xx} - m_{yy})H_{1,1} \\ F_{1,0} &= -\frac{\partial H_{1,1}}{\partial t_1} - 2m_t \frac{\partial H_{2,0}}{\partial t_1} - (\gamma + 1)H_{0,2}H_{1,1} - \\ &- 2[(\gamma - 1)m_t + 2P]H_{0,2}H_{2,0} - (m_t + \gamma P)H_{1,1}^2 - \\ &- (\gamma + 1)[2m_t P + Q]H_{1,1}H_{2,0} - 2(\gamma + 1)m_t Q H_{2,0}^2 - (m_{tt} - m_{xx} - m_{yy})H_{2,0} \\ F_c &= -3 \cos \alpha H_{0,3} \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, найдем  $H_{ij}$  для  $i + j = 3$ .

Далее последовательно при  $n = k + j$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , выписываются системы уравнений для коэффициентов  $H_{k,j}$  ( $k + j = i + 1$ ), зависящих от  $a_l$  ( $l \leq i + 1$ ), которые определяются заданным краевым режимом – законом движения поршня в подобласти 0.

Для построения решения в подобласти 2 вводятся переменные

$$t_1 = t, \quad v = n(x, y, t), \quad \phi(x, y, t) = t - x \sin \alpha + y \cos \alpha - 1, \quad \Lambda(v, \phi, t_1) = \Phi(x, y, t)$$

Уравнение (1.1) в этой подобласти будет иметь вид (1.3), но при этом следует заменить  $\mu$  на  $v$ ,  $m$  на  $n$ , а  $\Psi$  на  $\Lambda$ .

Аналогично построению решения в подобласти 1 потенциал скорости ищется в виде двойного ряда

$$\Lambda(v, \phi, t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} G_{k,j}(t_1) v^k \phi^j \quad (1.23)$$

При этом в подобласти 0 решение перестраивается в виде ряда

$$\Lambda(v, \phi, t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(v, t_1) \phi^k \quad (1.24)$$

с коэффициентами  $b_k(v, t_1)$ , зависящими от характеристической переменной  $v$  и удовлетворяющими уравнениям и соотношениям (1.5)–(1.11) с заменой в них  $a$ ,  $\mu$ ,  $m$  соответственно на  $b$ ,  $v$ ,  $n$ . Для согласованности полученных решений в подобласти 0 из соотношений (1.4), (1.24) следует равенство

$$a_k(\mu, t_1) = b_k(v, t_1) \quad (1.25)$$

В подобласти 2 должно выполняться условие симметрии

$$\Phi_x(0, y, t) = \Lambda_v n_x - \Lambda_\phi \sin \alpha = 0$$

которое после исключения  $y$ , разложения в ряд

$$v^0 = v\left(\frac{\phi^0 - t + 1}{\cos \alpha}, 0, t\right) = \sum_{l=0}^{\infty} d_l(t) (\phi^0)^l$$

и подстановки ряда (1.23) будет иметь вид

$$n_x |_{x=0} \sum_{j=0}^k (k-j+1)G_{k-j+1,j} \sum_{l=0}^{\infty} D_{k-j,l} = \sin \alpha \sum_{j=0}^k (j+1)G_{k-j,j+1} \sum_{l=0}^{\infty} D_{k-j,l}$$

где

$$D_{kj} = \sum_{l=0}^{\infty} d_{j-l} D_{k-1,l}, \quad (k \geq 3), \quad D_{2j} = \sum_{l=0}^j d_l d_{j-l}, \quad D_{1j} = d_j, \quad \sum_{l=0}^{\infty} D_{0,l} = 1$$

Уравнения и соотношения для  $G_k$  будут аналогичны уравнениям и соотношениям для  $H_k$ , но при учете другого условия симметрии.

**2. Пример расчета.** В качестве примера и теста рассмотрим безударное сжатие призмы по заданному закону движения поршня  $CD$  на участке  $AB$  (фиг. 1), когда в подобластях 0 и 1 течение газа автомодельно.

