УДК 531.36

© 2002 г. О.В. Холостова

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЯХ НЕАВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ ОСНОВНОГО ТИПА

Рассматривается движение близкой к автономной 2π-периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Предполагается, что начало координат является положением равновесия системы, линеаризованная невозмущенная система устойчива, ее характеристические показатели $\pm i\omega_j$ (j = 1.2) чисто мнимые. Кроме того, предполагается, что величина $2\omega_1$ близка к целому числу, т.е. в системе имеет место параметрический резонанс основного типа. При помощи теории периодических движений Пуанкаре и КАМ-теории решен вопрос о существовании в достаточно малой окрестности начала координат 4π-периодических движений системы, их бифуркации и устойчивости. В качестве приложений построены периодические движения, в случаях параметрического резонанса основного типа, в следующих задачах: в плоской эллиптической ограниченной задаче трех тел вблизи треугольных точек либрации и в задаче о движении динамически симметричного спутника вблизи его цилиндрической прецессии на эллиптической орбите малого эксцентриситета.

1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана. Рассмотрим движение близкой к автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Будем считать, что функция Гамильтона системы представляется в виде ряда по степеням малого параметра ε ($0 < \varepsilon \ll 1$)

$$H = H_0(q_i, p_i) + \varepsilon H_1(q_i, p_i, t) + \varepsilon^2 H_2(q_i, p_i, t) + \ldots \qquad (1.1)$$

где q_i и p_i (i = 1, 2) – соответственно координаты и импульсы. Функции $H_k(q_i, p_i, t)$ (k = 1, 2,...) в (1.1) считаем 2π-периодическими функциями времени.

Пусть начало координат $q_i = p_i = 0$ фазового пространства является положением равновесия системы. Гамильтониан H предполагаем аналитичным в окрестности точки $q_i = p_i = 0$; функции H_k (k = 0, 1, 2,...) представляем в виде

$$H_k = H_k^{(2)} + H_k^{(3)} + H_k^{(4)} + \ldots \qquad (1.2)$$

где $H_k^{(l)}$ – форма l-й степени относительно q_i, p_i.

Пусть характеристические показатели $\pm i\omega_j$ (j = 1, 2) линеаризованной в окрестности начала координат при $\varepsilon = 0$ системы уравнений движения чисто мнимые. Если между величинами ω_j отсутствуют соотношения вида $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$ (k_1 и k_2 – целые числа, удовлетворяющие условию $1 \leqslant |k_1| + |k_2| \leqslant 4$), то при подходящем выборе переменных q_i, p_i невозмущенный гамильтониан H_0 может быть записан в нормальной форме до членов четвертого порядка включительно. В "полярных" координатах φ_i, r_i $(q_i = \sqrt{2r_i}\sin\varphi_i,\ \ p_i = \sqrt{2r_i}\cos\varphi_i)$ будем иметь

$$H_0 = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1 r_2 + c_{02}r_2^2 + O_5$$

где $\lambda_1 = \omega_1$, а $\lambda_2 = \omega_2$ или $\lambda_2 = -\omega_2$ (в зависимости от конкретной задачи), c_{ij} – постоянные, O_5 – совокупность членов не ниже пятого порядка относительно $r_i^{1/2}$.

Пусть в системе имеет место параметрический резонанс основного типа, когда величина $2\omega_1$ близка к целому нечетному числу N.

Цель исследования – решение вопроса о существовании, в достаточно малой окрестности начала координат, периодических движений полной системы с гамильтонианом (1.1), (1.2), их числе и устойчивости.

Будем предполагать, что кроме резонансного соотношения $2\omega_1 \approx N$ между частотами ω_1 и ω_2 нет других соотношений вида $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \approx L$ (k_i и L – целые числа, причем $2 \leqslant |k_1| + |k_2| \leqslant 4$). Положим $r_i = \varepsilon R_i$, $\varphi_i = \theta_i$ (i = 1, 2) и далее при помощи 2π-периодического по времени, близкого к тождественному канонического преобразования приведем гамильтониан к виду

$$H = \tilde\lambda_1 R_1 + \tilde\lambda_2 R_2 + \varepsilon\sigma R_1\cos(2\theta_1 - Nt + \theta_0) + \varepsilon(c_{20}R_1^2 + c_{11}R_1R_2 + c_{02}R_2^2) + O(\varepsilon^{3/2}) \qquad (1.3)$$

где $\tilde\lambda_i = \lambda_i + O(\varepsilon) = \mathrm{const}$ (i = 1, 2), σ и θ_0 – постоянные. Величину σ в (1.3) считаем положительной; этого всегда можно добиться сдвигом по θ_1.

