

УДК 532.516:531.34

© 2002 г. С.М. Зеньковская, А.Л. Шлейкель

**ВЛИЯНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ВИБРАЦИИ
НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ КОНВЕКЦИИ МАРАНГОНИ
В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ**

Методом осреднения уравнений конвекции исследуется влияние высокочастотных поступательных гармонических колебаний на возникновение термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости, ограниченном сверху свободной поверхностью, снизу – твердой стенкой. Показано, что продольные колебания не влияют на конвективную неустойчивость. Если же направление вибрации содержит поперечную составляющую, то действие вибрации носит стабилизирующий характер: сглаживает свободную границу однородной жидкости и может подавить тепловую конвекцию неоднородной жидкости. Максимальный стабилизирующий эффект достигается при вертикальных колебаниях.

Задача о влиянии высокочастотных вертикальных вибраций на возникновение конвекции в области с твердой границей была рассмотрена ранее [1] и методом осреднения выведена замкнутая автономная система для осредненного гидродинамического поля. Было показано [1, 2], что вертикальные колебания препятствуют возникновению термогравитационной конвекции в горизонтальном слое жидкости и даже могут сделать состояние относительного равновесия абсолютно устойчивым. В случае вибраций произвольного направления показано [3]¹, что вибрация может оказывать как стабилизирующее, так и дестабилизирующее влияние; установлено, например, что при всех направлениях вибрации, отличных от вертикального, гравитационная конвекция в слое жидкости может возникнуть не только при подогреве снизу, но и нагреве сверху. Осредненные уравнения [3] проанализированы [4, 5] в интересном частном случае – в условиях невесомости. Было дано [6, 7] экспериментальное подтверждение вибрационных эффектов [1]–[5]. Представлено [8, 9] обоснование метода осреднения для задачи конвекции в области с твердой границей. Развита [10] метод осреднения для динамических систем со связями.

Исследованию термокапиллярной конвекции посвящен ряд работ (см. обзор [11]).

Задача о термокапиллярной конвекции Обербека–Буссинеска (ОБ) в слое со свободной недеформируемой границей при вертикальных вибрациях впервые рассмотрена В.А. Брискманом [12], ее дальнейшему исследованию посвящена работа [13]. При изучении вибрационной конвекции в областях со свободной границей был применен следующий подход [14, 15]: исходные уравнения записывались в общем виде, проводилось осреднение, а в осредненных уравнениях проводился переход к уравнениям ОБ. Этот подход был затем применен [16]² к исследованию конвекции в горизонтальном слое с деформируемой свободной границей; показано, что в случае слабо неизотермической жидкости достаточно в качестве исходных уравнений брать обобщенные уравнения ОБ, т.е. переменную плотность учитывать не только в массовых силах, но и в инерционных членах.

В данной работе исследуется влияние поступательных гармонических вибраций произвольного направления на термокапиллярную неустойчивость в тонком горизонтальном слое вязкой

¹ См. также: Зеньковская С.М. О влиянии вибрации на возникновение конвекции. Ростов н/Д: Рост. ун-т, 1978. 30 с. – Деп. в ВИНТИ 11.07.78, № 2437-78.

² См. также: Зеньковская С.М., Шлейкель А.Л. Конвекция Марангони в высокочастотном вибрационном поле. Ростов н/Д, Рост. ун-т, 2000. 28 с. – Деп. в ВИНТИ 06.06.00, № 1615-В00.

несжимаемой жидкости, ограниченном деформируемой свободной границей и твердой стенкой. В предположении, что частота вибраций $\tilde{\omega}$ велика, а амплитуда скорости a конечна, к обобщенным уравнениям конвекции ОБ применен метод осреднения Крылова–Боголюбова. Найдено равновесное решение осредненной задачи, и исследована его устойчивость. Рассмотрены случаи, когда жидкость однородна и свободная граница деформируема, а также когда жидкость неоднородна и свободная граница недеформируема в среднем. Исследовано взаимодействие термокапиллярного и термогравитационного механизмов конвективной неустойчивости.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечный горизонтальный слой вязкой несжимаемой теплопроводной жидкости, ограниченный снизу твердой стенкой $x_3 = h$ и сверху свободной деформируемой поверхностью $x_3 = \xi'(x_1, x_2, t)$. На каждой из границ заданы условия теплообмена общего вида. Будем считать, что средняя толщина слоя h достаточно мала, так что уравнение состояния можно взять в виде

$$\rho = \rho_0(1 - \beta(T' - T'_0))$$

На свободной границе действуют силы поверхностного натяжения с коэффициентом $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T' - T'_0)$, где $\sigma_T = |\partial\sigma/\partial T'|$. Над слоем жидкости находится газ, плотность которого пренебрежимо мала, температура и давление постоянны. Предполагается, что слой как целое совершает плоские поступательные гармонические колебания в направлении вектора $s = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi)$ по закону $(a/\tilde{\omega})\cos\tilde{\omega}t$, где φ – угол направления вибрации, так что $\varphi = 0$ соответствует горизонтальным, а $\varphi = \pi/2$ – вертикальным колебаниям. Систему координат выберем так, чтобы ось x_3 совпадала с направлением силы тяжести, а начало координат возьмем на невозмущенной свободной границе. Координату x_3 далее иногда будем обозначать через z .

Пусть v' – вектор относительной скорости, T' – температура, отсчитываемая от некоторого постоянного значения T'_0 , p' – отклонение от атмосферного давления, ρ_0 – плотность, β – коэффициент теплового расширения, ν, χ – коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности, $g = \gamma g$, где $\gamma = (0, 0, 1)$ – орт оси x_3 , g – ускорение силы тяжести, $w_e = -a\tilde{\omega}\cos\tilde{\omega}t \cdot s$ – переносное ускорение, a – амплитуда скорости вибрации. Перейдем к безразмерным переменным, выбрав в качестве масштабов длины, времени, скорости, давления и градиента температуры соответственно $h, h^2/\nu, \nu/h, \rho_0\nu^2/h^2, A$, и обозначим безразмерные переменные теми же буквами, что и размерные.