Ранее [1–3] была рассмотрена задача адиабатического сжатия с постоянной энтропией газовой призмы с сечением  $OSK$  при согласованном с показателем адиабаты  $\gamma$  углом  $\alpha$ , удовлетворяющем соотношениям

$$\sin \alpha = \sqrt{3-\gamma}/2, \quad \cos \alpha = \sqrt{\gamma+1}/2$$

Точное выражение потенциала в подобласти 0 в характеристических переменных имеет вид [2]

$$\Phi = \frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{\gamma+1} \frac{\phi^2}{\tau}, \quad \tau = \frac{t}{t_*} - 1 < 0 \quad (2.1)$$

$t_*$  – время прохождения поршнем расстояния  $KO$ . Следуя известной процедуре [1], выписывается и точное решение в подобласти 1

$$\Phi = \frac{1}{\gamma-1} + \frac{\phi^2 + \mu^2}{(\gamma+1)\tau} \quad (2.2)$$

Было получено [3] уравнение криволинейной части  $CA$  поршня  $CF$

$$\left[ x + \frac{\sqrt{3-\gamma}}{\gamma-1} \tau \right] \left[ -y + \frac{\sqrt{\gamma+1}}{\gamma-1} \tau \right] = \frac{\sqrt{(\gamma+1)^3}}{(\gamma-1)^2 \sqrt{3-\gamma}} (-\tau)^{4/(\gamma+1)} \quad (2.3)$$

после чего нетрудно выписать и уравнение плоской его части  $AF$

$$\frac{\sqrt{3-\gamma}}{2} x - \frac{\sqrt{\gamma+1}}{2} y + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} (-\tau)^{2/(\gamma+1)} + \frac{2}{\gamma-1} \tau = 0 \quad (2.4)$$

К некоторому моменту времени  $t_n$  поршень пройдет вдоль стенки  $KO$  путь, равный  $KF$ , и займет положение  $CAF$ . Для теста это положение поршня берется за исходное. Для полной задачи начальному положению поршня будет соответствовать  $CAFBD$ .

При использовании в качестве теста автомодельного решения, когда поршень при  $t = 0$  занимал положение  $SK$  и  $|KO| = 1$ , переход к безразмерным величинам должен быть проведен так, чтобы положение поршня  $CAF$  соответствовало времени  $t_n = 0$ , а линейные размеры призмы соответствовали  $|OH| = 1$ . В этом случае связь между старыми  $x, y, \tau$  и новыми  $x_n, y_n, \tau_n$  безразмерными переменными будет следующей:

$$x = (1 - l_0 / L_0) x_n, \quad y = (1 - l_0 / L_0) y_n, \quad \tau = (1 - t_n / t_*) \tau_n$$

где  $L_0$  – длина  $OK$ ,  $l_0$  – длина  $KH$ . После введения новых переменных уравнения (2.1)–(2.4) сохраняют прежний вид, но будут учитывать сдвиг по времени.

Будем считать, что на участке  $AB$  задан закон движения поршня (2.4). В характеристических переменных (1.2) условие непротекания

$$U = Z_t + Z_x u_1 + Z_y u_2 = 0 \quad (2.5)$$

на поршне (2.4)

$$Z = \phi(x, y, \tau) - \Pi(\tau), \quad \Pi(\tau) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} [\tau + (-\tau)^{2/(\gamma+1)}] \quad (2.6)$$

примет вид

$$U(t, \mu, \phi) = \Psi_\phi - \frac{\gamma-1}{2} \Psi_\mu + 1 - \Pi'(\tau) = 0$$

Подставив  $\Psi$  в виде ряда (1.4), получим

$$U(t, \mu, \Pi(\tau)) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (k+1) a_{k+1}(\mu, t) - \frac{\gamma-1}{2} \frac{\partial a_k(\mu, t)}{\partial \mu} \right] \Pi^k(\tau) - \Pi'(\tau) + 1 = 0 \quad (2.7)$$

причем будем иметь в виду соотношения (1.5).

