

УДК 531.36:534.1

© 2002 г. И.М. Архипова

УСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖЕСТКОГО НЕУРАВНОВЕШЕННОГО РОТОРА В НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ ОПОРАХ

Рассматриваются установившиеся движения динамически и статически неуравновешенного ротора, установленного в упругие опоры с кубической нелинейностью, при наличии сил сопротивления различной природы в предположении, что ротор обладает четырьмя степенями свободы. Проведен анализ возможных типов установившихся движений. Исследована устойчивость различных видов прецессионного движения. Получены условия возникновения автоколебаний и основные характеристики автоколебательных режимов.

Было показано [1–8], что жесткий ротор, вращающийся в упругих опорах, при неограниченном возрастании частоты вращения обладает свойством самоцентрирования, как и гибкий вал Лавала. Но при этом, как правило, не обсуждается возможность возникновения неустойчивости, автоколебаний и т.п. Ниже исследуется более подробно поведение твердого тела в упругих подшипниках.

1. Уравнения движения роторов. Рассматривается статически и динамически неуравновешенный абсолютно твердый ротор массой M и длиной L , установленный вертикально в двух неподвижных упругих опорах так, что его центр масс находится на одинаковом расстоянии от опор. Ротор обладает динамической симметрией, его момент инерции относительно оси симметрии равен A , экваториальные моменты инерции равны B .

Под статической неуравновешенностью e понимается смещение центра масс от оси вращения ротора; под динамической неуравновешенностью δ – угол между осью динамической симметрии и осью вращения ротора. Угол между плоскостью, проходящей через ось вращения и центр масс, и плоскостью, в которой лежит угол δ , обозначим через ϵ .

Относительно опор предполагается, что их податливость обладает центральной симметрией и реакции опор имеют только радиальные составляющие. Рассматривается случай жесткой характеристики восстанавливающей силы, включающей кубический член,

$$\mathbf{P}_j = -\mathbf{S}_j(a_0 + a_1 |S_j|^2), \quad j = 1, 2 \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{S}_j – вектор смещения центра соответствующей опоры от равновесного положения, a_0, a_1 – положительные вещественные постоянные, характеризующие упругость опор.

Ротор приводится во вращение двигателем неограниченной мощности, способным поддерживать постоянную угловую скорость вращения ω . При исследовании установившихся движений ротора предполагается, что на ротор действуют силы внешнего трения \mathbf{R}_j^e , пропорциональные абсолютной скорости движения центра опоры, силы

внутреннего трения R_j^i , пропорциональные относительной скорости движения центра опоры, возникающие в подшипниках при наличии масляной пленки, частично увлекаемой ротором [9], а также силы сопротивления R_j^m , пропорциональные скорости радиального перемещения центра опоры, которые возникают в жестком роторе при деформации шариков в подшипниках качения [5],

$$R_j^e = -\tilde{\mu}_e \dot{S}_j, \quad R_j^i = -\tilde{\mu}_i (\dot{S}_j - i\omega S_j), \quad R_j^m = -\tilde{\mu}_m \dot{S}_j S_j / S_j, \quad j = 1, 2 \quad (1.2)$$

$$(i = \sqrt{-1}).$$

Предполагается, что перемещением ротора вдоль оси вращения можно пренебречь, и в качестве обобщенных координат выбираются координаты оси симметрии ротора, которые совпадают с координатами центров опор в плоскости их движения. Впервые такое определение положения ротора в пространстве было введено в [10, 11]. При данных предположениях ротор представляет собой механическую систему с четырьмя степенями свободы.

Применяя закон движения центра масс и уравнение моментов, получим систему уравнений движения статически и динамически неуравновешенного ротора в комплексных переменных S_1, S_2

$$\begin{aligned} & \frac{M}{2} (\ddot{S}_1 + \ddot{S}_2) + \tilde{\mu}_e (\dot{S}_1 + \dot{S}_2) + \tilde{\mu}_i (\dot{S}_1 + \dot{S}_2) - i\omega \tilde{\mu}_i (S_1 + S_2) + \\ & + \tilde{\mu}_m \left(|\dot{S}_1| \frac{S_1}{|S_1|} + |\dot{S}_2| \frac{S_2}{|S_2|} \right) + a_0 (S_1 + S_2) + a_1 (|S_1|^2 S_1 + |S_2|^2 S_2) = M e \omega^2 \exp(i\omega t) \\ & B (\ddot{S}_2 - \ddot{S}_1) - i\omega A (\dot{S}_2 - \dot{S}_1) + \tilde{\mu}_e \frac{L^2}{2} (\dot{S}_2 - \dot{S}_1) + \tilde{\mu}_i \frac{L^2}{2} (\dot{S}_2 - \dot{S}_1) - i\omega \tilde{\mu}_i \frac{L^2}{2} (S_2 - S_1) + \\ & + \tilde{\mu}_m \frac{L^2}{2} \left(|\dot{S}_2| \frac{S_2}{|S_2|} - |\dot{S}_1| \frac{S_1}{|S_1|} \right) + \frac{L^2 a_0}{2} (S_2 - S_1 + \frac{a_1}{a_0} (|S_2|^2 S_2 - |S_1|^2 S_1)) = \\ & = (B - A) \omega^2 L \delta \exp(i(\omega t - \epsilon)) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Индексу 1 соответствует опора, занимающая нижнее положение при направленном вверх векторе угловой скорости.

