

УДК 517.977

© 2002 г. Е.К. Костоусова

О ВНЕШНИХ ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ ДЛЯ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ СИСТЕМ С БИЛИНЕЙНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Для задачи о нахождении множеств достижимости систем с билинейной неопределенностью исследуются возможности внешних аппроксимаций (оценок) при помощи параллелепипедов. Выводятся эволюционные уравнения, описывающие динамику внешних оценок. Приводятся результаты численного моделирования.

Проблему построения трубок траекторий (многозначных функций, описывающих динамику множеств достижимости, разрешимости, информационных областей) можно назвать одной из фундаментальных задач математической теории управления (см., например, [1–4]). Точное построение этих множеств может оказаться затруднительным. Для рассматриваемых в работе систем с билинейной неопределенностью (линейных систем с неопределенными матрицами) [5–8] множества достижимости (МД), вообще говоря, невыпуклы. Поэтому наряду с другими методами аппроксимации важной представляется разработка методов построения для МД простых, но эффективных оценок. Поскольку исходные многозначные функции обладают полугрупповым свойством, естественно потребовать выполнения аналогичного свойства и для оценок. Одним из интенсивно развиваемых методов этого направления является метод аппроксимации при помощи эллипсоидов (см., например, [3, 4, 7, 9–11]). Строятся также параллелепипедозначные оценки (см., например, [1, 9, 12, 13] и библиографию в них). Покоординатные оценки можно получить с помощью интервальных вычислений [14, 15]. Но они могут оказаться слишком грубыми в силу известного "эффекта упаковывания" (wrapping effect) [15, с. 177].

Ниже выводятся обыкновенные дифференциальные уравнения, которые при заданной динамике матриц ориентации описывают динамику центров и "величин полуосей" для двух типов параллелепипедозначных оценок МД. Более простые оценки первого типа строятся на основе аппроксимаций, аналогичных предложенным ранее [7, 11], второго типа – на основе более точных аппроксимаций. В модельных примерах предлагаемые оценки сравниваются с эллипсоидальными [7, 10]. Отмечается, что они могут быть менее трудоемкими и более точными (но не всегда). Выделен случай, когда объединением нескольких параллелепипедозначных оценок можно получить более точные невыпуклые оценки для МД.

1. Постановка задачи. Пусть состояние $x \in \mathbb{R}^n$ объекта описывается системой

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)w(t), \quad t \in T = [0, \theta] \quad (1.1)$$

Здесь \mathbb{R}^n – n -мерное евклидово пространство; неизвестные заранее начальное состояние $x(0) = x_0$ и воздействие $w(\cdot)$ (измеримая по Лебегу n -мерная функция времени t) стеснены ограничениями

$$x(0) \in X_0, \quad w(t) \in R(t) \text{ при почти всех } t \in T \quad (1.2)$$

$X_0, R(t)$ – заданные выпуклые компактные множества, многозначное отображение

$R(t)$ непрерывно; $(n \times n)$ -матричные функции A и B также точно неизвестны, но заданы ограничения

$$A(t) \in \mathbf{A}(t), \quad \mathbf{A}(t) = \{A : \underline{A}(t) \leq A \leq \bar{A}(t)\}, \quad t \in T \quad (1.3)$$

$$B(t) \in \mathbf{B}(t), \quad \mathbf{B}(t) = \{B : \underline{B}(t) \leq B \leq \bar{B}(t)\}, \quad t \in T \quad (1.4)$$

Соотношения (1.3) иначе могут быть записаны в виде

$$A(t) \in \mathbf{A}(t) = \{A : A = \tilde{A}(t) + \Delta A(t), \quad \Delta A(t) \in \hat{\mathbf{A}}(t)\} \quad (1.5)$$

$$\hat{\mathbf{A}}(t) = \{A : \text{Abs } A \leq \hat{A}(t)\}, \quad \tilde{A} = (\underline{A} + \bar{A})/2, \quad \hat{A} = (\bar{A} - \underline{A})/2$$

Матричные неравенства здесь и ниже понимаются покомпонентно, $\text{Abs } A$ обозначает матрицу абсолютных величин элементов матрицы $A = \{a_i^j\}$: $\text{Abs } A = \{|a_i^j|\}$ (верхним индексом нумеруем столбцы, нижним – строки). Аналогично вводятся $\tilde{B}, \hat{B}, \hat{V}$. Предполагается, что известные функции $\underline{A} = \{\underline{a}_i^j\}$, $\bar{A} = \{\bar{a}_i^j\}$, $\underline{B} = \{\underline{b}_i^j\}$, $\bar{B} = \{\bar{b}_i^j\}$ непрерывны по t .

Множеством достижимости (МД) $X(t) = X(t, 0, X_0)$ системы (1.1)–(1.4) при $t \geq 0$ называется множество точек $x \in \mathbb{R}^n$, для каждой из которых существуют $x_0, w(\cdot), A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, удовлетворяющие ограничениям (1.2)–(1.4) и порождающие решение $x(\cdot)$ системы (1.1), такое, что $x(t) = x$.

Известно, что МД обладают *полугрупповым свойством*

$$X(t, 0, X_0) = X(t, \tau, X(\tau, 0, X_0)), \quad \forall \tau, t: 0 \leq \tau \leq t \leq \theta \quad (1.6)$$

Будем полагать, что X_0 и $R(t)$ – параллелепипеды, и искать внешние параллелепипедозначные оценки $P(t)$ для $X(t)$:

$$X(t) \subseteq \text{co } X(t) \subseteq P(t), \quad \forall t \in T \quad (1.7)$$

Параллелепипедом $P(p, P, \pi)$ в \mathbb{R}^n называем множество

$$P = P(p, P, \pi) = \{x : x = p + \sum_{i=1}^n p^i \pi_i \xi_i, \quad |\xi_i| \leq 1, \quad i = 1, \dots, n\}$$

$$p \in \mathbb{R}^n; \quad P = \{p^i\} = \{p^1 \dots p^n\} \in M_*^{n \times n}; \quad \pi \in \mathbb{R}^n, \quad \pi \geq 0$$

Здесь $M_*^{n \times n} = \{P : \det P \neq 0, \quad \|p^i\| = 1, \quad i = 1, \dots, n\}$ – множество всех неособых $(n \times n)$ -матриц P со столбцами p^i единичной длины ($\|x\| = (x, x)^{1/2}$ – евклидова норма). Можно сказать, что p задает центр параллелепипеда, p^i – "направления", а π_i – величины его "полуосей". Заметим, что условие $\|p^i\| = 1$ несущественно и может быть опущено.

Итак, предполагаем, что

$$X_0 = P(p_0, P_0, \pi_0), \quad R(t) = P(r(t), R(t), \rho(t)) \quad (1.8)$$

где r, R, ρ – непрерывные векторные и матричные функции. Будем искать внешние для $X(t)$ оценки $P(t) = P(p(t), P(t), \pi(t))$, обладающие обобщенным полугрупповым и эволюционным свойствами, являющимися аналогами свойства (1.6). Напомним, что *эволюционное свойство* [4] оценок формулируется в терминах МД:

$$X(t, \tau, P(\tau)) \subseteq P(t), \quad \forall \tau, t: 0 \leq \tau \leq t \leq \theta; \quad X_0 \subseteq P(0) \quad (1.9)$$

и гарантирует выполнение оценки (1.7). Как увидим ниже, $P(t)$ могут быть найдены из эволюционных уравнений с начальными условиями $P(0)$, и по аналогии с МД можно

ввести обозначения $P(t) = P\{t, 0, P(0)\}$. Говорят [3], что оценки $P(t)$ обладают "верхним" полугрупповым свойством, если

$$P\{t, 0, P(0)\} = P\{t, \tau, P\{\tau, 0, P(0)\}\}, \quad 0 \leq \tau \leq t \leq \theta; \quad X_0 \subseteq P(0) \quad (1.10)$$