При  $t = 0$  равенство (2.7) удовлетворяется автоматически.

Для нахождения  $a_2$  в равенство, полученное дифференцированием соотношения (2.7) по  $t$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (k+1) \frac{\partial a_{k+1}(\mu, t)}{\partial t} - \frac{\gamma-1}{2} \frac{\partial^2 a_k(\mu, t)}{\partial t \partial \mu} \right] \Pi^k(\tau) + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (k+2) a_{k+2}(\mu, t) - \frac{\gamma-1}{2} \frac{\partial a_{k+1}(\mu, t)}{\partial \mu} \right] (k+1) \Pi^k(\tau) \Pi'(\tau) - \\ & - \Pi''(\tau) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

подставим  $t = 0$  и, учитывая найденные  $a_0, a_1$ , получим

$$a_2(\mu, 0) = \frac{1}{2} \Pi''(-1) = -\frac{1}{\gamma+1} = C_2 = \text{const} \quad (2.9)$$

Из соотношений (1.9) следует

$$a_2(\mu, t_0) = \frac{1}{2[\mu - f_2(t_0)]}, \quad t_0 = \mu - \frac{\gamma+1}{2} t$$

и из равенства (2.9) имеем

$$a_2(\mu, t) |_{t=0} = a_2(\mu, t_0) |_{t=0} = a_2(\mu, \mu) = \frac{1}{2[\mu - f_2(\mu)]} = C_2 = -\frac{1}{\gamma+1} = \text{const}$$

Отсюда

$$f_2(\mu) = \mu + \frac{\gamma+1}{2}, \quad a_2(\mu, t) = a_2(\mu_0, t_0) = \frac{1}{2[\mu_0 - f_2(t_0)]} = \frac{1}{(\gamma+1)(t-1)} \quad (2.10)$$

Продифференцировав равенство (2.8) по  $t$  и положив  $t = 0$ , получим  $a_3(\mu, 0) = 0$ . Из соотношения (1.12) при учете первого выражения (2.10) имеем

$$a_3(\mu_0, t_0) = -f_3(t_0) / [\mu_0 - f_2(t_0)]^3$$

Аналогичные действия, что и при поиске  $f_2, a_2$  дают

$$f_3(\mu) = 0, \quad a_3(\mu, t) = 0 \quad (2.11)$$

При вычислении следующих коэффициентов  $a_l$  ряда, каждый раз дифференцируется последняя производная условия непротекания по  $t$ , полагается  $t = 0$  и учитываются найденные  $a_k$  ( $k < l$ ). В результате находим

$$a_l(\mu, t) = 0, \quad l > 3 \quad (2.12)$$

Подставив найденные  $a_k$  в ряд (1.4), получим решение в подобласти 0

$$\Psi(\mu, \phi, t) = a_0 + a_2 \phi^2 + \dots = a_0 + \frac{1}{(\gamma+1)(t-1)} \phi^2$$

совпадающее с точным (2.1) при  $a_0 = C = 1/(\gamma-1)$ .

Для построения решений в подобластях 1, 2 требуется знание уравнений характеристик  $\mu(x, y, \tau) = 0, \nu(x, y, \tau) = 0$ , вдоль которых искомое решение будет примыкать к найденному решению в подобласти 0.

Выпишем систему уравнений для характеристической полосы [7], полагая  $q(x, y, \tau) = x - X(y, \tau) = 0$ , где  $q$  — какая-либо из характеристических переменных  $\mu, \nu, \phi$ . Исключим  $c^2$  и получим уравнение

$$\frac{dX_y}{d\tau} = \frac{1}{(\gamma+1)\tau} \left[ \frac{\sqrt{3-\gamma}}{2} X_y - \frac{\sqrt{\gamma+1}}{2} \right] \left[ \sqrt{3-\gamma} + \sqrt{\gamma+1} X_y \pm (\gamma-1) \sqrt{1+X_y^2} \right]$$

Допустим, что обращается в нуль выражение в первых квадратных скобках. Оказалось, что этот случай соответствует характеристике  $\phi(x, y, \tau) = 0$  (1.2). Из равенства нулю выражения во вторых квадратных скобках с нижним знаком (минус) получим ту же характеристику.