Вынужденным колебаниям ротора, вызванным его статической и динамической неуравновешенностями, соответствуют прямые синхронные прецессии ротора вида

$$S_j = \tilde{R}_j \exp(i\omega t) \exp(i\varphi_j), \quad j = 1, 2 \quad (1.4)$$

где \tilde{R}_j и φ_j – вещественные постоянные, характеризующие соответственно амплитуды и фазы опор, $\tilde{R}_j \geq 0$.

Будем называть прецессии симметричными, если опоры в плоскости своего движения описывают окружности одинакового радиуса. В зависимости от того, какую поверхность в пространстве замечает ось вращения ротора, будем различать три вида прецессий: цилиндрические, конические и гиперболоидальные.

Для цилиндрической прецессии характерно равенство амплитуд ($\tilde{R}_1 = \tilde{R}_2$) и фаз ($\varphi_1 = \varphi_2$). Для конической прецессии фазы либо различаются на π в случае, когда вершина конуса лежит между опорами, либо совпадают, когда она лежит вне опор, и ось ротора описывает усеченный конус. Для прецессий гиперболоидального типа возможны любые соотношения между фазами и амплитудами.

2. Статически и динамически неуравновешенный ротор. Рассмотрим ротор с двумя неуравновешенностями ($e \neq 0$, $\delta \neq 0$). Уравнения движения ротора в безразмерной форме имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{s}_1 + \ddot{s}_2 + \mu_e(\dot{s}_1 + \dot{s}_2) + \mu_i(\dot{s}_1 + \dot{s}_2) - i\Omega\mu_i(s_1 + s_2) + \mu_m \left(|\dot{s}_1| \frac{s_1}{|s_1|} + |\dot{s}_2| \frac{s_2}{|s_2|} \right) + s_1 + s_2 + \\ + c(|s_1|^2 s_1 + |s_2|^2 s_2) = \Omega^2 \exp(i\Omega\tau) \\ \ddot{s}_2 - \ddot{s}_1 - i\Omega\lambda(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) + \mu_e k(1 - \lambda)(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) + \mu_i k(1 - \lambda)(\dot{s}_2 - \dot{s}_1) - i\Omega\mu_i k(1 - \lambda)(s_2 - s_1) + \\ + \mu_m k(1 - \lambda) \left(|\dot{s}_2| \frac{s_2}{|s_2|} - |\dot{s}_1| \frac{s_1}{|s_1|} \right) + k(1 - \lambda)(s_2 - s_1 + c(|s_2|^2 s_2 - |s_1|^2 s_1)) = \\ = d(1 - \lambda)\Omega^2 \exp(i(\Omega\tau - \varepsilon)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь введены безразмерные переменные и параметры

$$\tau = \omega_0 t, \quad s_j = \frac{S_j}{2e}, \quad \lambda = \frac{A}{B}, \quad \mu_e = \frac{2\tilde{\mu}_e}{M\omega_0}, \quad \mu_i = \frac{2\tilde{\mu}_i}{M\omega_0}, \quad \mu_m = \frac{2\tilde{\mu}_m}{M\omega_0} \quad (2.2)$$

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad c = 4e^2 \frac{a_1}{a_0}, \quad k = \frac{ML^2}{4B(1 - \lambda)}, \quad d = \frac{L\delta}{2e}; \quad \omega_0^2 = \frac{2a_0}{M}$$

Точкой обозначается дифференцирование по безразмерному времени τ .

Отметим, что всегда справедливо неравенство $k(1 - \lambda) > 0$. Если ротор представляет собой динамически вытянутое тело, то $\lambda < 1$, и тогда $k > 0$; если динамически сжатое, то $\lambda > 1$, и $k < 0$.