Далее используем обозначения: $\text{co } X$ – выпуклая оболочка $X \subseteq \mathbb{R}^n$; $\text{conv } \mathbb{R}^n$ – множество выпуклых компактных подмножеств \mathbb{R}^n ; $\rho(l | X) = \sup\{(x, l) : x \in X\}$, $l \in \mathbb{R}^n$, – опорная функция $X \subseteq \mathbb{R}^n$; $M^{n \times m}$ – пространство вещественных $(n \times m)$ -матриц; δ_i^j – символы Кронекера; $E = \{\delta_i^j\}$ – единичная матрица; $\text{diag } \pi$, $\text{diag}\{\pi_i\}$ – диагональная матрица с компонентами π_i вектора π на диагонали; AbA – матрица, полученная из A заменой всех элементов, кроме диагональных, их абсолютными величинами; \top – знак транспонирования; $e^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ – i -й единичный орт в \mathbb{R}^n (единица стоит на i -м месте); $e = (1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$; $E(X)$ – совокупность всех крайних точек множества $X \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ (точка $x \in X$ называется крайней, если не существует таких $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$, что $x = (x^1 + x^2)/2$); $B(c, r)$ – шар в \mathbb{R}^n с центром c и радиусом r ; $h_+(X, Y) = \min\{\gamma \geq 0 \mid X \subseteq Y + \gamma B(0, 1)\}$ – хаусдорфово полурасстояние; $y = \max_{x \in X} \phi(x)$, где $y, \phi \in \mathbb{R}^n$, означает $y_i = \max_{x \in X} \phi_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$).

2. Свойства параллелепипедов. Приведем некоторые свойства параллелепипедов (см. также [16]).

Опорная функция параллелепипеда вычисляется по формуле

$$\rho(l | P(p, P, \pi)) = (p, l) + \sum_{i=1}^n |(p^i, l)| \pi_i$$

Внешняя оценка для $Q \in \text{conv } \mathbb{R}^n$, минимальная по включению среди параллелепипедов с данной матрицей ориентации V , имеет вид

$$P_V(Q) = P(v, V, v) \quad (v = Vc) \quad (2.1)$$

$$c_i = (\rho((V^{-1})^\top e^i | Q) - \rho(-(V^{-1})^\top e^i | Q)) / 2$$

$$v_i = (\rho((V^{-1})^\top e^i | Q) + \rho(-(V^{-1})^\top e^i | Q)) / 2, \quad i = 1, \dots, n$$

Построение параллелепипедозначных оценок для МД основывается на выполнении операций над параллелепипедами (аффинного преобразования, геометрической суммы и умножения на интервальную матрицу). Результат такой операции может не быть параллелепипедом и в этом случае будет аппроксимироваться параллелепипедом снаружи.

Если матрица $A \in M^{n \times n}$ – неособая, $a \in \mathbb{R}^n$, то

$$AP(p, P, \pi) + a = P(Ap + a, AP, \pi) = P(Ap + a, APB^{-1}, B\pi)$$

$$B = \text{diag}\{\|Ap^i\|\}$$

Для суммы параллелепипедов формула (2.1) принимает вид

$$P_V\left(\sum_{k=1}^N P(p^{(k)}, P^{(k)}, \pi^{(k)})\right) = P\left(\sum_{k=1}^N p^{(k)}, V, \sum_{k=1}^N \text{Abs}(V^{-1}P^{(k)})\pi^{(k)}\right)$$

Под интервальной матрицей $A = \{a_i^j\}$, задаваемой парой матриц $\underline{A} = \{\underline{a}_i^j\}$, $\bar{A} = \{\bar{a}_i^j\} \in M^{n \times n}$, $\underline{A} \leq \bar{A}$, понимаем [14] матрицу, элементы которой – интервалы

$\mathbf{a}_i^j = [\underline{a}_i^j, \bar{a}_i^j]$, или, по-другому, множество матриц $\mathbf{A} = \{A \in M^{n \times n} : \underline{A} \leq A \leq \bar{A}\}$. Умножение множества $\mathbf{X} \subset \mathbb{R}^n$ на интервальную матрицу \mathbf{A} определяем соотношением

$$\mathbf{A} \circ \mathbf{X} = \{y \in \mathbb{R}^n : y = Ax, A \in \mathbf{A}, x \in \mathbf{X}\}$$

Отметим, что если

$$\tilde{\mathbf{A}} = (\underline{A} + \bar{A})/2, \quad \hat{\mathbf{A}} = (\bar{A} - \underline{A})/2, \quad \hat{\mathbf{A}} = \{A : \text{Abs } A \leq \hat{\mathbf{A}}\}$$

то $\mathbf{A} \circ \mathbf{X} \subseteq \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{X} + \hat{\mathbf{A}} \circ \mathbf{X}$. Известно [6–8], что при $\mathbf{X} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$ множество $\mathbf{A} \circ \mathbf{X}$ может быть невыпуклым.

Пусть $\mathbf{Q} = \text{co}(\mathbf{A} \circ \mathbf{X})$. Если известна функция $\rho(l | \mathbf{Q})$, то формулы (2.1) определяют целое семейство оценок $\mathbf{P}_V(\mathbf{Q})$. С помощью известных результатов [6] проверяется справедливость следующего утверждения.

Лемма 1. Если $\mathbf{X} \in \text{conv } \mathbb{R}^n$, а \mathbf{A} – интервальная матрица, то

$$\rho(l | \text{co}(\mathbf{A} \circ \mathbf{X})) = \max_{x \in \mathbb{E}(\mathbf{X})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max\{\underline{a}_i^j l_i x_j, \bar{a}_i^j l_i x_j\} = \max_{x \in \mathbb{E}(\mathbf{X})} \{l^\top \tilde{\mathbf{A}}x + (\text{Abs } l)^\top \hat{\mathbf{A}}(\text{Abs } x)\} \quad (2.2)$$

Замечание 1. Если $\mathbf{X} = \mathbf{P} = \mathbf{P}(p, P, \pi)$, то максимум в (2.2) берется по вершинам \mathbf{P} , число которых не более 2^n . Если число m ненулевых элементов невелико ($m < n$), то может оказаться менее трудоемким использование другого выражения для $\rho(l | \text{co}(\mathbf{A} \circ \mathbf{P}))$. Пусть $\mathbb{E}(\mathbf{A})$ – совокупность "крайних значений" \mathbf{A} , т.е. множество всевозможных различных матриц $A^{(k)}$ с элементами $a_i^{(k)j} \in \{\underline{a}_i^j, \bar{a}_i^j\}$ ($i, j = 1, \dots, n$).

Тогда

$$\rho(l | \text{co}(\mathbf{A} \circ \mathbf{P})) = \max_{A^{(k)} \in \mathbb{E}(\mathbf{A})} \left\{ (A^{(k)} p, l) + \sum_{i=1}^n |(A^{(k)} p^i, l)| \pi_i \right\} \quad (2.3)$$

поскольку

$$\text{co}(\mathbf{A} \circ \mathbf{P}) = \text{co}(\cup \{A^{(k)} \mathbb{E}(\mathbf{P}) | A^{(k)} \in \mathbb{E}(\mathbf{A})\})$$

(см., например, [10]). Число элементов $A^{(k)}$ множества $\mathbb{E}(\mathbf{A})$ равно 2^m , где $m \leq n^2$.