Характеристику

$$\mu(x, y, \tau) = \tau - \frac{\sqrt{3-\gamma}}{2} x - \frac{\sqrt{\gamma+1}}{2} y = 0 \quad (2.13)$$

получим из условия обращения в нуль второго выражения с верхним знаком (плюс), решения других уравнений полосы и условия пересечения ее с характеристикой  $\phi = 0$  на оси  $y = 0$ . Если рассмотреть условие ее пересечения с характеристикой  $\phi = 0$  на оси  $x = 0$ , то получим характеристику

$$\nu(x, y, \tau) = -\tau - \frac{\sqrt{3-\gamma}}{2} x - \frac{\sqrt{\gamma+1}}{2} y = 0 \quad (2.14)$$

Допустим, что оба выражения не обращаются в нуль, тогда система уравнений для характеристической полосы после ряда преобразований сводится к соотношению

$$F(X_y) = \left[ \frac{\sqrt{\gamma+1} - \sqrt{3-\gamma} X_y}{-\sqrt{3-\gamma} - \sqrt{\gamma+1} X_y + (\gamma-1) \sqrt{1+X_y^2}} \frac{2(\gamma-1)}{\sqrt{\gamma+1} \sqrt{3-\gamma}} \right] - \left( \frac{\zeta^-(X_y) \sqrt{3-\gamma} + 2}{\zeta^+(X_y) \sqrt{3-\gamma}} \right)^{(\gamma-1)/2} = 0$$

где

$$\zeta^\pm(X_y) = \sqrt{\gamma+1} \left( 1 + \sqrt{1+X_y^2} \right) - (\sqrt{3-\gamma} \pm 2) X_y$$

и двум уравнениям

$$\frac{dy}{d\tau} = \left( \frac{1}{\sqrt{\gamma+1}} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{X_y}{\sqrt{1+X_y^2}} \right) \varphi - \frac{X_y}{\sqrt{1+X_y^2}}$$

$$\frac{dX}{d\tau} = -\frac{\sqrt{3-\gamma}}{\gamma+1} \varphi + \left( 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \varphi \right) \frac{1}{\sqrt{1+X_y^2}}$$

где

$$\varphi = 1 + \frac{\sqrt{\gamma+1}}{2\tau} y - \frac{\sqrt{3-\gamma}}{2\tau} X(y, \tau)$$

Функции  $F(X_y)$  и  $X_y$  раскладываются в ряды Тейлора вдоль характеристики в окрестности точки  $B_1$ , где  $q = \varphi_0$ . Оказалось, что в точке  $B_1$

$$F = 0, \quad F'_{X_y} \neq 0 \quad (X_y)'_v = 0$$

в силу чего функция  $X(y, \tau)$  определяется точно

$$X_y(y, \tau) = -\sqrt{\frac{\gamma+1}{3-\gamma}}, \quad X(y, \tau) = -\frac{2}{\sqrt{3-\gamma}} \left( \tau + \frac{\sqrt{\gamma+1}}{2} y \right)$$

и соответствует характеристике  $v = 0$  (2.14).

Если функции  $F(X_y)$  и  $X_y$  разложить в ряды вдоль характеристики в окрестности точки  $A_1$ , то получим характеристику  $\mu = 0$  (2.13).