В подвижной системе координат, связанной с колеблющимся слоем, уравнения конвекции запишем в виде

$$(1 - \varepsilon T') \frac{dv'}{dt} = -\nabla p' + \Delta v' + (1 - \varepsilon T')(Ga \gamma + \omega \text{Re} \cos \omega t s) \quad (1.1)$$

$$\text{div } v' = 0, \quad \frac{dT'}{dt} = \text{Pr}^{-1} \Delta T'$$

Система (1.1) отличается от уравнений конвекции Обербека–Буссинеска слагаемым $\varepsilon T' dv'/dt$. Использование более общей исходной модели для слабо неизолированной жидкости ($\varepsilon \rightarrow 0$) не приводит к изменению результатов.

На свободной границе $x_3 = \xi'(x_1, x_2, t)$ должны выполняться условия

$$(v', I') = \frac{\partial \xi'}{\partial t}, \quad I' = \left(-\frac{\partial \xi'}{\partial x_1}, -\frac{\partial \xi'}{\partial x_2}, 1 \right) \quad (1.2)$$

$$\tau'_{ik} n'_k - p' n'_i = 2 \left(C - \frac{\text{Ma}}{\text{Pr}} T' \right) Kn'_i - \frac{\text{Ma}}{\text{Pr}} \frac{\partial T'}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \quad (1.3)$$

$$\tau'_{3k}n'_k - p'n'_3 = 2\left(C - \frac{\text{Ma}}{\text{Pr}}T'\right)Kn'_3, \quad \tau'_{ik} = \frac{\partial v'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v'_k}{\partial x_i}, \quad k = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial T'}{\partial n'} - \text{Bi}T' = \delta_1 \quad (1.4)$$

Здесь τ'_{ik} – компоненты тензора вязких напряжений, Γ – вектор внутренней нормали к свободной границе, n' – ее орт; K – ее средняя кривизна, которая вычисляется по формуле

$$K = \frac{-(1 + \xi'^2_{x_1})\xi'_{x_2x_2} - (1 + \xi'^2_{x_2})\xi'_{x_1x_1} + 2\xi'_{x_1}\xi'_{x_2}\xi'_{x_1x_2}}{2(1 + \xi'^2_{x_1} + \xi'^2_{x_2})^{3/2}}$$

На твердой стенке $x_3 = 1$ краевые условия имеют вид

$$v' = 0, \quad \frac{\partial T'}{\partial x_3} + B_0T' = \delta_2 \quad (1.5)$$

Задача (1.1)–(1.5) содержит безразмерные параметры

$$\varepsilon = \beta Ah, \quad \omega = \frac{\tilde{\omega}h^2}{\nu}, \quad \text{Re} = \frac{ah}{\nu}, \quad \text{Ga} = \frac{gh^3}{\nu^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$$

$$\text{Ma} = \frac{A\sigma_T h^2}{\rho_0 \chi \nu}, \quad C = \frac{\sigma_0 h}{\rho_0 \nu^2}, \quad \text{Bi} = \frac{b_1 h}{k_1}, \quad B_0 = \frac{b_2 h}{k_2}$$

Здесь ε – параметр Буссинеска, ω – безразмерная частота вибрации, Re – вибрационное число Рейнольдса, Ga – число Галилея, Pr – число Прандтля, Ma – число Марангони, C – безразмерный коэффициент поверхностного натяжения, Bi , B_0 – числа Био.

2. Асимптотика больших частот. Осреднение. Далее речь пойдет об асимптотике решения задачи (1.1)–(1.5) в случае, когда частота ω велика, а вибрационное число Рейнольдса конечно: $\text{Re} = O(1)$, $\omega \rightarrow \infty$. При этом предполагаем, что для размерной частоты $\tilde{\omega}$ выполнены условия

$$\frac{h}{c} \leq \frac{2\pi}{\tilde{\omega}} \leq \min\left(\frac{h^2}{\nu}, \frac{h^2}{\chi}\right)$$

где c – скорость звука. Ограничение сверху означает, что период вибрации должен быть много меньше характерных времен действия вязкости и теплопроводности. Нарушение левого неравенства означает, что нужно учесть сжимаемость жидкости, а нарушение правого – вибрационные пограничные слои. Оценки показывают, что существует диапазон частот $\tilde{\omega}$, для которых согласуются указанные выше условия.

К задаче (1.1)–(1.5) применяем метод осреднения Крылова–Боголюбова аналогично изложенному ранее [1]. Наряду с медленным временем t введем быстрое время $\tau = \omega t$. Асимптотическое решение при $\omega \rightarrow \infty$ будем разыскивать в виде суммы плавных и быстрых, имеющих нулевое среднее по времени τ , составляющих

$$v' = v(x, t) + \tilde{v}(x, t, \tau), \quad p' = p(x, t) + \omega \tilde{p}(x, t, \tau)$$

$$T' = T(x, t) + \frac{1}{\omega} \tilde{T}(x, t, \tau), \quad \xi' = \xi(x_1, x_2, t) + \frac{1}{\omega} \tilde{\xi}(x_1, x_2, t, \tau) \quad (2.1)$$

Уравнения для быстрых неизвестных получаются после подстановки выражений (2.1) в уравнения (1.1) и выделения главных вибрационных членов при $\omega \rightarrow \infty$.