Будем рассматривать прямые синхронные гиперболоидальные прецессии (ГП) ротора. Симметричные ГП ($R_1 = R_2 = R$) статически и динамически неуравновешенного ротора могут существовать только для системы без внешнего трения, когда конструктивный параметр ε равен $\pi/2$. В противном случае существуют только несимметричные режимы. При этом симметричные и несимметричные прецессии ротора не зависят по форме от сил сопротивления \mathbf{R}^i и \mathbf{R}^m .

Удобно перейти от величин Ω и R , соответствующих частоте вращения и амплитуде прецессий, к величинам, равным их квадратам: $x = \Omega^2$ и $y = R^2$. Тогда симметричные ГП будут определяться следующим образом:

$$\sqrt{y} = \frac{x}{2} \left(\frac{1}{(1 + cy - x)^2} + \frac{d^2}{(k(1 + cy) - x)^2} \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\operatorname{tg} \varphi_2 = d \frac{1 + cy - x}{k(1 + cy) - x}, \quad \varphi_1 = -\varphi_2$$

Предельные значения амплитуды R_∞ и фазы $\varphi_{1,\infty}$ для достаточно больших значений частоты вращения определяются из соотношений

$$\sqrt{y_\infty} = R_\infty = \frac{1}{2} \sqrt{1 + d^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_{1,\infty} = d \quad (2.4)$$

Если ввести в рассмотрение наименьший радиус гиперboloида вращения $r = R \cos \varphi_1$ и угол отклонения оси вращения ротора от вертикали $\beta = 2R \sin \varphi_1 / \tilde{L}$ ($\tilde{L} = L/(2e)$), то предельные значения этих величин будут $r_\infty = 1/2$, $\beta_\infty = \delta$, что соответствует явлению самоцентрирования ротора. Устанавливается такое вращение, при котором центр масс ротора остается неподвижным, а ось динамической симметрии занимает равновесное положение, – наиболее благоприятный случай.

Если ротор представляет собой динамически вытянутое тело ($\lambda < 1$ и $k > 0$), то резонансное множество системы состоит из прямых

$$1 + cy - x = 0 \quad (2.5)$$

$$k(1 + cy) - x = 0 \quad (2.6)$$

которые являются скелетными для модифицированной амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) симметричной ГП на плоскости (x, y) и соответствуют наклонным штриховым линиям на фиг. 1 (горизонтальная штриховая линия соответствует предельному значению y_∞). При этом вблизи множества (2.5) резонируют прецессии цилиндрического типа, а вблизи множества (2.6) – конического типа.

Для одного и того же значения частоты вращения может существовать один, три или пять различных режимов симметричной ГП. Исследуя устойчивость режимов по линейному приближению и проверяя необходимое условие устойчивости, можно показать, что для системы без сопротивления при определенных значениях параметра k ($k < 1/3$ и $k > 3$) участкам AB и CD (фиг. 1) будут соответствовать неустойчивые симметричные ГП.

Если ротор динамически сжат ($\lambda > 1$ и $k < 0$), резонансное множество представляет собой одну прямую (2.5), вблизи которой резонирует цилиндрическая прецессия. При этом участок АЧХ со средним значением амплитуды будет соответствовать неустойчивым движениям при любых значениях параметров.