Отметим связь между оценками $\mathbf{P}_E(\mathbf{A} \circ \mathbf{P})$ и результатом использования операций из интервального анализа [14, 15]. Классическая интервальная арифметика – это алгебраическая система $\langle I(\mathbb{R}), +, -, *, / \rangle$. Ее носитель $I(\mathbb{R})$ образован интервалами $[\underline{x}, \bar{x}] = \{x : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ вещественной оси \mathbb{R} . Пусть $\star \in \{+, -, *, /\}$ – бинарная операция на \mathbb{R} . Если $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in I(\mathbb{R})$, то $\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \{z = a \star b : a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\}$ определяет бинарную операцию на $I(\mathbb{R})$. Пусть $M^{m \times n}(I(\mathbb{R}))$ – множество интервальных $(m \times n)$ -матриц. Операции над ними определяются следующим образом [14]: если $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_i^j\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_i^j\} \in M^{m \times n}(I(\mathbb{R}))$, то $\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \{\mathbf{a}_i^j \pm \mathbf{b}_i^j\}$; если $\mathbf{A} \in M^{m \times r}(I(\mathbb{R}))$ и $\mathbf{B} \in M^{r \times n}(I(\mathbb{R}))$, то $\mathbf{A} * \mathbf{B} = \left\{ \sum_{k=1}^r \mathbf{a}_i^k * \mathbf{b}_k^j \right\}$.

Замечание 2. $\mathbf{A} \circ \mathbf{P} \subseteq \mathbf{P}_E(\mathbf{A} \circ \mathbf{P}) \subseteq \mathbf{A} * \mathbf{P}_E(\mathbf{P})$ для любого параллелепипеда \mathbf{P} . Если же $\mathbf{P} = \mathbf{P}(p, E, \pi)$, то $\mathbf{P}_E(\mathbf{A} \circ \mathbf{P}) = \mathbf{A} * \mathbf{P}_E(\mathbf{P}) = \mathbf{A} * \mathbf{P}$.

Пример. Построим несколько внешних оценок для $\mathbf{A} \circ \mathbf{P}$, где

$$\mathbf{A} = \{A : \text{Abs}(A - \tilde{\mathbf{A}}) \leq \hat{\mathbf{A}}\}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = E + \sigma C, \quad \hat{\mathbf{A}} = \sigma D, \quad \mathbf{P} = \mathbf{P}((1,1)^\top, P, (3,2)^\top)$$

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 0 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} d & d \\ d & d \end{vmatrix}, \quad d = 0.5, \quad \sigma = 0.1, \quad P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

На фиг. 1 сплошной линией с выделенными вершинами показан параллелепипед \mathbf{P} , штриховой линией – множество $\mathbf{Q} = \text{co}(\mathbf{A} \circ \mathbf{P})$, крестиками – точки, определяющие \mathbf{Q} .

Штрихпунктиром изображена оценка $A * P_E(P)$, а толстыми линиями – оценки $P_{p^{(k)}}(Q)$ ($k=1,2$), где $P^{(1)} = E$, а $P^{(2)}$ совпадает с матрицей ориентации параллелепипеда $\tilde{A}P$. Тонкими линиями показаны $P_{p^{(k)}}(\tilde{A}P + \hat{A} \circ P)$ ($k=1,2$). Видно, что оценки вида $P_V(A \circ P)$ и даже $P_V(\tilde{A}P + \hat{A} \circ P)$ могут оказаться лучше (в смысле объема), чем $A * P_E(P)$.

3. Внешние оценки множеств достижимости. Пусть $P(t) \in M^{n \times n}$, $t \in T$, – непрерывно дифференцируемая функция, причем

$$\det P(t) \neq 0, \quad t \in T \quad (3.1)$$

($P(t)$ будет определять динамику матриц ориентации). Построим внешние оценки $P(t)$ для МД $X(t)$. Рассуждения аналогичны известным [3, 4, 7].

Зафиксируем $t \in (0, \theta]$ и рассмотрим разбиение T_N отрезка $[0, t]$ точками

$$t_0 = 0, \quad t_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i, \quad k = 1, \dots, N, \quad t_N = t, \quad \sigma_i > 0$$

Используем простейшую конечно-разностную аппроксимацию системы (1.1)

$$x[k] = A[k]x[k-1] + B[k]w[k], \quad k = 1, \dots, N \quad (3.2)$$

$$A[k] = E + \sigma_k A(t_{k-1}) \in \mathbf{A}[k] = \{E + \sigma_k A : A \in \mathbf{A}(t_{k-1})\}$$

$$x[0] \in X_0, w[k] \in \mathbf{R}[k] = \sigma_k \mathbf{R}(t_{k-1}), \quad B[k] \in \mathbf{B}[k] = \mathbf{B}(t_{k-1})$$

Если, задавшись матрицами $P[k]$, построить $\mathbf{P}[k] = \mathbf{P}(p[k], P[k], \pi[k])$:

$$\mathbf{P}[0] = \mathbf{P}_{P[0]}(X_0), \quad \mathbf{P}[k] = \mathbf{P}_{P[k]}(Z[k]), \quad k = 1, \dots, N \quad (3.3)$$

$$Z[k] = \sum_{j=1}^J Z^{(j)}[k], \quad Z^{(1)}[k] = \mathbf{B}[k] \circ \mathbf{R}[k] \quad (3.4)$$

$$Z^{(2)}[k] = \tilde{A}[k]P[k-1], \quad Z^{(3)}[k] = \tilde{A}[k] \circ P[k-1], \quad J = 3 \quad (3.5)$$

$$\tilde{A}[k] = E + \sigma_k \tilde{A}(t_{k-1}), \quad \hat{\mathbf{A}}[k] = \{\sigma_k A : A \in \hat{\mathbf{A}}(t_{k-1})\}$$

то в силу сказанного в разд. 2 будут выполнены соотношения

$$X_0 \subseteq \mathbf{P}[0], \quad Z[k] \subseteq \mathbf{P}[k], \quad k = 1, \dots, N \quad (3.6)$$

и $\mathbf{P}[k]$ будут внешними оценками (типа I, верхний индекс I) для МД $X[k]$ многошаговой системы (3.2). Такими же свойствами обладают и, вообще говоря, более точные оценки (типа II, верхний индекс II) вида (3.3), (3.4), где