В результате получаем систему

$$(1 - \varepsilon T) \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \tau} = -\nabla \tilde{p} + \text{Re}(1 - \varepsilon T) \cos \tau \cdot \mathbf{s}, \quad \text{div } \tilde{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} + (\tilde{\mathbf{v}}, \nabla T) = 0 \quad (2.3)$$

Обратимся к краевым условиям. Главные вибрационные члены в кинематическом краевом условии (1.2) дают уравнение для быстрой составляющей свободной границы

$$x_3 = \xi(x_1, x_2, t): \quad \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tau} = -\tilde{v}_1 \frac{\partial \xi}{\partial x_1} - \tilde{v}_2 \frac{\partial \xi}{\partial x_2} + \tilde{v}_3 \quad (2.4)$$

Будем считать, что в динамическом краевом условии (1.3) безразмерные параметры не зависят от ω . Тогда из (1.3) получаем краевое условие для пульсационного давления

$$x_3 = \xi(x_1, x_2, t): \quad \tilde{p} = 0 \quad (2.5)$$

Так как порядок уравнения (2.2) ниже порядка соответствующего уравнения в системе (1.1), для пульсационной скорости $\tilde{\mathbf{v}}$ на твердой стенке $x_3 = 1$ поставим краевое условие, такое же, как для идеальной жидкости

$$x_3 = 1: \quad v_n = 0 \quad (2.6)$$

Нетрудно убедиться, что 2π -периодическое по τ решение задачи (2.2)–(2.6), имеющее нулевое среднее, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &= \text{Re } \mathbf{w}(x, t) \sin \tau, \quad \tilde{p} = \text{Re } \Phi(x, t) \cos \tau, \quad \tilde{T} = \text{Re}(\mathbf{w}, \nabla T) \cos \tau \\ \tilde{\xi} &= -\text{Re}(\mathbf{w}, \mathbf{l}) \cos \tau, \quad \mathbf{l} = \left(-\frac{\partial \xi}{\partial x_1}, -\frac{\partial \xi}{\partial x_2}, 1 \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь $\mathbf{w}(x, t)$ и $\Phi(x, t)$ – амплитуды пульсационных скорости и давления, для которых имеем задачу

$$(1 - \varepsilon T) \mathbf{w} = -\nabla \Phi + (1 - \varepsilon T) \mathbf{s}, \quad \text{div } \mathbf{w} = 0 \quad (2.8)$$

$$x_3 = \xi(x_1, x_2, t): \quad \Phi = 0; \quad x_3 = 1: \quad w_n = 0$$

Формулы (2.7) дают выражения быстрых составляющих через плавные. Подставляя выражения (2.7) в равенства (2.1), а затем полученные выражения в систему (1.1)–(1.5), осредняя по быстрому времени τ и оставляя слагаемые порядка единица при $\omega \rightarrow \infty$, получим замкнутую автономную систему для средних значений – неизвестных \mathbf{v} , q , T . В результате осреднения в уравнении движения появилась *виброгенная массовая сила* [10]

$$\mathbf{F}_v = \frac{1}{2} \text{Re}^2(\mathbf{w}, \nabla) \nabla \Phi$$

а в динамическом краевом условии – *виброгенные напряжения*, пропорциональные квадрату вибрационного числа Рейнольдса.

В осредненной системе перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, считая, что $T = O(1)$ и $\xi = O(1)$, и оставим главные члены. Приходим к задаче

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\nabla q + \Delta \mathbf{v} - \text{Gr } T \boldsymbol{\gamma} + \frac{\text{Re}^2}{2} \varepsilon (\mathbf{w} \wedge \text{rot } T(\mathbf{w} - \mathbf{s}) + (\mathbf{w}, \nabla) T(\mathbf{w} - \mathbf{s})) \\ \frac{dT}{dt} &= \text{Pr}^{-1} \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$(1 - \varepsilon T) \mathbf{w} = -\nabla \Phi + (1 - \varepsilon T) \mathbf{s}, \quad \text{div } \mathbf{w} = 0$$

$$q = p - \text{Ga } z - \frac{\text{Re}^2}{4} \mathbf{w}^2, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)$$

Краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned}
 x_3 = \xi(x_1, x_2, t): \quad (\mathbf{v}, \mathbf{l}) &= \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \mathbf{l} = \left(-\frac{\partial \xi}{\partial x_1}, -\frac{\partial \xi}{\partial x_2}, 1 \right) \\
 \tau_{ik} n_k - \left(q + \text{Ga} \xi - \frac{\text{Re}^2}{2} \left(\frac{\mathbf{w}^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\mathbf{w}, \mathbf{l}) \right) \right) n_i &= \\
 = 2K \left(C - \frac{\text{Ma}}{\text{Pr}} T \right) n_i + \frac{\text{Ma}}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 & \quad (2.10) \\
 \tau_{3k} n_k - \left(q + \text{Ga} \xi - \frac{\text{Re}^2}{2} \left(\frac{\mathbf{w}^2}{2} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\mathbf{w}, \mathbf{l}) \right) \right) n_3 &= 2K \left(C - \frac{\text{Ma}}{\text{Pr}} T \right) n_3 \\
 \frac{\partial T}{\partial n} - \text{Bi} T = \delta_1, \quad \Phi = 0 \\
 x_3 = 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} + B_0 T = \delta_2, \quad w_n = 0
 \end{aligned}$$

3. Равновесное решение и его устойчивость. Далее займемся исследованием задачи (2.9), (2.10). Будем считать, что условия теплообмена заданы таким образом, что существует равновесное решение с линейным профилем температуры

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_0 = 0, \quad T_0 = z, \quad q_0 = -\text{Gr} \frac{z^2}{2} + \frac{\text{Re}^2}{4} \cos^2 \varphi \\
 \mathbf{w}_0 = (\cos \varphi, 0, 0), \quad \Phi_0 = \left(z - \varepsilon \frac{z^2}{2} \right) \sin \varphi, \quad \xi_0 = 0
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Исследуем его устойчивость методом линеаризации, полагая

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad q = q_0 + q_1, \quad T = T_0 + T_1 \\
 \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_1, \quad \Phi = \Phi_0 + \Phi_1, \quad \xi = \xi_0 + \xi_1
 \end{aligned}$$

Считая возмущения бесконечно малыми и пропорциональными $\exp \lambda t$, для соответствующих амплитуд получим спектральную задачу

$$\begin{aligned}
 \lambda \mathbf{v} = -\nabla q + \Delta \mathbf{v} - \text{Gr} T \boldsymbol{\gamma} - \frac{\text{Re}^2}{2} \varepsilon \sin \varphi w_3 \boldsymbol{\gamma} \\
 \lambda T = \text{Pr}^{-1} \Delta T - v_3, \quad \text{div} \mathbf{v} = 0 \\
 (1 - \varepsilon z) \mathbf{w} = -\nabla \Phi - \varepsilon \sin \varphi T \boldsymbol{\gamma}, \quad \text{div} \mathbf{w} = 0
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Краевые условия после линеаризации принимают вид

$$\begin{aligned}
 x_3 = 0: \quad v_3 = \lambda \xi, \quad \tau_{i3} = \frac{\text{Ma}}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, 2 \\
 \tau_{33} - q = -C \Delta_1 \xi + \text{Ga} \xi - \frac{\text{Re}^2}{2} \sin \varphi w_3 \\
 \Phi + \sin \varphi \xi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} - \text{Bi} (T + \xi) = 0 \quad \left(\Delta_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \\
 x_3 = 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} + B_0 T = 0, \quad w_3 = 0
 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Уже из вида спектральной задачи (3.2), (3.3) можно сделать вывод: горизонтальные ($\varphi = 0$) высокочастотные вибрации не влияют на возникновение конвекции в тонком слое жидкости с деформируемой свободной границей.