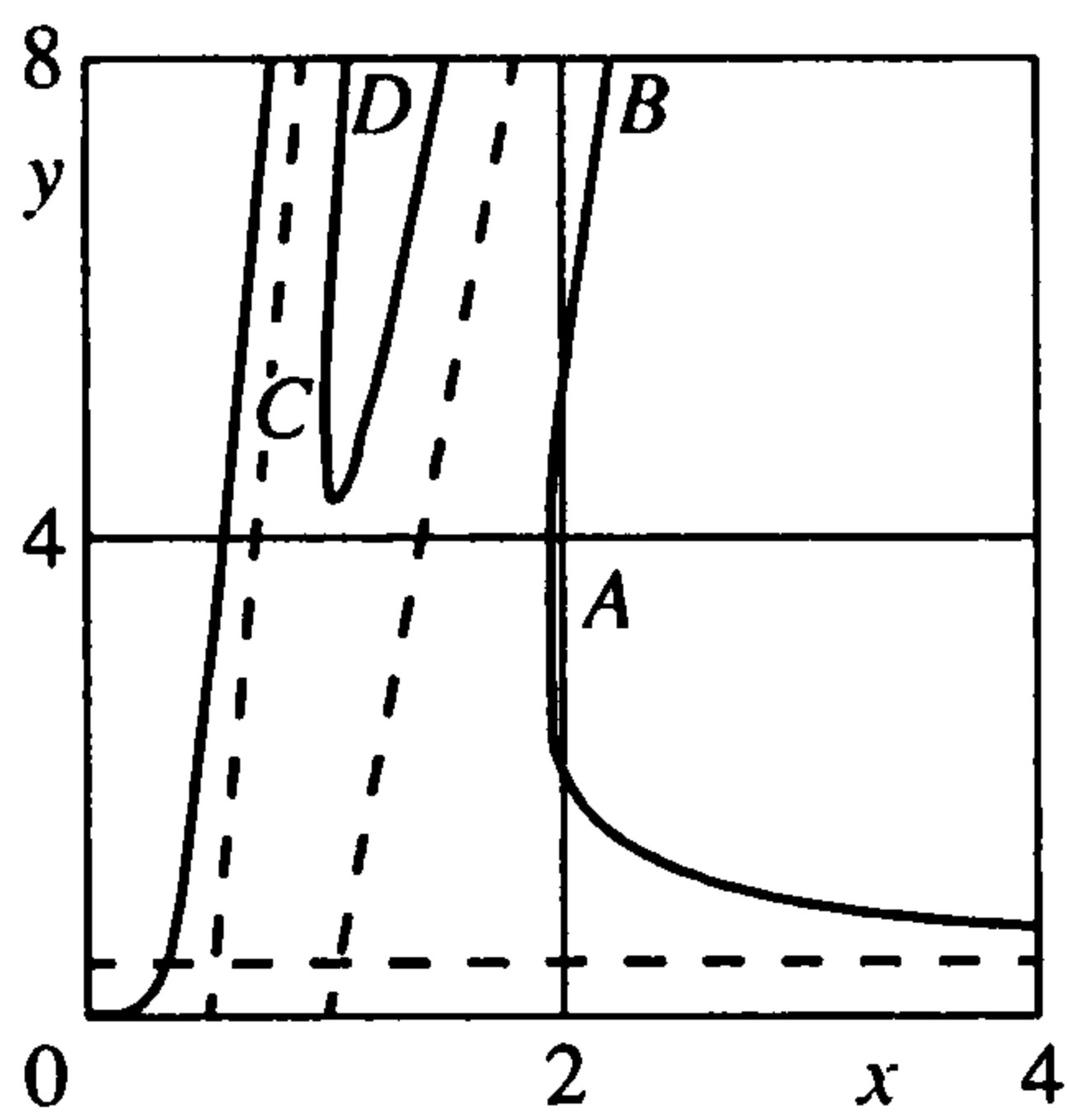
Рассмотрим также несимметричные ГП, возникающие в случае, когда ось динамической симметрии лежит в одной плоскости с осью вращения ($\epsilon = 0$). Отметим, что при отсутствии сил внешнего трения ГП вырождаются в конические прецессии, причем ось ротора может описывать как усеченный конус, так и конус с вершиной между опорами. Аналитически установлено, что несимметричные режимы так же, как и симметричные, обладают свойством самоцентрирования (ветвь 1 на фиг. 2). Дальнейший анализ несимметричных прецессий будет основан на численном эксперименте.

В зависимости от частоты вращения и силы внешнего сопротивления может существовать нечетное число несимметричных режимов – от одного до девяти. С увеличением силы внешнего сопротивления возможное число решений уменьшается до одного. На фиг. 2 представлена зависимость квадрата амплитуды первой опоры от квадрата частоты вращения, когда может существовать до девяти режимов. При действии на систему только силы внешнего трения R^e четные ветви всегда неустойчивы, а нечетные ветви могут быть устойчивыми или неустойчивыми. При частотах вращения, когда имеет место неустойчивость нечетных ветвей, могут возникать устойчивые автоколебания.