Положим $2\tilde\lambda_1 = N + 2\varepsilon\beta$. Осуществим замену переменных $\theta_i, R_i \to \psi_i, \rho_i$ по формулам

$$R_i = \rho_i \quad (i = 1,2), \quad 2\theta_1 - Nt + \theta_0 = 2\psi_1, \quad \theta_2 = \psi_2$$

приведем гамильтониан задачи к виду

$$H = \varepsilon\beta\rho_1 + \tilde\lambda_2\rho_2 + \varepsilon\sigma\rho_1\cos 2\psi_1 + \varepsilon(c_{20}\rho_1^2 + c_{11}\rho_1\rho_2 + c_{02}\rho_2^2) + O(\varepsilon^{3/2}) \qquad (1.4)$$

Полагая, что $c_{20} \neq 0$, сделаем еще одну замену переменных по формулам

$$\psi_1 = \psi + \frac{\pi}{4}(1 - \varkappa), \quad \psi_2 = \tilde\psi_2, \quad \rho_1 = \frac{\sigma}{|c_{20}|}\rho, \quad \rho_2 = \frac{\sigma}{|c_{20}|}\tilde\rho_2 \quad (\varkappa = \operatorname{sign} c_{20})$$

Тогда имеем

$$H = \tilde\lambda_2\tilde\rho_2 + \varepsilon\{\alpha_1\tilde\rho_2^2 + \alpha_2[(a\beta + b\tilde\rho_2)\rho + \rho\cos 2\psi + \rho^2]\} + O(\varepsilon^{3/2}) \qquad (1.5)$$

$$\alpha_1 = \frac{c_{02}\sigma}{|c_{20}|}, \quad \alpha_2 = \varkappa\sigma, \quad a = \alpha_2^{-1}, \quad b = \frac{c_{11}}{c_{20}}$$

Слагаемое $O(\varepsilon^{3/2})$ в (1.5) 4π-периодично по t, 2π-периодично по ψ и $\tilde\psi_2$ и аналитично по $\rho^{1/2}$ и $\tilde\rho_2^{1/2}$.

Замечание. Гамильтониан (1.1), (1.2) может быть преобразован к виду (1.5) в случае $\omega_1 \approx N/2$ и при четных N, если в его структуре отсутствуют формы $H_k^{(3)}$ третьей степени. При этом слагаемое $O(\varepsilon^{3/2})$ в (1.5) будет 2π-периодичным по t.

2. Периодические движения системы. *Положения равновесия приближенной системы.* Если в гамильтониане (1.5) отбросить слагаемое $O(\varepsilon^{3/2})$, то получим приближенный гамильтониан. Координата $\tilde{\psi}_2$ в отвечающей ему системе циклическая, следовательно, $\tilde{\rho}_2 = c = \mathrm{const}$. Запишем приближенный гамильтониан в виде

$$\tilde{H} = \tilde{\lambda}_2 c + \varepsilon(\alpha_1 c^2 + \alpha_2 H') \tag{2.1}$$

$$H' = -\chi\rho + \rho\cos 2\psi + \rho^2, \qquad \chi = -(a\beta + bc) = \mathrm{const} \tag{2.2}$$

Гамильтониан H' является модельным для систем с одной степенью свободы при параметрическом резонансе (см., например, [1]). Однако если для последних параметр χ определяется резонансной расстройкой, то в случае рассматриваемой здесь системы с двумя степенями свободы параметр χ зависит помимо величины резонансной расстройки (характеризуемой параметром β) еще от постоянной c, связанной с наличием в системе второй (циклической) координаты.

Модельная система имеет частное решение $\rho = 0$ – положение равновесия, совпадающее с началом координат; оно устойчиво при $|\chi| > 1$ и неустойчиво при $|\chi| < 1$. Если $\chi < -1$, то других положений равновесия нет. При $-1 < \chi < 1$ модельная система имеет два устойчивых положения равновесия – точки $(\pi/2, (\chi + 1)/2)$ и $(3\pi/2, (\chi + 1)/2)$. Эти же точки являются устойчивыми положениями равновесия и при $\chi > 1$; в последнем случае у системы есть еще два неустойчивых положения равновесия – точки $(\pi, (\chi - 1)/2)$ и $(0, (\chi - 1)/2)$.

Фазовые портреты модельной системы показаны на фиг. 1, *а, б, в* в плоскости переменных $x_1 = \sqrt{2\rho}\cos\psi$, $x_2 = \sqrt{2\rho}\sin\psi$ соответственно для случаев $\chi < -1$, $-1 < \chi < 1$, $\chi > 1$. Устойчивым положениям равновесия модельной системы отвечают на фиг. 1 особые точки типа "центр", неустойчивым – седловые особые точки.

Положения равновесия приближенной системы с двумя степенями свободы задаются равенствами $\tilde{\rho}_2 = 0$, $\rho = 0$ или

$$\tilde{\rho}_2 = 0, \quad \rho = \rho_*, \quad \psi = \psi_* \tag{2.3}$$

где (ψ_*, ρ_*) – одно из не совпадающих с началом координат положений равновесия модельной системы. Для этих равновесных точек $c = 0$, поэтому параметр χ модельной системы, а значит, и равновесные значения $\rho_* = (\chi \pm 1)/2$ определяются только резонансной расстройкой.