Далее рассматриваем случай $\varphi \neq 0$, что позволяет сделать замену

$$\Phi = \sin \varphi \Psi, \quad w_3 = \sin \varphi W_3$$

Исключая давление q , горизонтальные компоненты v_1 , v_2 и w_1 , w_2 , приходим к задаче

$$\begin{aligned} \lambda \Delta v_3 &= \Delta^2 v_3 - \text{Gr} \Delta_1 T - \mu_s \varepsilon \Delta_1 W_3, \quad \lambda T = \text{Pr}^{-1} \Delta T - v_3 \\ \Delta \Psi &= \varepsilon \left(W_3 - \frac{\partial T}{\partial x_3} \right), \quad (1 - \varepsilon z) W_3 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} - \varepsilon T \\ x_3 = 0: \quad v_3 &= \lambda \xi, \quad -\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} + \Delta_1 v_3 = \frac{\text{Ma}}{\text{Pr}} \Delta_1 (T + \xi) \\ 2\Delta_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \lambda \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \Delta \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= -C\Delta_1^2 \xi + \text{Ga} \Delta_1 \xi - \mu_s \Delta_1 W_3 \\ \frac{\partial T}{\partial x_3} - \text{Bi} (T + \xi) &= 0, \quad \Psi + \xi = 0 \\ x_3 = 1: \quad v_3 &= \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x_3} + B_0 T = 0, \quad W_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь

$$\mu_s = \frac{(\text{Re} \sin \varphi)^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{ah \sin \varphi}{v} \right)^2$$

Таким образом, при $\varphi \neq 0$ действие высокочастотной вибрации характеризуется одним параметром μ_s , который включает в себя и направление φ , и амплитуду a скорости вибрации в отличие от вибрационной конвекции Релея–Бенара, которая характеризуется двумя вибрационными параметрами – скоростью и направлением вибрации [3, 17]. Кроме того, в случае конвекции Релея–Бенара горизонтальные вибрации усиливают термогравитационную конвекцию [3, 17].

Введем нормальные возмущения, полагая

$$(v_3, T, \Psi, W_3, \xi) = \exp(i\alpha_1 x_1 + i\alpha_2 x_2) (\text{Pr}^{-1} v(z), \theta(z), \Phi(z), w(z), \delta)$$

Тогда спектральная задача (3.4) примет вид

$$\begin{aligned} \lambda L v &= L^2 v + \text{Gr} \text{Pr} \alpha^2 \theta + \mu_s \varepsilon \text{Pr} \alpha^2 w, \quad \lambda \text{Pr} \theta = L \theta - v \\ z = 0: \quad v &= \lambda \text{Pr} \delta, \quad D^2 v + \alpha^2 v = \text{Ma} \alpha^2 (\theta + \delta) \\ (3\alpha^2 + \lambda) D v - D^3 v &= \text{Pr} \alpha^2 ((C\alpha^2 + \text{Ga})\delta - \mu_s w) \\ D \theta - \text{Bi} (\theta + \delta) &= 0 \\ z = 1: \quad v &= D v = 0, \quad D \theta + B_0 \theta = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Функции w , Φ – решения задачи

$$\begin{aligned} L \Phi &= \varepsilon (w - D \theta), \quad (1 - \varepsilon z) w = -D \Phi - \varepsilon \theta \\ z = 0: \quad \Phi + \delta &= 0; \quad z = 1: \quad w = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Выделим главные члены при $\varepsilon \rightarrow 0$ в выражениях для $\Phi(z)$ и $w(z)$, полагая

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \dots, \quad w = w_0 + \varepsilon w_1 + \dots$$

Подставляя эти разложения в систему (3.6), получаем следующие задачи:

$$L \Phi_0 = 0, \quad w_0 = -D \Phi_0; \quad \Phi_0(0) = -\delta, \quad w_0(1) = 0 \quad (3.7)$$

$$L \Phi_1 = w_0 - D \theta, \quad w_1 = -D \Phi_1 - \theta + z w_0; \quad \Phi_1(0) = 0, \quad w_1(1) = 0 \quad (3.8)$$

Задача (3.7) имеет решение:

$$\Phi_0(z) = \delta(\operatorname{th} \alpha \operatorname{sh} \alpha z - \operatorname{ch} \alpha z), \quad w_0(z) = -\delta \alpha (\operatorname{th} \alpha \operatorname{ch} \alpha z - \operatorname{sh} \alpha z)$$

Оставляя главные по ε члены, при $\varepsilon \rightarrow 0$ задачу (3.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \lambda L\nu &= L^2\nu + \operatorname{Ra} \alpha^2 \theta + R_\nu \alpha^2 (w_0 + \varepsilon w_1), \quad \lambda \operatorname{Pr} \theta = L\theta - \nu \\ w_1 &= -D\Phi_1 - \theta + zw_0, \quad L\Phi_1 = w_0 - D\theta \\ z=0: \quad \nu &= \lambda \operatorname{Pr} \delta, \quad D^2\nu + \alpha^2\nu = \operatorname{Ma} \alpha^2 (\theta + \delta) \\ (3\alpha^2 + \lambda)D\nu - D^3\nu &= \operatorname{Pr} \alpha^2 (C\alpha^2 + \operatorname{Ga} + \mu_s \alpha \operatorname{th} \alpha) \delta - R_\nu w_1 \\ D\theta - \operatorname{Bi}(\theta + \delta) &= 0, \quad \Phi_1 = 0 \\ z=1: \quad \nu = D\nu &= 0, \quad D\theta + B_0\theta = 0, \quad w_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь $\operatorname{Ra} = \operatorname{Ga}\varepsilon\operatorname{Pr}$ – гравитационное число Релея, $R_\nu = \mu_s\varepsilon\operatorname{Pr}$ – вибрационное число Релея.