В подобласти 1 потенциал скоростей ищется в виде двойного ряда (1.13). Из соотношений (1.15), (1.5), (1.19) следует

$$H_{0,0} = a_0(0, t) = C = \text{const}, \quad H_{0,1} = H_{1,0} = 0$$

Из соотношения (1.14) при  $j = 2$ , второго выражения (2.10) и соотношений (1.21), (2.11) получим

$$H_{2,0}(t) = H_{0,2}(t) = \frac{1}{(\gamma+1)(t-1)}, \quad H_{1,1} = 0, \quad H_{0,3}(t) = a_3(0, t) = 0$$

Система уравнений (1.22) при  $m_r^2 - Q = 0$  для коэффициентов  $H_{1,2}, H_{2,1}, H_{3,0}$  будет иметь вид

$$(1-P)H_{1,2} = -\frac{\partial H_{0,2}}{\partial t} - (\gamma+1)H_{0,2}^2 - (\gamma-1+2P)H_{2,0}^2$$

$$(1-P)H_{2,1} = -\frac{\partial H_{2,0}}{\partial t} - (\gamma-1+2P)H_{0,2}^2 - (\gamma+1)H_{2,0}^2$$

$$(M_y + 2 \cos \alpha)H_{1,2} + (2M_y + \cos \alpha)H_{2,1} + 3M_y H_{3,0} = -3 \cos \alpha H_{0,3}$$

откуда, учитывая равенство  $H_{0,2} = H_{2,0}$ , получим  $H_{1,2} = H_{2,1} = 0$ . Из третьего уравнения при  $M_y = -\cos \alpha = -\sqrt{\gamma+1}/2$  следует

$$H_{0,3}(t) = H_{3,0}(t) = 0$$

Из соотношений (1.14), (2.12) имеем

$$H_{0,4}(t) = a_4(0, t) = 0$$

Выпишем систему уравнений для коэффициентов  $H_{il}$ ,  $i + l = 4$  при  $k, j = 0, 2; 1, 1; 2, 0$ . Получим

$$\begin{aligned}
 & 6RH_{1,3} + 4(\gamma + 1)H_{0,2}^3 + 8\left[P^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\right]H_{2,0}^3 + \\
 & + 2(\gamma + 3)H_{0,2} \frac{\partial H_{0,2}}{\partial t_1} + 2(\gamma - 1)H_{2,0} \frac{\partial H_{0,2}}{\partial t_1} + \frac{\partial^2 H_{0,2}}{\partial t_1^2} = 0 \\
 & RH_{2,2} + 2(\gamma + 1)PH_{0,2}^3 + PH_{2,0} \frac{\partial H_{0,2}}{\partial t_1} + PH_{0,2} \frac{\partial H_{2,0}}{\partial t_1} = 0 \\
 & 6RH_{3,1} + 8\left[P^2 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\right]H_{0,2}^3 + 4(\gamma + 1)H_{2,0}^3 + \\
 & + 2(\gamma - 1)H_{0,2} \frac{\partial H_{2,0}}{\partial t_1} + 2(\gamma + 3)H_{2,0} \frac{\partial H_{2,0}}{\partial t_1} + \frac{\partial^2 H_{2,0}}{\partial t_1^2} = 0
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $H_{1,3} = H_{2,2} = H_{3,1} = 0$ . Из условия симметрии вытекает, что  $H_{4,0} = 0$ .

Продолжая вычисления следующих групп коэффициентов, получим, что все коэффициенты обращаются в нуль. В результате в подобласти 1 потенциал скорости, построенный по заданному закону движения плоской части поршня, совпадает с точным решением (2.2).

Найдем в подобласти 1 закон  $F(x, y, t) = 0$  движения криволинейной части  $CA$  поршня  $CD$ . Условие непротекания на нем приводит к линейному однородному уравнению (2.5) в частных производных первого порядка для неизвестной функции  $F$  от трех независимых переменных. Характеристики, покрывающие поверхность  $F = 0$ , удовлетворяют уравнениям

$$dx = u_1 d\tau, \quad dy = u_2 d\tau$$

или

$$dx = [(3 - \gamma)x - 2\sqrt{3 - \gamma}\tau]H_{0,2}(\tau)d\tau, \quad dy = (\gamma + 1)yH_{0,2}(\tau)d\tau$$

Комбинируя эти уравнения, получим полные дифференциалы, интегралы которых имеют вид

$$c_1 = \frac{y}{\tau}, \quad c_2 = \tau^{2\kappa - 1}x + \xi\tau^{2\kappa}; \quad \kappa = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \xi = \frac{\sqrt{3 - \gamma}}{\gamma - 1}$$