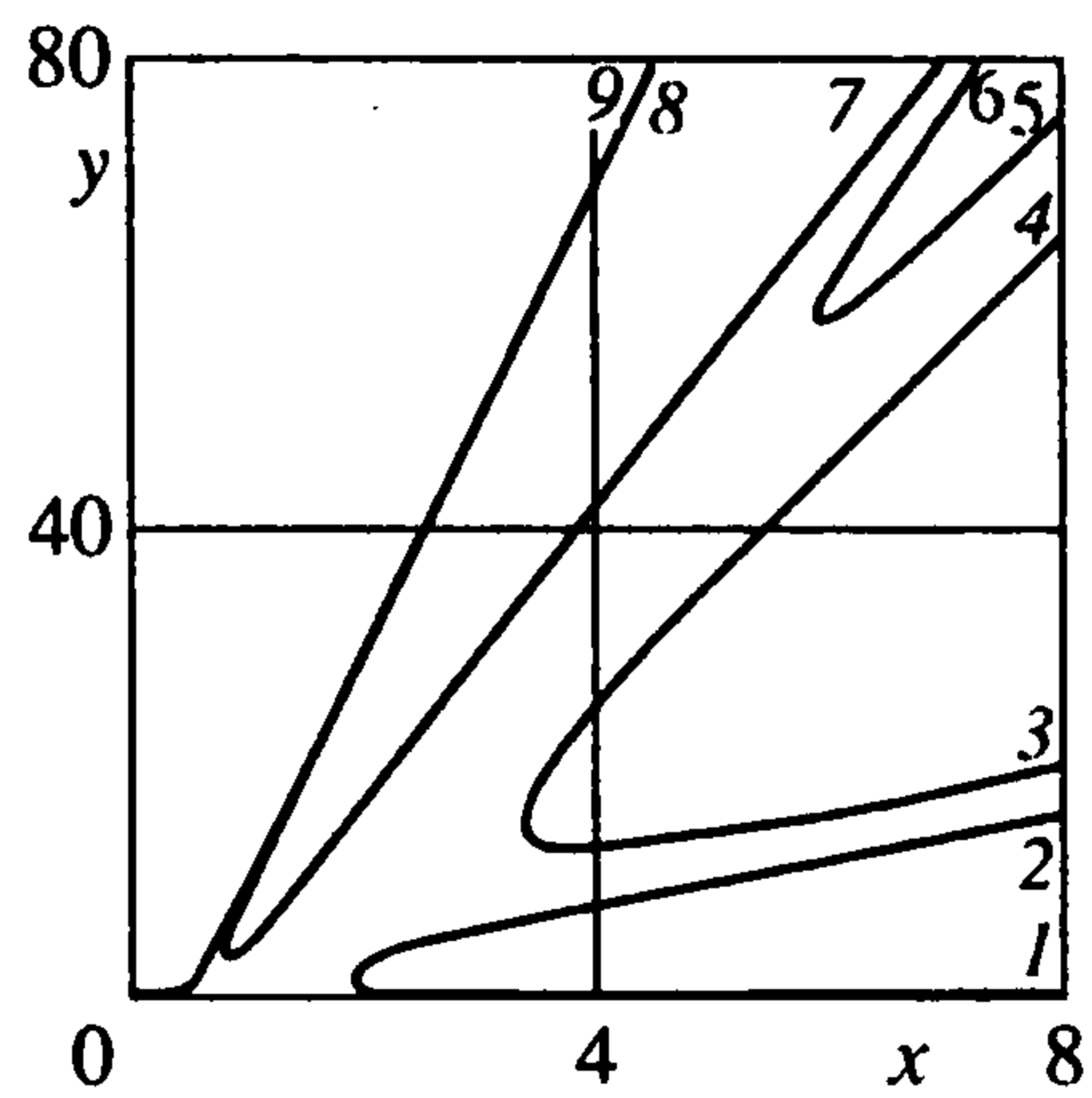
Силы внутреннего трения R^i и сопротивления R^m не оказывают стабилизирующего действия на неустойчивые режимы; более того, область устойчивых режимов сильно сужается. Начиная с некоторого значения частоты вращения, неустойчивыми становятся все режимы, кроме режима с максимальной амплитудой первой опоры.

3. Динамически неуравновешенный ротор. Пусть теперь ротор обладает только динамической неуравновешенностью ($e = 0$, $\delta \neq 0$). Уравнения движения такого ротора в безразмерной форме формально отличаются от уравнений (2.1) тем, что правые части уравнений в данном случае равны соответственно нулю и $1/2(1 - \lambda)\Omega^2 \exp(i\Omega\tau)$. Безразмерные переменные и параметры определяются так же, как и в разд. 2, кроме переменной s_j и параметра c ; теперь $s_j = S_j/(2L\delta)$, $c = 4L^2\delta^2 a_1/a_0$.