Далее можно рассматривать различные типы конвективной неустойчивости в слое с деформируемой свободной границей.

Термокапиллярная конвекция в слое однородной жидкости. Рассмотрим конвекцию Марангони в тонком слое однородной жидкости, полагая $\varepsilon = 0$, $\operatorname{Ra} = 0$, $R_\nu = 0$. Этому случаю соответствует спектральная задача

$$\begin{aligned} \lambda L\nu &= L^2\nu, \quad \lambda \operatorname{Pr} \theta = L\theta - \nu \\ z=0: \quad \nu &= \lambda \operatorname{Pr} \delta, \quad D^2\nu + \alpha^2\nu = \operatorname{Ma} \alpha^2 (\theta + \delta) \\ (3\alpha^2 + \lambda)D\nu - D^3\nu &= \operatorname{Pr} \alpha^2 (C\alpha^2 + \operatorname{Ga} + \mu_s \alpha \operatorname{th} \alpha) \delta \\ D\theta - \operatorname{Bi}(\theta + \delta) &= 0 \\ z=1: \quad \nu = D\nu &= 0, \quad D\theta + B_0\theta = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

При $\mu_s = 0$ эта задача изучалась многими авторами (см. обзор [18]). Было показано, что деформация свободной границы существенно влияет на длинноволновую ($\alpha \rightarrow 0$) неустойчивость. Кроме того, установлено, что с ростом поверхностного натяжения C свободная граница сглаживается и критические числа Марангони стремятся к значениям, соответствующим недеформируемой свободной границе. В рассматриваемом здесь случае этого эффекта можно добиться за счет роста вибрационного параметра μ_s , так как он повышает эффективное поверхностное натяжение

$$C_s = C + \operatorname{Ga}/\alpha^2 + \mu_s \operatorname{th} \alpha / \alpha$$

Вклад вибрации может быть соизмерим с вкладом гравитационных сил. Для слоя воды $h = 1$ мм, при частоте вибрации $\omega = 100$ Гц и амплитуде $a/\omega = 1$ мм, имеем $C = 7 \cdot 10^4$, $\operatorname{Ga} = 10^4$, $\mu_s = 0.5 \cdot 10^4 \sin^2\varphi$.

Чтобы подтвердить сделанные выводы, приведем асимптотические и численные результаты.

Длинноволновая асимптотика. Будем рассматривать монотонную неустойчивость. Полагая в системе (3.10) $\lambda = 0$ и исключая функцию $\nu(z)$, приходим к задаче

$$\begin{aligned} L^3\theta &= 0 \\ z=0: \quad L\theta &= 0, \quad L^2\theta = \operatorname{Ma} \alpha^2 (\theta + \delta) \\ \operatorname{Cr}(3\alpha^2 DL\theta - D^3L\theta) &= \alpha^2 (\alpha^2 + \operatorname{Bo} + \mu \alpha \operatorname{th} \alpha) \delta \\ D\theta - \operatorname{Bi}(\theta + \delta) &= 0 \\ z=1: \quad L\theta = DL\theta &= 0, \quad D\theta + B_0\theta = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь $\operatorname{Cr} = (\operatorname{Pr}C)^{-1}$ – капиллярный параметр, $\operatorname{Bo} = \operatorname{Ga}/C$ – гравитационное, а $\mu = \mu_s/C$ – вибрационное число Бонда.

Поведение собственных значений $Ma(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow 0$ исследуем методом возмущений. Разлагая неизвестные в ряды по степеням α^2

$$\theta = \theta_0 + \alpha^2 \theta_1 + \dots, \quad \delta = \delta_0 + \alpha^2 \delta_1 + \dots, \quad Ma = Ma_0 \alpha^{-2} + Ma_1 + Ma_2 \alpha^2 + \dots$$

получим краевые задачи для коэффициентов. В результате решения этих задач находим главные члены асимптотики числа Марангони

$$Ma(\alpha) = \frac{48}{1 + 72 Cr/Bo} \left(\frac{Bi}{\alpha^2} + 1 \right) + O(\alpha^2), \quad B_0 = 0 \quad (3.12)$$

$$Ma(\alpha) = \frac{2}{3} \frac{Bo}{Cr} (1 + Bi) + \frac{2}{3 Cr} \left((1 + Bi) \left(1 + \mu - \frac{2 Bo}{15} \right) + \frac{Bo}{3} - \frac{(1 + Bi) Bo^2}{120 Cr} \right) \alpha^2 + O(\alpha^4),$$