где  $c_1, c_2$  – произвольные постоянные. Свяжем  $c_1, c_2$  функциональной зависимостью  $c_2 = \omega(c_1)$  и найдем  $\omega$  из условия прохождения кривой через точку  $A$  – точку пересечения части  $AB$  поршня, где известен закон движения, с характеристикой  $\mu = 0$ ,

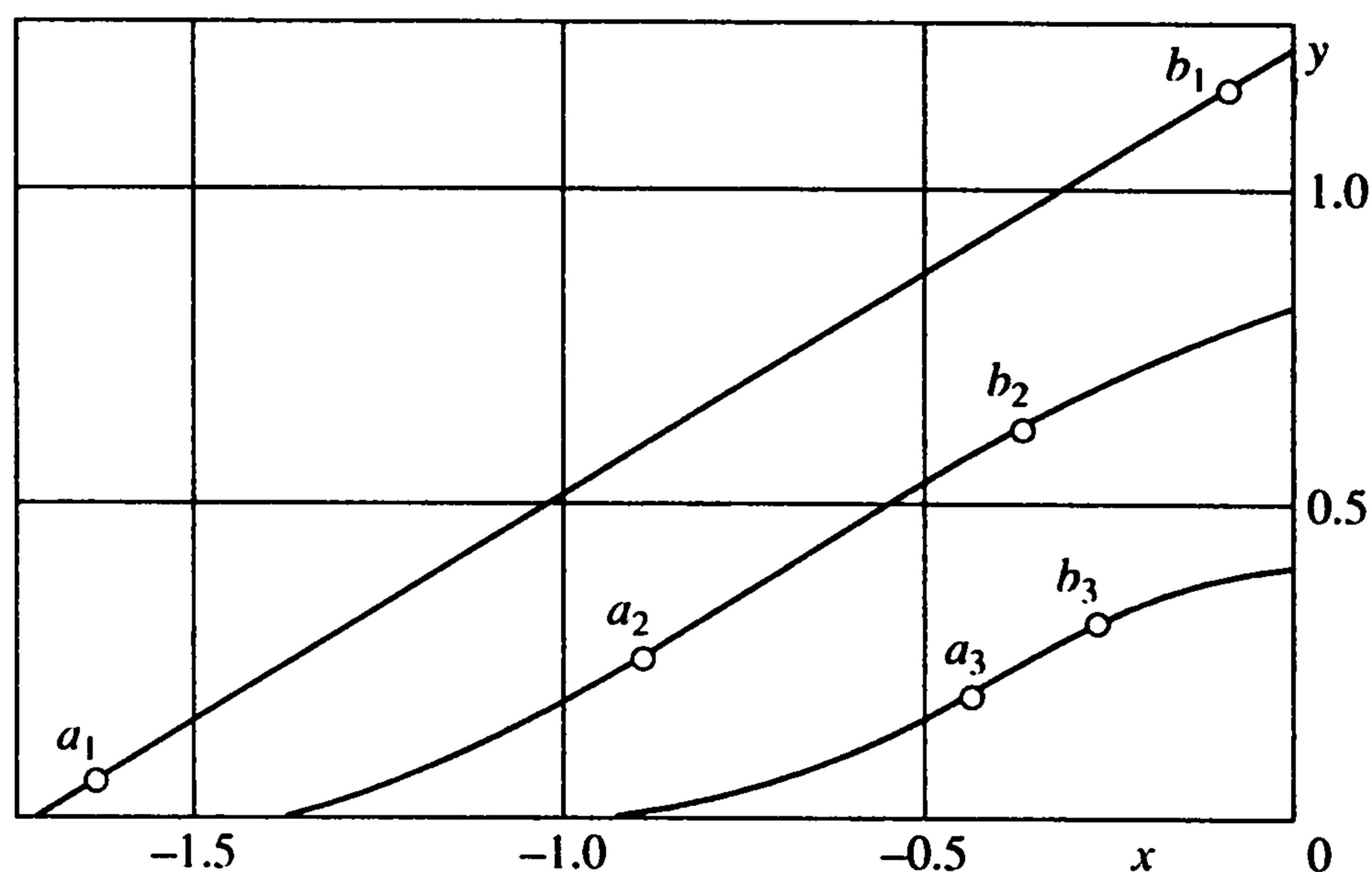
$$x_A = -[\xi\tau + \eta(-\tau)^{1-\kappa}], \quad y_A = \sigma[\tau + (-\tau)^{1-\kappa}]$$