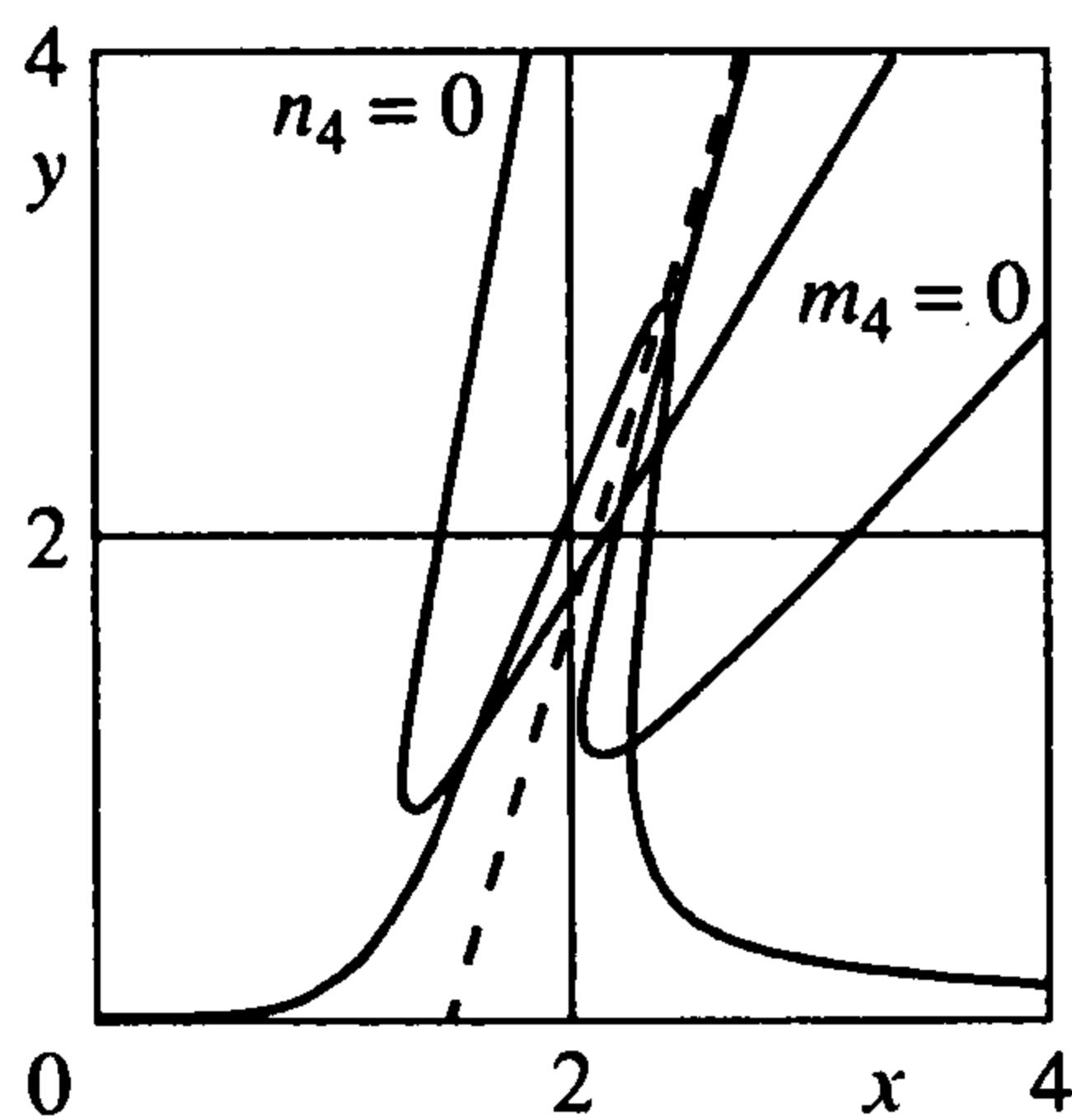
Среди установившихся движений динамически неуравновешенного ротора, соответствующих прямым синхронным прецессиям, могут существовать симметричные конические прецессии, когда центр масс ротора неподвижен, и несимметричные ГП, связанные с движением центра масс, которые при отсутствии сил вязкого трения вырождаются в конические прецессии. Если на систему не действуют силы вязкого трения ($\mu_e = 0$), то помимо описанных движений будут существовать симметричные ГП,



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

а также движения с нулевым значением амплитуды одной из опор. При этом, так же как и для полностью неуравновешенного ротора, режимы по форме не зависят от сил внутреннего трения R^i и сопротивления R^m .

Рассмотрим более подробно движения, представляющие наибольший интерес.

Симметричные конические прецессии (СКП), когда центр масс ротора неподвижен ($s_1 = -s_2 = -s$), определяются соотношениями

$$\sqrt{y} \sqrt{(k(1+cy) - x)^2 + \mu_e^2 k^2 x} = \frac{1}{4} x, \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\mu_e k \sqrt{x}}{k(1+cy) - x} \quad (3.1)$$

Если ротор представляет собой динамически вытянутое тело ($\lambda < 1$ и $k > 0$), модифицированная АЧХ на плоскости (x, y) , представленная на фиг. 3, имеет скелетную прямую (2.6), которой соответствует штриховая линия на фиг. 3. Предельное значение амплитуды при больших значениях частоты вращения равно $R_\infty = 1/4$.

Если ввести в рассмотрение половину угла раствора конуса, который замечает в пространстве ось вращения ротора, то предельное значение этого угла при больших значениях частоты вращения будет равно δ , что означает самоцентрирование ротора. Ротор будет вращаться так, что его ось динамической симметрии будет стремиться занять равновесное положение.