$$B_0 = \infty \quad (3.13)$$

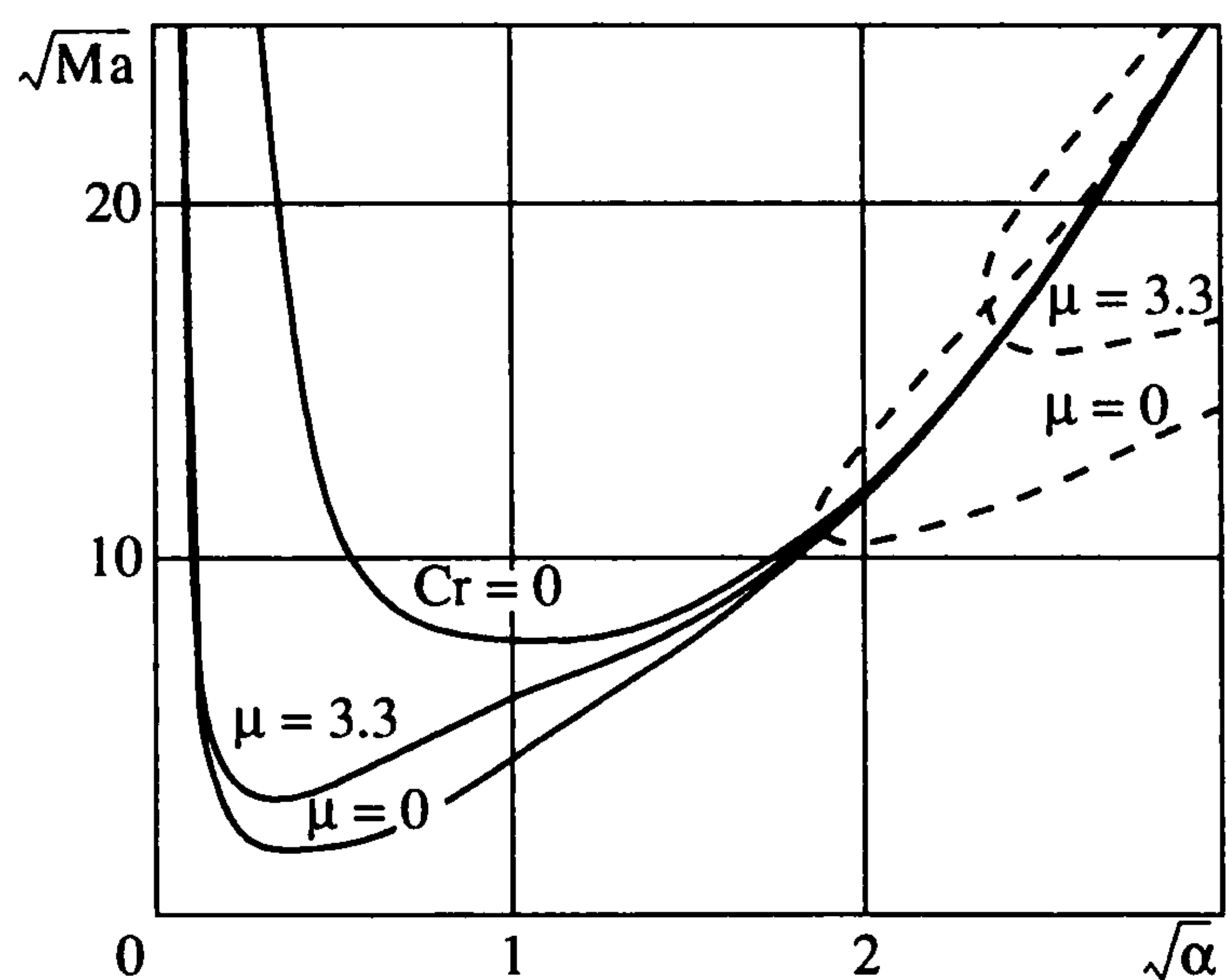
Численные результаты. Задача (3.10) решалась сведением к трансцендентному уравнению, которое строилось аналитически и численно методом пристрелки. В качестве искомых параметров выбирались число Марангони и частота нейтральных колебаний s , при этом полагалось $\lambda = ic$. Полученные результаты сравнивались с асимптотическими и известными значениями при $\mu = 0$. Исследовалась монотонная и колебательная неустойчивость.

Существование колебательной неустойчивости было обнаружено ранее при $Ma(\alpha) < 0, \alpha \rightarrow 0$ [11], при $Ma(\alpha) > 0, \alpha \rightarrow \infty$ [18]. Однако, как показывают вычисления, при $Ma > 0$ первая потеря устойчивости монотонна. В таблице приведены значения $Ma(\alpha)$ при $s = 0, B_0 = 0, Bi = 0.1, Cr = 0.033, Bo = 0.0049$ (глицерин, $h = 0.1$ мм) в зависимости от параметра μ . Когда $\alpha \rightarrow 0$, выполняется асимптотика (3.12).

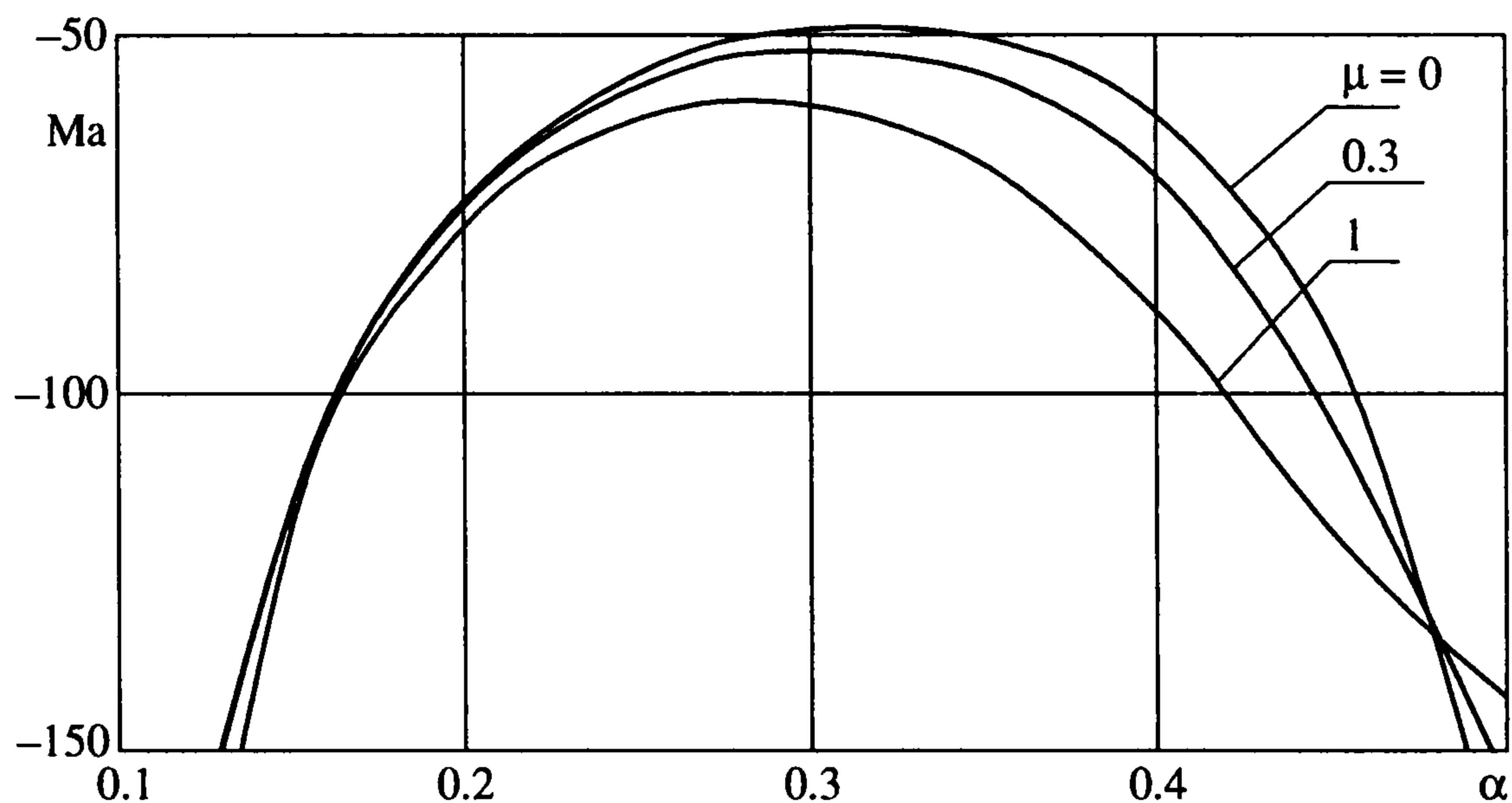
На фиг. 1 изображены нейтральные кривые $Ma(\alpha)$ монотонной (сплошные линии) и колебательной (штриховые линии) неустойчивости. На фиг. 2 – нейтральные кривые колебательной неустойчивости при $Bi = 0, Cr = 0.01, Pr = 0.01, Bo = 0, B_0 = \infty$. Для $\mu = 0$ результаты вычислений совпадают с полученными ранее [19].