$$Z^{(2)}[k] = \mathbf{A}[k] \circ P[k-1], \quad J = 2 \quad (3.7)$$

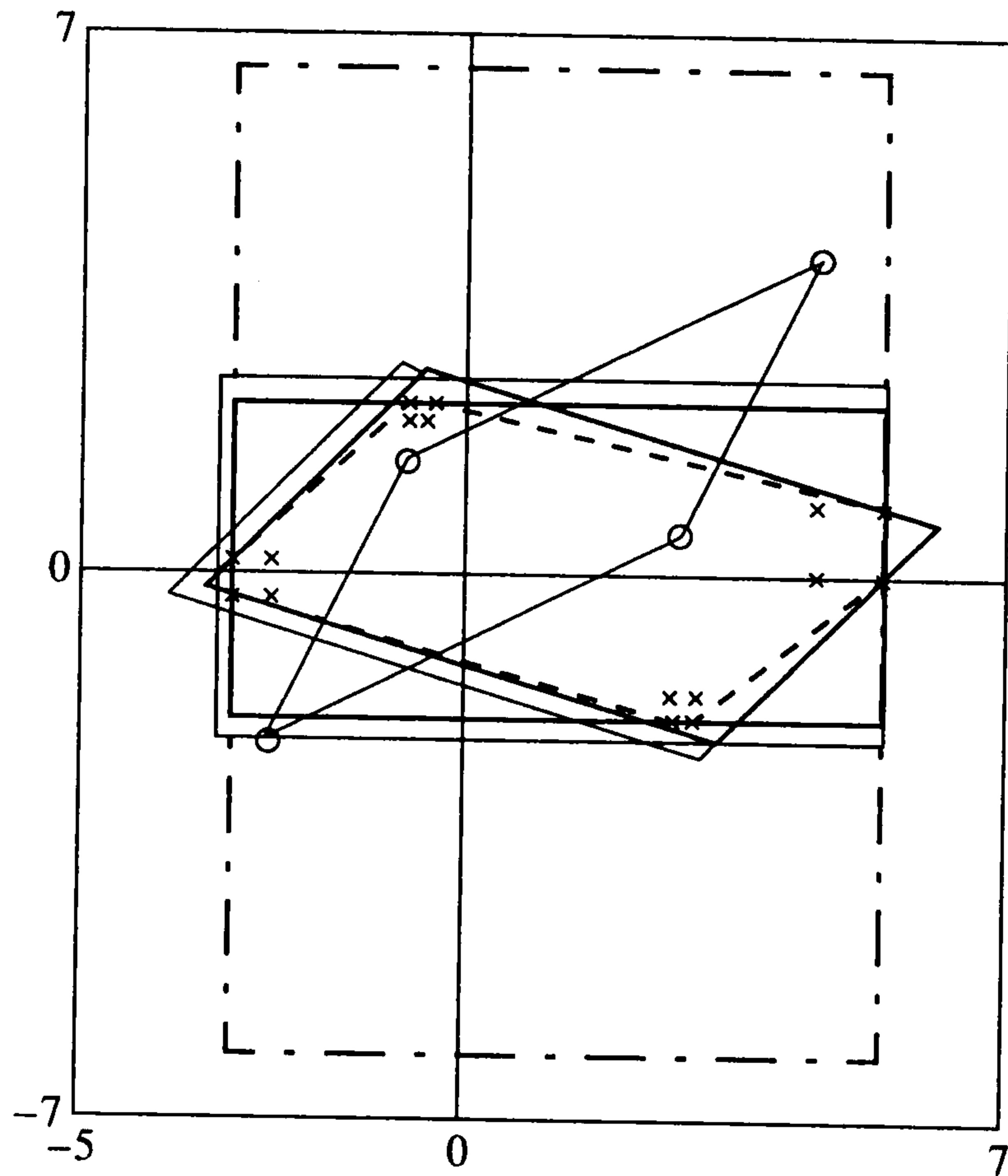
Отправляясь от формул (3.3)–(3.5) и (3.3), (3.4), (3.7), построим для $X(t)$ оценки $\mathbf{P}^I(t) = \mathbf{P}(p^I(t), P(t), \pi^I(t))$ и $\mathbf{P}^{II}(t) = \mathbf{P}(p^{II}(t), P(t), \pi^{II}(t))$.

В качестве $P[k]$ возьмем матрицы $P[k] = P(t_k)$. Тогда

$$P[k] = P[k-1] + \sigma_k \dot{P}(t_{k-1}) + o(\sigma), \quad k = 1, \dots, N \quad (3.8)$$

$$P[k]^{-1} = P[k-1]^{-1} - \sigma_k P[k-1]^{-1} \dot{P}(t_{k-1}) P[k-1]^{-1} + o(\sigma) \quad (3.9)$$

$$\sigma = \max\{\sigma_i \mid i = 1, \dots, N\}, \quad \sigma^{-1} o(\sigma) \rightarrow 0 \quad \text{при } \sigma \rightarrow 0$$



Фиг. 1

Конкретизируя формулы (3.3)–(3.5), имеем

$$p[k] = \sum_{j=1}^J p^{(j)}[k], \quad \pi[k] = \sum_{j=1}^J \pi^{(j)}[k] \quad (3.10)$$

$$p^{(j)}[k] = P[k](\rho^{(j)+}[k] - \rho^{(j)-}[k])/2, \quad \pi^{(j)}[k] = (\rho^{(j)+}[k] + \rho^{(j)-}[k])/2$$

$$\rho^{(1)\pm}[k] = \sigma_k \max_{w \in \mathbb{E}(\mathbf{R}(t_{k-1}))} \{\pm P[k]^{-1} \tilde{B}(t_{k-1})w + \text{Abs}(P[k]^{-1}) \hat{B}(t_{k-1}) \text{Abs } w\}$$

причем

$$p^{(2)}[k] = (E + \sigma_k \tilde{A}(t_{k-1}))p[k-1], \quad p^{(3)}[k] = 0$$

$$\pi^{(2)}[k] = \text{Abs}(P[k]^{-1}(E + \sigma_k \tilde{A}(t_{k-1}))P[k-1])\pi[k-1] \quad (3.11)$$

$$\pi^{(3)}[k] = \sigma_k \max_{x \in \mathbb{E}(P[k-1])} \text{Abs}(P[k]^{-1}) \hat{A}(t_{k-1}) \text{Abs } x$$

Вычтем $\pi[k-1]$ из обеих частей выражения для $\pi[k]$, поделим на σ_k и перейдем к пределу при $\sigma \rightarrow 0$. При этом используем выражение (3.9), оценки типа

$$\|a + \varepsilon\| - \|a\| \leq 3\|\varepsilon\|, \quad |\max\{a_1 + \varepsilon_1, a_2 + \varepsilon_2\} - \max\{a_1, a_2\}| \leq \max\{|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|\}$$

равенство

$$\text{Abs}(E + D) - E = \text{Ab } D, \quad \forall D = \{d_i^j\} : |d_i^j| \leq 1, \quad i = 1, \dots, n$$

и непрерывность $\tilde{A}, \hat{A}, \tilde{B}, \bar{B}$. В результате приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{\pi}^1 = \text{Ab}(P^{-1}(\tilde{A}P - \dot{P}))\pi^1 + \max_{\xi \in \mathbb{E}(P(0, E, e))} \text{Abs}(P^{-1}) \hat{A} \text{Abs}(p^1 + P \text{diag } \pi^1 \xi) + (f^+ + f^-)/2 \quad (3.12)$$

$$f^\pm = \max_{w \in \mathbb{E}(\mathbf{R}(t))} \{\pm P^{-1} \tilde{B} w + \text{Abs}(P^{-1}) \hat{B} \text{Abs } w\} \quad (3.13)$$

где аргументы t во всех членах для краткости опущены. Аналогично

$$\dot{p}^1 = \tilde{A} p^1 + P(f^+ - f^-)/2, \quad t \in T \quad (3.14)$$

Конкретизируя теперь формулы (3.3), (3.4), (3.7), имеем соотношения (3.10), где

$$\rho_i^{(2)\pm}[k] = \max_{\xi \in \mathbb{E}(\mathbf{P}(0, E, e))} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \max_{l=1,2} \{\pm \psi_{i\alpha\beta}^{(l)}(\sigma_k, \xi)\} \quad (3.15)$$

Здесь, при учете выражения (3.9),

$$\psi_{i\alpha\beta}^{(1)}(\sigma, \xi) = (P^{-1} - \sigma P^{-1} \dot{P} P^{-1} + o(\sigma))_i^\alpha (E + \sigma \underline{A})_\alpha^\beta (p + P \text{diag } \pi \xi)_\beta$$

причем аргументы t_{k-1} и $k-1$ для краткости опущены. Выделяя здесь члены первого порядка малости относительно σ , введем обозначения

$$\varphi_{i\alpha\beta}^{(1)}(\xi) = (-(P^{-1} \dot{P} P^{-1})_i^\alpha \delta_\alpha^\beta + (P^{-1})_i^\alpha \underline{a}_\alpha^\beta) (p + P \text{diag } \pi \xi)_\beta \quad (3.16)$$

Функции $\psi_{i\alpha\beta}^{(2)}(\sigma, \xi)$ и $\varphi_{i\alpha\beta}^{(2)}(\xi)$ получаются из $\psi_{i\alpha\beta}^{(1)}(\sigma, \xi)$ и $\varphi_{i\alpha\beta}^{(1)}(\xi)$ заменой \underline{A} на \bar{A} . Но $\pi^{(2)}[k-1] = (\tilde{\rho}^{(2)+} + \tilde{\rho}^{(2)-})/2$, где

$$\tilde{\rho}_i^{(2)\pm} = (\pm P^{-1} p + \pi)_i = \max_{\xi \in \mathbb{E}(\mathbf{P}(0, E, e))} \pm e^{i^T} P^{-1} (p + P \text{diag } \pi \xi) \quad (3.17)$$