В зависимости от параметров системы для различных значений угловой скорости вращения возможны либо один, либо три различных режима СКП. При исследовании устойчивости по первому приближению характеристическое уравнение ли-

нейной системы представляется в виде $MN = 0$, где M и N – полиномы четвертой степени относительно характеристического числа p :

$$M = m_0 p^4 + m_1 p^3 + m_2 p^2 + m_3 p + m_4, \quad N = n_0 p^4 + n_1 p^3 + n_2 p^2 + n_3 p + n_4 \quad (3.2)$$

Используя критерий Гурвица, заключаем, что условия устойчивости для динамически вытянутого ротора сводятся к неравенствам

$$m_3 > 0, \quad m_4 > 0, \quad n_3 > 0, \quad n_4 > 0, \quad \Delta_3^{(M)} > 0, \quad \Delta_3^{(N)} > 0 \quad (3.3)$$

где $\Delta_3^{(M)}$ и $\Delta_3^{(N)}$ – главные диагональные миноры третьего порядка определителей Гурвица для полиномов M и N .

Коэффициенты m_4 и n_4 являются произведениями корней соответствующих полиномов, и множества $m_4 = 0$ и $n_4 = 0$ являются бифуркационными для системы и будут определять границу устойчивости СКП. На плоскости (x, y) эти множества представляют собой гиперболы (фиг. 3). Бифуркации на границе $m_4 = 0$ соответствуют появлению или исчезновению СКП, когда центр масс ротора остается неподвижным. Бифуркации на границе $n_4 = 0$ соответствуют появлению или исчезновению несимметричных прецессий, связанных с движением центра масс. Неустойчивость такого рода относится к явлению пространственной неустойчивости вынужденных колебаний, исследованному для квазилинейных систем [12].

Если рассматривать ротор с двумя неуравновешенностями без учета сил сопротивления, то АЧХ симметричной ГП имеет две резонансные зоны, соответствующие резонансам цилиндрических и конических прецессий. При рассмотрении ротора как системы с четырьмя степенями свободы, но имеющего только динамический дебаланс, вблизи резонансного множества (2.5) для цилиндрических прецессий ротора с двумя неуравновешенностями и возникает область пространственной неустойчивости. Происходит перераспределение колебаний, и участку АЧХ, где СКП неустойчивы ($n_4 < 0$), будут соответствовать ГП или в некоторых случаях другие устойчивые режимы.

Множества $m_4 = 0$ и $n_4 = 0$ не зависят от сил внутреннего трения R^i и сопротивления R^m , и при действии на ротор только сил внешнего сопротивления устойчивы все режимы, кроме режимов, попадающих внутрь гипербол $m_4 = 0$, $n_4 = 0$.

Если ротор динамически сжат, то модифицированная АЧХ монотонно возрастает и приближается к предельному значению $y_\infty = R_\infty^2 = 1/16$. Для динамически сжатого ротора также возможно явление пространственной неустойчивости.

Несимметричные ГП в отличие от СКП существуют не всегда. Система дифференциальных уравнений динамически неуравновешенного ротора такова, что если существует режим с амплитудами (R_1, R_2) , то будет существовать и режим с амплитудами (R_2, R_1) . В зависимости от параметров системы и частоты вращения принципиальное число пар решений может быть от одного до четырех. При этом при наличии только сил внешнего сопротивления в области пространственной неустойчивости СКП несимметричные ГП, как показывает численная проверка, могут быть устойчивыми или неустойчивыми. Для частот вращения, когда имеет место неустойчивость несимметричных ГП, на плоскости (R, \dot{R}) восьмимерного фазового пространства получены "петляющие" в ограниченной области кривые, напоминающие странный аттрактор.

Благодаря силам внутреннего трения R^i , а также силам сопротивления R^m СКП ротора, устойчивые при наличии только силы внешнего трения R^e , начиная с некоторого значения угловой скорости вращения, становятся неустойчивыми, что исключает эффект самоцентрирования. Численно получено, что возникающие в этом случае режимы связаны с движением центра масс и представляют собой автоколебания.

Когда на ротор действуют силы внешнего и внутреннего сопротивления, полученные режимы можно приближенно искать в виде

$$s_j = R_j \exp(i\Omega\tau) \exp(i\varphi_j) + r_j \exp(i\Omega_1\tau) \quad (3.4)$$

где R_j и φ_j – соответственно амплитуды и фазы вынужденных колебаний с частотой Ω , а r_j и Ω_1 – амплитуда и частота автоколебаний [13].

В случае, когда центр масс ротора движется по окружности, решение можно искать в виде наложения двух движений: СКП ($R_1 = R_2 = R$ и $\exp(i\varphi_2) = -\exp(i\varphi_1) = \exp(i\varphi)$) и симметричных автоколебаний ($r_1 = r_2 = r$).