Итак, численные результаты показывают, что при $\varphi \neq 0$ высокочастотная вибрация сглаживает свободную границу, а числа Марангони стремятся к значениям, полученным ранее [20].

α	$\mu = 0$	$\mu = 3.3$	$\mu = 33$	$\mu = 3.3 \cdot 10^2$	$\mu = 3.3 \cdot 10^4$	$Cr = 0$
5.00	206.71	207.21	207.80	207.95	207.97	207.97
4.00	137.72	139.23	140.73	141.06	141.10	141.10
3.00	86.66	90.68	93.96	94.61	94.69	94.70
2.50	66.84	73.17	77.91	78.81	78.92	78.92
2.00	49.59	59.31	66.22	67.50	67.65	67.65
1.50	33.76	47.84	58.34	60.32	60.56	60.56
1.00	18.92	36.53	53.91	57.74	58.21	58.21
0.50	6.98	21.46	54.15	67.90	69.92	69.94
0.10	3.31	10.46	67.07	308.44	526.16	529.95
0.05	6.12	12.89	71.79	510.90	$1.915 \cdot 10^3$	$1.970 \cdot 10^3$
0.04	8.32	15.05	74.25	559.96	$2.919 \cdot 10^3$	$3.050 \cdot 10^3$
0.03	13.11	19.80	79.24	608.41	$4.985 \cdot 10^3$	$5.383 \cdot 10^3$
0.02	26.82	33.48	93.09	658.23	$1.021 \cdot 10^4$	$1.205 \cdot 10^4$
0.01	100.90	107.55	167.27	756.37	$2.795 \cdot 10^4$	$4.805 \cdot 10^4$
10^{-3}	$9.881 \cdot 10^3$	$9.887 \cdot 10^3$	$9.947 \cdot 10^3$	$1.054 \cdot 10^4$	$7.537 \cdot 10^4$	$4.800 \cdot 10^6$
10^{-4}	$9.879 \cdot 10^5$	$9.879 \cdot 10^5$	$9.879 \cdot 10^5$	$9.885 \cdot 10^5$	$1.054 \cdot 10^6$	$4.800 \cdot 10^8$
10^{-5}	$9.879 \cdot 10^7$	$9.879 \cdot 10^7$	$9.879 \cdot 10^7$	$9.879 \cdot 10^7$	$9.885 \cdot 10^7$	$4.800 \cdot 10^{10}$



Фиг. 1



Фиг. 2

Вибрационная конвекция Пирсона. Теперь будем считать, что свободная граница недеформируема в среднем ($\delta = 0$) и жидкость неоднородна ($\epsilon \neq 0$). В этом случае задача (3.9) имеет вид

$$\lambda L\nu = L^2\nu + Ra\alpha^2\theta - \bar{\mu}\alpha^2(D\Phi_1 + \theta)$$

$$\lambda Pr\theta = L\theta - \nu, \quad L\Phi_1 = -D\theta$$

$$z = 0: \quad \nu = 0, \quad D^2\nu - Ma\alpha^2\theta = 0, \quad D\theta - Bi\theta = 0, \quad \Phi_1 = 0 \quad (3.14)$$

$$z = 1: \quad \nu = D\nu = 0, \quad D\theta + B_0\theta = 0, \quad D\Phi_1 + \theta = 0$$

Здесь $\bar{\mu} = \mu_s \epsilon^2 Pr = R_s \epsilon$ – вибрационный параметр.

Полагая $Ra = 0$, находим зависимость критического числа Марангони

$$Ma_*(\bar{\mu}) = \min_{\alpha} Ma(\alpha, \bar{\mu})$$

от этого параметра. Вычисления показали, что неустойчивость монотонная и значения Ma_* растут с увеличением параметра $\bar{\mu}$.