т.е. $\tilde{\rho}_i^{(2)\pm}$ совпадают с правыми частями равенств (3.15) при $\sigma_k = 0$. Рассуждения, аналогичные приведенным ранее [17, с. 71–72], позволяют убедиться, что

$$\rho_i^{(2)\pm}[k] - \tilde{\rho}_i^{(2)\pm} = \sigma_k \Phi_i^\pm + o(\sigma), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.18)$$

$$\Phi_i^\pm = \max_{\xi \in \Xi_i^\pm} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \max_{l=1,2} \{\pm \varphi_{i\alpha\beta}^{(l)}(\xi)\} = \max_{\xi \in \Xi_i^\pm} (\pm P^{-1} (\bar{A} - \dot{P} P^{-1}) x + \text{Abs}(P^{-1}) \hat{A} \text{Abs } x)_i; \quad x = p + P \text{diag } \pi \xi$$

Ввиду условия (3.1) и непрерывности \underline{A} , \bar{A} здесь $\sigma^{-1} o(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$ равномерно по t , p , π , если последние берутся из замкнутой ограниченной области. Максимум в (3.18) следует брать по тем $\xi \in \mathbb{E}(\mathbf{P}(0, E, e))$, на которых достигается максимум в (3.17), т.е. можно брать

$$\Xi_i^\pm = \{\xi : \xi \in \mathbb{E}(\mathbf{P}(0, E, e)), \quad \xi_i = \pm 1\} \quad (3.19)$$

Расписывая $(\pi[k] - \pi[k-1])/\sigma_k$ и $(p[k] - p[k-1])/\sigma_k$ с учетом соотношений (3.10), (3.8), (3.18), (3.17) и переходя к пределу при $\sigma \rightarrow 0$, приходим к системе ОДУ

$$\dot{\pi}^{\text{II}} = (\Phi^+ + \Phi^-)/2 + (f^+ + f^-)/2 \quad (3.20)$$

$$\dot{p}^{\text{II}} = \dot{P} P^{-1} p^{\text{II}} + P(\Phi^+ - \Phi^-)/2 + P(f^+ - f^-)/2$$

Теорема 1. Пусть $\mathbf{X}(t)$ – МД системы (1.1)–(1.5), (1.8) и задана произвольная непрерывно дифференцируемая функция $P(t) \in M^{n \times n}$, $t \in T$, удовлетворяющая условию (3.1). Если параметры параллелепипедов $\mathbf{P}^{\text{I}}(t) = \mathbf{P}(p^{\text{I}}(t), P(t), \pi^{\text{I}}(t))$ определяются ОДУ (3.12)–(3.14) (типа I) и

$$\pi^{\text{I}}(0) = \text{Abs}(P(0)^{-1} P_0) \pi_0, \quad p^{\text{I}}(0) = p_0 \quad (3.21)$$

то $\mathbf{P}^{\text{I}}(t)$ удовлетворяют соотношениям (1.9), (1.10). Такими же свойствами обладают $\mathbf{P}^{\text{II}}(t)$, определяемые равенствами (3.21) (с заменой индекса I на II) и ОДУ (3.20)

(типа II), где зависимость функций f^\pm от t и Φ^\pm от t , p^{II} , π^{II} определяется формулами (3.13), (3.18), (3.19), (3.16), в которых p и π следует заменить на p^{II} и π^{II} . При этом $X(t) \subseteq P^{\text{II}}(t) \subseteq P^{\text{I}}(t)$.

Доказательство аналогично приведенному ранее [4, п. 8.3] (но без замены переменных [4, с. 129]). Для проверки включения (1.9) используется включение

$$X(t_k, t_j, P[j]) \subseteq P[k] + o(1)B(0,1), \quad t_k, t_j \in T_N$$

где $P[k]$ строятся по формулам (3.3)–(3.5) или (3.3), (3.4), (3.7), $o(1) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$, величина $o(1)$ равномерно мала на T и не зависит от T_N . Для доказательства последнего включения устанавливается, с использованием уравнения интегральной воронки [18, 8], что

$$h_+(X(t_{i+1}, t_i, P[i]), P[i+1]) \leq o(\sigma)$$

и проводятся рассуждения, аналогичные приведенным известным [19, гл. VIII, § 4]. Соотношения $P^{\text{II}}[k] \subseteq P^{\text{I}}[k]$ обеспечивают включения $P^{\text{II}}[t] \subseteq P^{\text{I}}[t]$.

Замечание 3. Были построены [7] внешние эллипсоидальные оценки для МД системы (1.1), (1.2), (1.5), где $B(t) \equiv E$, X_0 – эллипсоид и функция $w(t)$ известна точно. В ОДУ для матрицы эллипсоида присутствует операция максимума, требующая перебора 2^{m-1} вариантов, где m – число ненулевых элементов \hat{A} . В общем случае $m = n^2$, и тогда вычисление параллелепипедозначных оценок может оказаться менее трудоемким.

Замечание 4. Если число ненулевых элементов в \hat{A} и \hat{B} невелико, то в уравнениях (3.12), (3.13) можно заменить:

$$\max_{x \in E(P^{\text{I}}(t))} \text{Abs}(P^{-1})\hat{A} \text{Abs} x = \max_{D \in E(\hat{A}(t))} \{P^{-1}Dp^{\text{I}} + \text{Abs}(P^{-1}DP)\pi^{\text{I}}\}$$

$$f^\pm = \max_{B \in E(B(t))} \{\pm P^{-1}Br + \text{Abs}(P^{-1}BR)\rho\}$$

Замечание 5. Если $\underline{B} \equiv \bar{B} \equiv E$, то

$$(f^+ + f^-)/2 = \text{Abs}(P^{-1}R)\rho, \quad P(f^+ - f^-)/2 = r$$

Если к тому же $\underline{A} \equiv \bar{A}$, то система (3.12), (3.14) совпадает с системой (3.20).

Замечание 6. Если $P(t)$ вычисляется в силу системы

$$\dot{P} = \tilde{A}P, \quad t \in T; \quad P(0) = P_0 \tag{3.22}$$

то в условиях замечания 5 приходим к уравнениям, выведенным ранее [16].

Замечание 7. Если $P \equiv E$, то получаем покоординатные оценки двух типов для $X(t)$. При

$$X_0 = P(0, E, \pi_0), \quad R \equiv P(0, E, \rho), \quad \tilde{A} \equiv \text{diag } \lambda, \quad \underline{B} \equiv \bar{B} \equiv E, \quad P \equiv E$$

уравнения (3.12), (3.14) совпадают с выведенными [20] при тех же условиях другим способом.

Замечание 8. Если \tilde{A} – постоянная простая матрица с n действительными собственными числами λ_i , а столбцы P постоянны и совпадают с собственными векторами \tilde{A} , т.е.

$$P \text{diag } \lambda = \tilde{A}P$$

то

$$\dot{\pi}^{\text{I}} = \text{diag } \lambda \pi^{\text{I}} + \max_{\xi \in E(P(0, E, e))} \text{Abs}(P^{-1})\hat{A} \text{Abs}(p^{\text{I}} + P \text{diag } \pi^{\text{I}} \xi) + \frac{f^+ + f^-}{2}$$

Если элементы \hat{A} не "малы", то даже более точные оценки $P^{\text{II}}(t)$ могут оказаться слишком грубыми. Выделим случай, когда МД можно оценить более точным путем объединения такого рода оценок.