$$\eta = \frac{\gamma + 1}{(\gamma - 1)\sqrt{3 - \gamma}}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{\gamma + 1}}{\gamma - 1}$$

Связь между  $c_1, c_2$  будет иметь вид

$$c_2(1 - c_1/\sigma) = \eta$$

Подставив  $c_1, c_2$  из интегралов, получим уравнение поршня в подобласти 1, совпадающее с (2.3).



Фиг. 2

Проделав в подобласти 2 вычисления, аналогичные вычислениям в подобласти 1, но с учетом соответствующего условия симметрии

$$-\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} (k-j+1) G_{k-j+1,j} = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} (j+1) G_{k-j,j+1}$$

а также условий согласованности (1.25) и стыковки решения с решением в подобласти 0, получим потенциал скорости в этой подобласти

$$\Psi(t, \phi, v) = C + \frac{1}{(\gamma+1)(t-1)} (\phi^2 + v^2)$$

Учитывая условие непротекания, найдем уравнение поршня

$$2\kappa + 1 - 2V + 2 \ln(2V) = \kappa \left[ \sqrt{\gamma+1} \frac{y}{\tau} - 2 \ln(-\tau) \right]$$

где

$$V = \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\eta} (-\tau)^{2\kappa-1} x} \right]^{-1}$$

Форма поршня, рассчитанная по заданному закону его движения на участке  $a_i b_i$ , взятому из точного решения для моментов времени  $t_i = 0.1, 0.7, 0.9$ , приведена на фиг. 2.

Итак, при безударном симметричном сжатии призм закон движения поршня следует задавать только на его некоторой части. На участках, прилегающих к плоскостям симметрии, закон их движения определяется однозначно законом движения средней части поршня и условием непротекания на плоскости симметрии. Получено новое точное выражение для потенциала скорости и формы стенки сжимаемой газовой призмы с двумя плоскостями симметрии в случае, когда газ идеальный и угол  $\alpha$  связан с показателем адиабаты  $\gamma$  определенным соотношением.

Предложенный алгоритм можно использовать для вычисления начальных данных при расчете параметров сжимаемого газа в симметричной призме каким-либо численным методом.

Автор благодарит Л.И. Рубину за советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-15-96042, 02-01-00047).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сидоров А.Ф., Хайруллина О.Б. Процессы безударного конического сжатия и разлета газа // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 81–92.
2. Сидоров А.Ф. Оценки предельных степеней кумуляции энергии при безударном сжатии газа // Докл. РАН. 1993. Т. 329. № 4. С. 444 – 448.
3. Sidorov A.F. Mathematical modelling of the processes of unshocked gas compression // Russ. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. 1995. V. 10. № 3. P. 255–276.
4. Сидоров А.Ф. Исследование особенностей нестационарных конических течений газа // Докл. РАН. 1994. Т. 335. № 6. С. 732–735.
5. Сидоров А.Ф. Математическое моделирование процессов сверхсильного сжатия газов // Тез. докл. 7-й Всерос. шк.-семинара “Современные проблемы математического моделирования”: Ростов н/Д: Изд-во РГУ, 1997. С. 127–129.
6. Mises R. Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow. N.Y. Acad. Press, 1958. = Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит. 1961. 588 с.
7. Courant R. Partial Differential Equations. N.Y.; L.: Inter science, 1962 = Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.

Екатеринбург  
e-mail: kob@imm.uran.ru

Поступила в редакцию  
22.X.2001