Представим параметр $\bar{\mu}$ в виде

$$\bar{\mu} = \text{Ma}^2 s^2, \quad s^2 = (a^2 \beta^2 \rho_0 \chi v \sin^2 \varphi) / (2\sigma_0^2)$$

где s – безразмерная скорость вибрации. Вычисления показывают, что существуют такие значения $s_*(B_0, \text{Bi})$, что при $s > s_*$ имеет место абсолютная устойчивость. Так, например, $s_*(\infty, 0.1) = 0.26$, $s_*(0, 0.1) = 0.95$. Аналогичные выводы можно сделать и для термогравитационной конвекции, полагая в задаче (3.14) $\text{Ma} = 0$ и рассматривая зависимость $\text{Ra}_*(r)$, где $r^2 = \bar{\mu} / \text{Ra}^2$. Получено, что $r_*(\infty, 0.1) = 0.029$.

Взаимодействие термогравитационного и термокапиллярного механизмов неустойчивости при действии вибрации можно проследить, исследуя зависимость критических чисел Релея

$$\text{Ra}_*(\text{Ma}, \bar{\mu}) = \min_{\alpha} \text{Ra}(\alpha, \text{Ma}, \bar{\mu})$$

Вычисления показали, что неустойчивость монотонная, а нейтральные кривые $\text{Ra}_*(\text{Ma})$ при больших значениях параметра $\bar{\mu}$ близки к прямым линиям

$$\text{Ra}_* = k \text{Ma} + b(\bar{\mu})$$

где $k = -8.97$, $b(10^3) = 1232$, $b(5 \cdot 10^3) = 2536$, $b(10^4) = 3551$. С ростом параметра $\bar{\mu}$ граница устойчивости уходит на бесконечность.

Если в исходной модели взять уравнения Обербека–Буссинеска, то вместо задачи (3.14) получим задачу

$$\lambda L v = L^2 v + \text{Ra} \alpha^2 \theta - \bar{\mu} (\alpha^2 \sin \varphi (D\Phi + \theta \sin \varphi) + i \alpha \cos \varphi \Phi)$$

$$\lambda \text{Pr} \theta = L \theta - v, \quad L \Phi = -i \alpha \cos \varphi \theta - \sin \varphi D \theta$$

$$z = 0: \quad v = 0, \quad D^2 v - \text{Ma} \alpha^2 \theta = 0, \quad D \theta - \text{Bi} \theta = 0, \quad \Phi = 0$$

$$z = 1: \quad v = D v = 0, \quad D \theta + B_0 \theta = 0, \quad D \Phi + \sin \varphi \theta = 0$$

При $\varphi = \pi/2$ эти задачи совпадают. Если же $\varphi \neq \pi/2$, то решения $\text{Ma}(\alpha)$ качественно различны. Совпадение при $\varphi = \pi/2$ понятно – в этом случае можно с самого начала переносное ускорение w_e в (1.1) включить в давление и использовать уравнения Обербека–Буссинеска.

Авторы благодарят рецензента за замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-15-96188, 01-01-22002) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-99-01505).

ЛИТЕРАТУРА

1. Зеньковская С.М., Симоненко И.Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 5. С. 51–55.
2. Зеньковская С.М. Исследование конвекции в слое жидкости при наличии вибрационных сил // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 1. С. 55–58.
3. Зеньковская С.М. О влиянии вибрации на конвективную неустойчивость // Численные методы динамики вязкой жидкости: Тр. 7-го Всес. семинара. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1979. С. 116–122.
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. О свободной тепловой конвекции в вибрационном поле в условиях невесомости // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 3. С. 580–584.

5. Гершуни Г.Э., Жуховицкий Е.М. О конвективной неустойчивости жидкости в вибрационном поле в невесомости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 4. С. 12–19.
6. Заварыкин М.П., Зорин С.В., Путин Г.Ф. Экспериментальное исследование вибрационной конвекции // Докл. АН СССР. 1985. Т. 281. № 4. С. 815–816.
7. Заварыкин М.П., Зорин С.В., Путин Г.Ф. О термоконвективной неустойчивости в вибрационном поле // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 2. С. 309–312.
8. Симоненко И.Б. Обоснование метода осреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений // Мат. сб. 1972. Т. 87. № 2. С. 236–253.
9. Левенштам В.Б. Обоснование метода усреднения для задачи конвекции при высокочастотных вибрациях // Сиб. мат. ж. 1993. № 2. С. 92–109.
10. Юдович В.И. Вибродинамика систем со связями // Докл. РАН. 1997. Т. 354. № 5. С. 622–624.
11. Takashima M. Surface tension driven instability in a horizontal liquid layer with a deformable liquid layer with a deformable free surface I.II. // J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. № 8. P. 2745–2756.
12. Briskman V.A. Vibrational thermocapillary convection and stability // Hydromechanics and Heat / Mass Transfer in Microgravity. London: Gordon and Breach, 1992. P. 111–119.
13. Бирих Р.В., Брискман В.А., Зуев А.Л., Чернатыйнский В.И., Якушин В.И. О взаимодействии термовибрационного и термокапиллярного механизмов конвекции // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 5. С. 107–121.
14. Lyubimov D.V. Thermovibrational flows in a fluid with a free surface // Microgravity Quart. 1994. V. 4. № 1. P. 117–122.
15. Гершуни Г.З., Любимов Д.В., Любимова Т.П., Ру Б. Конвективные течения в цилиндрической жидкой зоне в высокочастотном вибрационном поле // Изв. АН СССР. МЖГ. № 5. С. 53–61.
16. Зеньковская М.С., Шлейкель А.Л. Конвекция в горизонтальном слое жидкости при действии высокочастотной вибрации // Изв. вузов. Сев-Кавк. рег. Естеств. науки. 2001. Спецвыпуск. Математическое моделирование. С. 78–81.
17. Зеньковская С.М., Овчинникова С.Н. Термовибрационная конвекция в слое жидкости при невесомости или пониженной гравитации // ПМТФ. 1991. № 2. С. 84–90.
18. Андреев В.К., Захватаев В.Е., Рябицкий Е.А. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск: Наука, 2000. 279 с.
19. Birikh R.V., Boushoueva S.V., Briskman V.A., Velarde M.G. Thermocapillary overstability and excitation of surface waves // J. Japan Soc. Microgravity Appl. 1998. V. 15. № 2. P. 372–377.
20. Pearson J.R.A. On convection cells induced by surfacetension // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. Pt 5. P. 489–500.