Следствие 1. Пусть система принадлежит к классу систем с постоянными коэффициентами вида (1.1)–(1.4), где

$$A(t) \equiv A, \quad \hat{A}(t) \equiv A, \quad \hat{B}(t) \equiv 0 \quad (3.23)$$

и $Y(t)$ – МД системы (1.1)–(1.4), (3.23). (При $A(t) \equiv A$ множества достижимости $X(t)$ и $Y(t)$, соответствующие двум разным случаям, когда матрица A предполагается зависящей или не зависящей от t , вообще говоря, различны.) Пусть

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^J A^{(j)} \quad (3.24)$$

т.е. для каждой матрицы $A \in A$ найдется такая интервальная матрица $A^{(j)}$, что $A \in A^{(j)}$. Обозначим через $X^{(j)}(t)$ и $Y^{(j)}(t)$ соответственно МД систем (1.1)–(1.3) и (1.1)–(1.4), (3.23), где матрица A заменена на $A^{(j)}$, а через $P^{(j)}(t)$ – оценки типа I или II для $X^{(j)}(t)$, отвечающие $P^{(j)}(\cdot)$. Тогда

$$Y(t) \subseteq \bigcup_{j=1}^J Y^{(j)}(t) \subseteq \bigcup_{j=1}^J X^{(j)}(t) \subseteq \bigcup_{j=1}^J P^{(j)}(t), \quad t \in T \quad (3.25)$$

Замечание 9. Включение (3.24) можно получить, например, введя "интервальную сетку". A именно, представляя элементы a_{α}^{β} матрицы A в виде

$$a_{\alpha}^{\beta} = \bigcup_{j_{\alpha\beta}=1}^{J_{\alpha\beta}} a_{\alpha}^{(j_{\alpha\beta})\beta}$$

введем множество всевозможных интервальных матриц с элементами $a_{\alpha}^{(j_{\alpha\beta})\beta}$. Число таких матриц

$$J = \prod_{\alpha, \beta=1}^n J_{\alpha\beta}$$

где $J_{\alpha\beta} = 1$ для одноточечных интервалов a_{α}^{β} . При "достаточно густой" "интервальной сетке" внешние оценки для $Y(t)$ можно еще более уточнить путем взятия пересечения оценок (3.25) по некоторым множествам $\Pi^{(j)}$ функций $P^{(j)}(\cdot)$:

$$Y(t) \subseteq \bigcup_{j=1}^J \bigcap_{P^{(j)}(\cdot) \in \Pi^{(j)}} P^{(j)}(t)$$

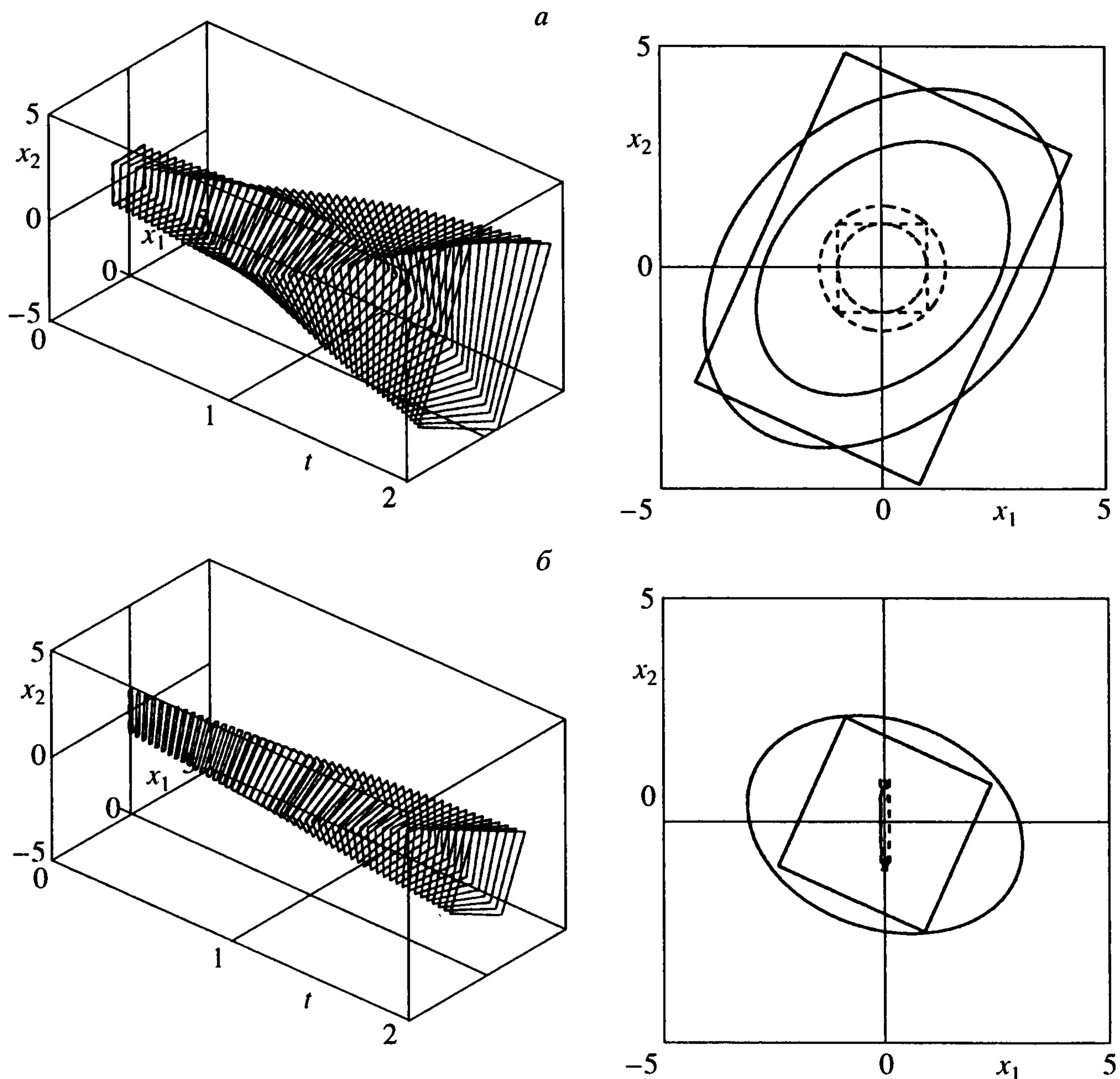
В частности, находя $P^{(j)}(\cdot)$ в силу системы (3.22), пересечение можно брать по некоторому множеству матриц $P(0) = P^0$:

$$Y(t) \subseteq \bigcap_{P^0} \bigcup_{j=1}^J P^{(j)}(t)$$

4. Примеры. 1°. Пусть

$$\tilde{A}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0.8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{B}(t) \equiv \bar{B}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta = 2$$