Применяя метод гармонического баланса, получим приближенные уравнения для определения величин R , r , Ω_1 , φ

$$\begin{aligned} r(1 + c(r^2 + R^2) - \Omega_1^2) &= 0, \quad r(\Omega_1(\mu_e + \mu_i) - \Omega\mu_i) = 0 \\ R(1 - \lambda)((k(1 + c(R^2 + 2r^2)) - \Omega^2) \sin \varphi + \mu_e k \Omega \cos \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$(1 - \lambda)(R(k(1 + c(R^2 + 2r^2)) - \Omega^2) \cos \varphi - \mu_e k \Omega R \sin \varphi - \frac{1}{4}\Omega^2) = 0$$

Из уравнений (3.5) можно получить зависимости амплитуд автоколебаний и вынужденных колебаний от частоты вращения и определить границу мягкого возбуждения автоколебаний

$$\Omega_e = (1 + \mu_e / \mu_i) \sqrt{1 + 2cR^2} \quad (3.6)$$

Отметим, что с ростом частоты вращения амплитуда автоколебаний увеличивается, что в конечном счете может привести к разрушению подшипников и выходу ротора из строя.

Если ротор представляет собой систему с двумя степенями свободы, то автоколебания следует искать в виде (3.4), когда $s_1 = -s_2 = -s$. Такие режимы существуют только для динамически вытянутого ротора ($\lambda < 1$ и $k > 0$). Хотя формально такого вида решение удовлетворяет системе дифференциальных уравнений динамически неуравновешенного ротора с четырьмя степенями свободы, численное интегрирование выводит на режимы, связанные с движением центра масс.

4. Статически неуравновешенный ротор. Среди установившихся движений статически неуравновешенного ротора ($e \neq 0$, $\delta = 0$), соответствующих прямым синхронным прецессиям, могут существовать цилиндрические прецессии и в случае динамически вытянутого ротора ($\lambda < 1$ и $k > 0$) несимметричные гиперболоидальные прецессии. При отсутствии сил внешнего сопротивления для динамически вытянутого ротора возможны симметричные гиперболоидальные прецессии, а также несимметричные прецессии конического типа, когда одна из опор неподвижна. Исследование возможных видов прецессий проводится аналогично исследованию соответствующих режимов динамически неуравновешенного ротора. Отметим только, что для цилиндрических прецессий характерно свойство самоцентрирования; для динамически вытянутого ротора возможно явление пространственной неустойчивости, и возникающие в этом случае режимы связаны с раскачкой оси вращения ротора. Силы внутреннего трения \mathbf{R}^i и сопротивления \mathbf{R}^m исключают явление самоцентрирования ротора, и появляющиеся автоколебания представляют собой плоскопараллельное движение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кельзон А.С. Самоцентрирование и уравнивание жесткого ротора, вращающегося в двух упругих опорах // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110. № 1. С. 31–33.
2. Кельзон А.С., Циманский Ю.П., Яковлев В.И. Динамика роторов в упругих опорах. М.: Наука, 1982. 280 с.
3. Меркин Д.Р. Об устойчивости стационарных движений оси вращающегося ротора, установленного в нелинейных подшипниках // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 378–384.
4. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.
5. Меркин Д.Р. Об устойчивости стационарных движений оси вращающегося ротора // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257. № 2. С. 298–301.
6. Пасынкова И.А. Гиперболоидальная прецессия ротора в нелинейных упругих опорах // Вестн. СПб ун-та. Сер. 1. 1997. Вып. 4. № 22. С. 88–95.
7. Пасынкова И.А. Устойчивость конической прецессии жесткого неуравновешенного ротора // Вестн. СПб ун-та. Сер. 1. 1998. Вып. 1. № 1. С. 82–86.
8. Филиппов В.В. Об устойчивости установившихся движений ротора в упругих подшипниках // Изв. РАН. МГТ. 1995. № 3. С. 54–64.
9. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
10. Blaess V. Über den Massenausgleich raschumlaufender Körper // ZAMM. 1926. Bd. 6. H. 6. S. 429–448.
11. Timoshenko S.P. Vibration Problems in Engineering. Toronto: Nostrand, 1955. = Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439 с.
12. Ганиев Р.Ф., Кононенко В.О. Колебания твердых тел. М.: Наука, 1976. 431 с.
13. Tondl A. Some Problems of Self-Excited Vibrations of Rotors. Praha: Publ. SNTL, 1974 = Тондл А. Автоколебания механических систем. М.: Мир, 1979. 429 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
25.X.2001