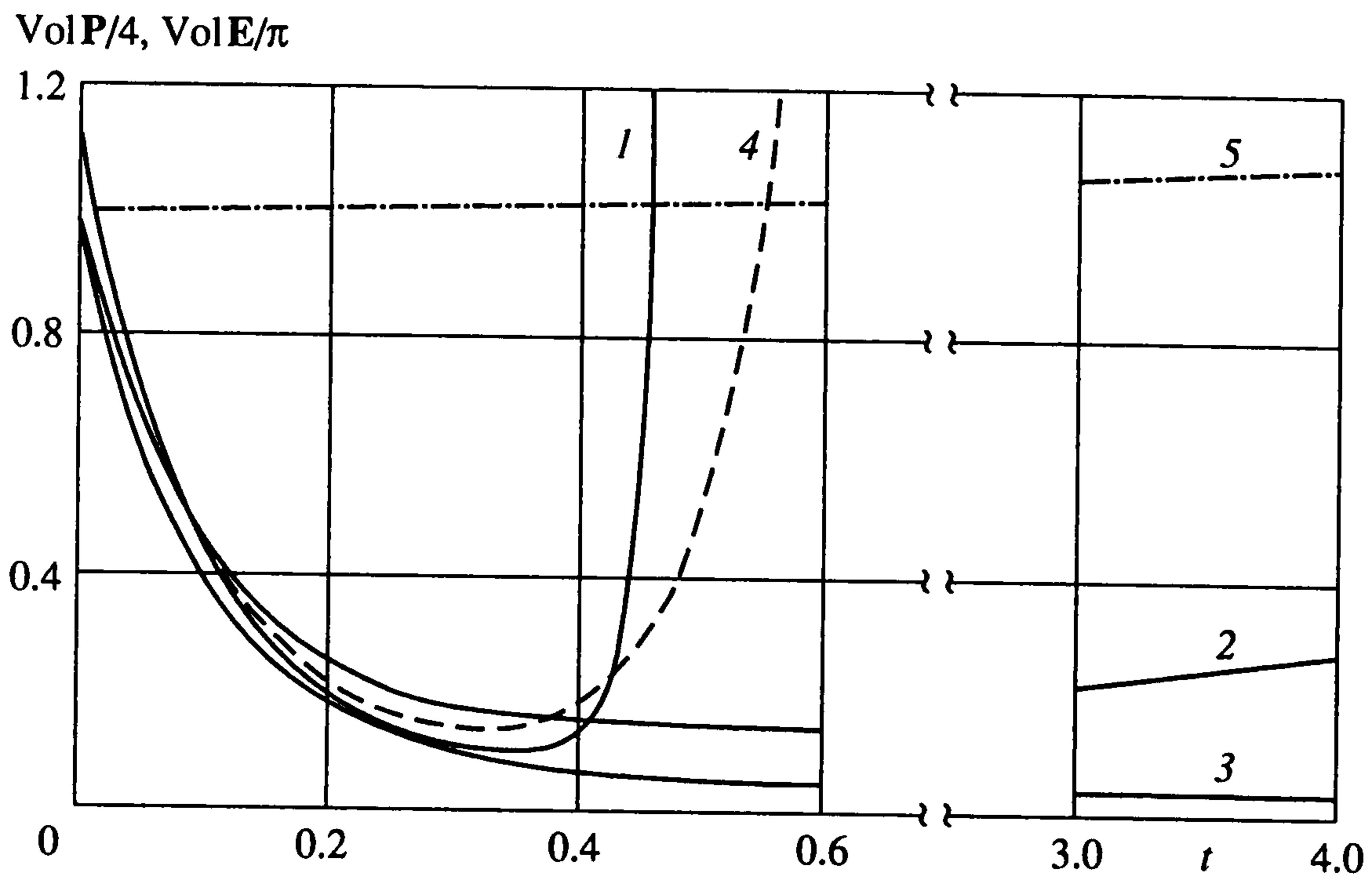
Обозначим через $P^{(1)}(t)$, $P^{(2)}(t)$ и $P^{(3)}(t)$ оценки $P^{II}(t)$ для МД, соответствующих $X_0 = P_0^{(1)} = P(0, E, e)$ (первый случай), $X_0 = P_0^{(2)} = P(0, E, (0.1, 1)^T)$ (второй случай) и $X_0 = P_0^{(3)} = P(0, E, (1, 0.1)^T)$ (третий случай), полученные при выполнении соотношений (3.22). Пусть $E^{(1,1)}(t)$, $E^{(1,2)}(t)$, $E^{(2)}(t)$ и $E^{(3)}(t)$ – эллипсоидальные внешние оценки для МД, соответствующих $X_0 = E_0^{(1,1)} = B(0, 1)$, $X_0 = E_0^{(1,2)} = B(0, \sqrt{2})$, $X_0 = E_0^{(2)} = E(0, \text{diag}\{0.01, 1\})$ и $X_0 = E_0^{(3)} =$



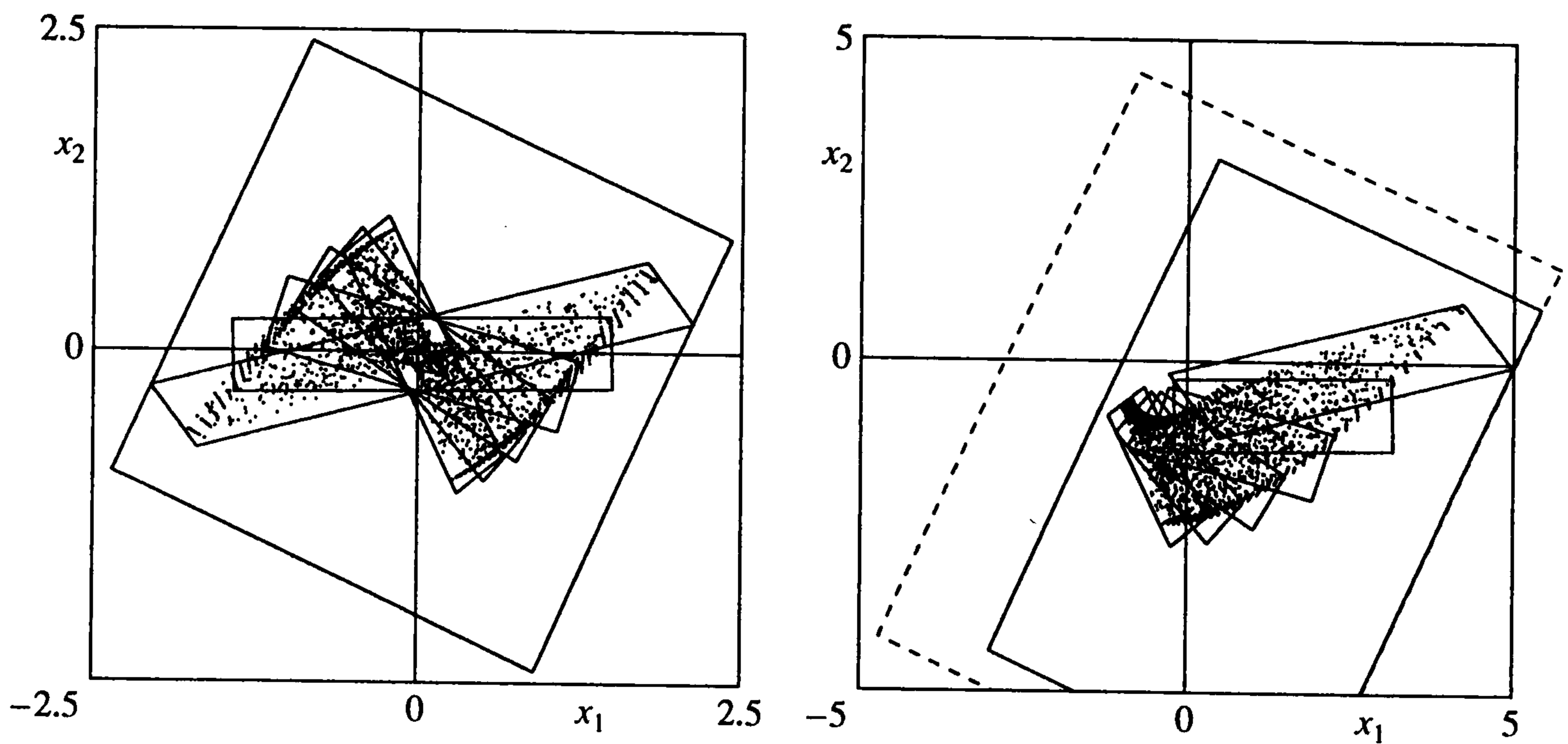
Фиг. 2

$= E(0, \text{diag}\{1, 0.01\})$, построенные с помощью уравнений из известного примера [7]. Здесь $E(q, Q) = \{x : (Q^{-1}(x - q), (x - q)) \leq 1\}$ обозначает эллипсоид.

Численный расчет $P^{(i)}$ произведем по формулам (3.3), (3.4), (3.7) при $N = 500$, а для нахождения эллипсоидальных оценок используем функцию численного интегрирования `ode23.m` из системы MATLAB. На фиг. 2, а слева показаны сечения $P^{(1)}(\cdot)$ через каждые 10 шагов k , справа штриховыми линиями изображены множества $E_0^{(1,1)} \subset P_0^{(1)} \subset E_0^{(1,2)}$, а сплошными линиями – оценки $E^{(1,1)}(\theta), P^{(1)}(\theta)$ и $E^{(1,2)}(\theta)$ (параллелограмм – $P^{(1)}(\theta)$, внутренний эллипс – $E^{(1,1)}(\theta)$, внешний – $E^{(1,2)}(\theta)$). Фиг. 2, б соответствует второму случаю. В таблице приведены значения отношения объемов оценок в некоторые моменты времени к объемам X_0 . Сравнение результатов, приведенных на фиг. 2 и в таблице, показывает, что параллелепипедозначные оценки оказались сопоставимы с эллипсоидальными, причем для первого случая они хуже эллипсоидальных, а для второго и третьего случаев – лучше (в частности, $P^{(2)}(\theta) \subset E^{(2)}(\theta)$, хотя $P_0^{(2)} \supset E_0^{(2)}$). "Эффект упаковки" для оценок, описываемых ОДУ (3.20), (3.22), проявился значительно меньше, чем для покоординатных оценок, описываемых ОДУ (3.20) при $P \equiv E$ (см. таблицу, где $P^{(i)c}(t)$ – покоординатные оценки для случаев $i = 1, 2, 3$). В данном примере параллелепипедозначные оценки типов I и II совпали. Для $X_0 = P(e, E, e)$ объемы оценок типов I и II при выполнении соотношений (3.22) отличаются в момент времени θ более чем в 1.5 раза.



Фиг. 3



Фиг. 4

2°. Пусть

$$\tilde{A}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -15 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \underline{B}(t) \equiv \overline{B}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta = 4$$

(система с постоянными коэффициентами из выбранного диапазона описывает затухающий гармонический осциллятор).

i	1		2		3	
	1	2	1	2	1	2
$\text{vol } \mathbf{P}^{(i)}(t) / \text{vol } \mathbf{P}_0^{(i)}$	3.8	11.4	6.3	32.8	13.8	33.6
$\text{vol } \mathbf{E}^{(1,j)}(t) / \text{vol } \mathbf{E}_0^{(1,j)}, j=1,2$	2.6	7.7				
$\text{vol } \mathbf{E}^{(i)}(t) / \text{vol } \mathbf{E}_0^{(i)}$			7.0	74.2	27.4	53.1
$\text{vol } \mathbf{P}^{(i)c}(t) / \text{vol } \mathbf{P}_0^{(i)}$	14.9	218.1	35.0	511.8	56.5	826.8

Построим оценки $P^{(i)}(t)$ ($i = 1, 2, 3$) для МД из $X_0 = P(0, E, e)$ в соответствии с замечаниями 6–8 (оценки типов I и II для первых двух случаев опять совпадают) и найдем оценки $E^{(4)}(t)$ и $E^{(5)}(t)$ для МД из $X_0 = B(0, 1)$, пользуясь соответственно ОДУ из [7] и методикой из [10].

На фиг. 3 приведены графики отношения объема оценки к объему X_0 . Объем эллипсоидальной оценки [7] (кривая 4) сначала убывает, а затем возрастает, достигая к моменту θ значения $3.4 \cdot 10^{22}$. Алгоритм, предложенный в [10], дает лишь устойчивую эллипсоидальную оценку, объем которой незначительно возрастает (см. кривую 5; она была приведена [10] для расчета с шагом $\theta/N = 10^{-4}$). Оценку $P^{(1)}(\cdot)$ (кривая 1) достроить до момента θ не удастся, ни пользуясь формулами (3.3), (3.4), (3.7) при $N = 10^4$, ни интегрируя ОДУ с помощью решателей системы MATLAB, так как матрица $P(t)$ становится близкой к вырожденной. Объем покоординатной оценки $P^{(2)}(\cdot)$ (кривая 2) сначала убывает, а затем медленно возрастает. В целом наилучшие результаты (в смысле объема) дает оценка $P^{(3)}(\cdot)$ (кривая 3), объем которой монотонно убывает (хотя $\text{vol}P^{(3)}(0)/\text{vol}X_0 > 1$). Таким образом, оценки $P^{(2)}(\cdot)$ и $P^{(3)}(\cdot)$ оказались лучше эллипсоидальных, предложенных в [7, 10].

3°. В примере 1° дополнительно предположим, что $A(t) \equiv A$. На фиг. 4 показаны точки из МД $Y(\theta)$, отвечающих $X_0 = P_0^{(2)}$ (слева) и $X_0 = P_0^{(2)} + e$ (справа). Упомянутые точки вычислены по формуле Коши при выбранных случайным образом начальных точках из X_0 и значениях матрицы A из A . "Большие" параллелепипеды – это внешние оценки для множеств $Y(\theta) \subseteq X(\theta)$, найденные при условии (3.22) (оценки типов I и II изображены штриховой и сплошной линиями; на левом рисунке они сливаются). Показаны также параллелепипеды типа II (при условии (3.22)) для систем, соответствующих "интервальной сетке", полученной в результате разбиения $a_2^1 = [-1.8, -0.2]$ на шесть равных частей. Объединение таких параллелепипедов дает более точные невыпуклые оценки для $Y(\theta)$.

Автор благодарит А.Б. Куржанского за внимание к работе, замечания и обсуждение результатов, а также Б.И. Ананьева, М.И. Гусева и Т.Ф. Филиппову за обсуждение и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00369).

ЛИТЕРАТУРА

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Kurzhanski A.B., Vályi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
4. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
5. Kurzhanskii A.B. Dynamic control system estimation under uncertainty conditions // Prob. of Control and Inform. Theory. I. 1980. V. 9. № 6. P. 395–406; II. 1981. V. 10. № 1. P. 33–42.
6. Barmish B.R., Sankaran J. The propagation of parametric uncertainty via polytopes // IEEE Trans. Automat. Control. 1979. V. AC-24. № 2. P. 346–349.
7. Черноусько Ф.Л. Эллипсоидальная аппроксимация множеств достижимости линейной системы с неопределенной матрицей // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 6. С. 940–950.
8. Filippova T.F., Lisin D.V. On the estimation of trajectory tubes of differential inclusions // Proc. of the Steklov Institute of Mathematics. 2000. Suppl. 2. P. S28–S37.
9. Milanese M., Norton J., Piet-Lahanier H., Walter E., eds. Bounding Approaches to System Identification. N.Y.; L.: Plenum Press, 1996. 565 p.
10. Каюмов Р.И. Гарантированные оценки состояния одного класса систем с неопределенными коэффициентами // Оценивание динамики управляемых движений. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 57–64.

11. *Рокитянский Д.Я.* Оптимальные эллипсоидальные оценки множества достижимости линейных систем с неопределенной матрицей // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 4. С. 17–20.
12. *Корноушенко Е.К.* Интервальные по координатным оценкам для множества достижимых состояний линейной стационарной системы // Автоматика и телемеханика. I. 1980. № 5. С. 12–22; II. 1980. № 12. С. 10–17; III. 1982. № 10. С. 47–52; IV. 1983. № 2. С. 81–87.
13. *Костоусова Е.К., Куржанский А.Б.* Гарантированные оценки точности вычислений в задачах управления и оценивания // Вычисл. технологии. 1997. Т. 2. № 1. С. 19–27.
14. *Alefeld G., Herzberger J.* Introduction to interval computations. N.Y. etc.: Acad. Press, 1983. = *Алефельд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. 356 с.
15. *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 221 с.
16. *Koustousova E.K.* State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimization Methods and Software. 1998. V. 9. № 4. P. 269–306.
17. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
18. *Панасюк А.И., Панасюк В.И.* Об одном уравнении, порождаемом дифференциальным включением // Мат. заметки. 1980. Т. 27. № 3. С. 429–437.
19. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987. 598 с.
20. *Рокитянский Д.Я.* Уравнения эволюции оптимальных оценок множества достижимости линейных систем с неопределенной матрицей // Докл. РАН. 1999. Т. 364. № 5. С. 608–610.

Екатеринбург
e-mail: kek@imm.uran.ru

Поступила в редакцию
4.VI.2001