Периодические движения полной системы. Рассмотрим положение равновесия (2.3) приближенной системы в качестве порождающего. Полагая в (1.5) $\tilde{\rho}_2 = r_2$, $\psi = \psi_* + x_1$, $\rho = \rho_* + y_1$, получим следующее выражение для полного гамильтониана в окрестности порождающего решения:

$$H = \Lambda_2 r_2 + \varepsilon\alpha_2(-2\rho_*\cos 2\psi_* x_1^2 + y_1^2) + \varepsilon \cdot O_3 + O(\varepsilon^{3/2}) \tag{2.4}$$

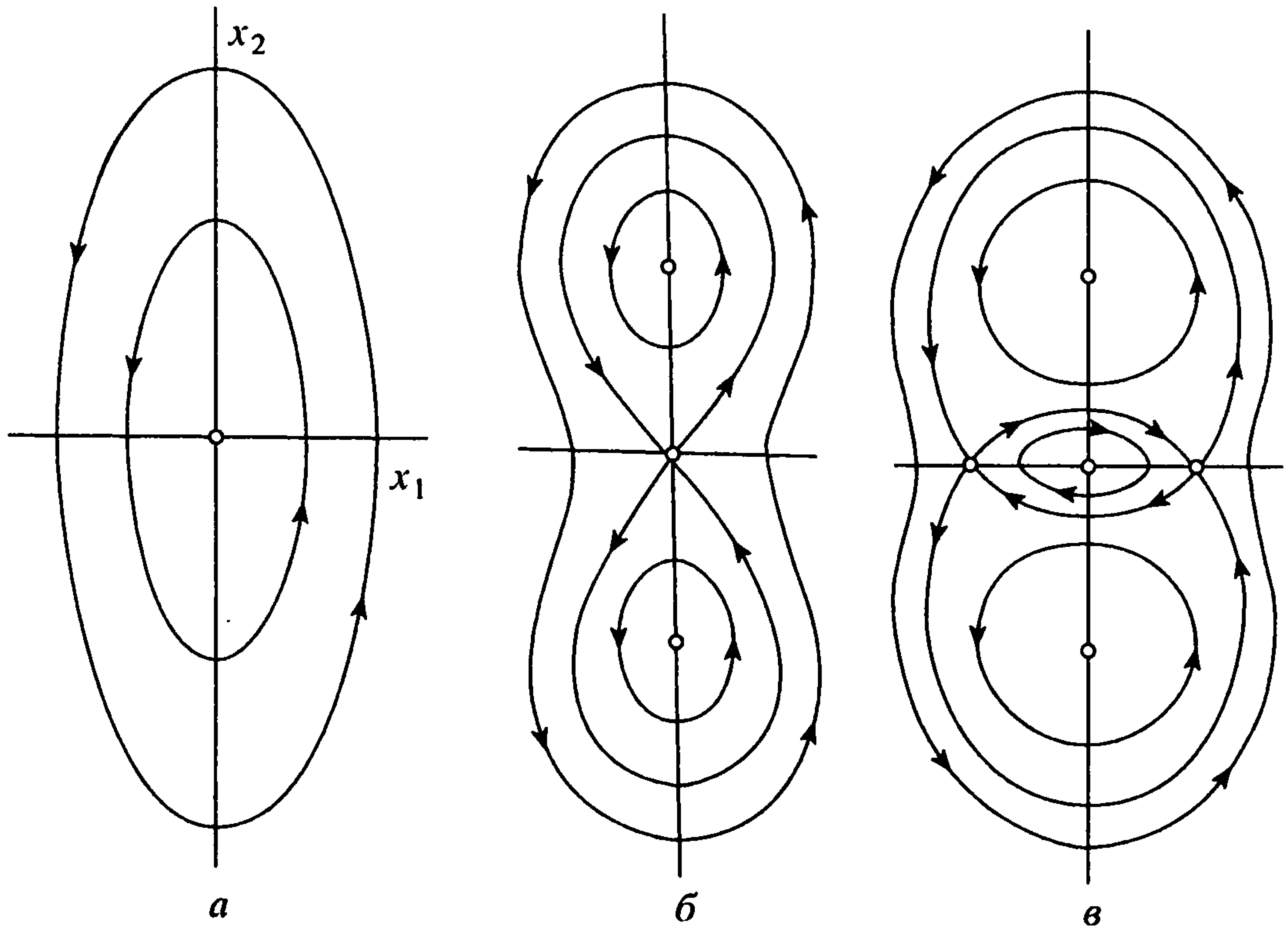
$$\Lambda_2 = \tilde{\lambda}_2 + \varepsilon\alpha_2 b\rho_*$$

где O_3 – совокупность членов не ниже третьей степени относительно $x_1, y_1, r_2^{1/2}$ с постоянными коэффициентами, слагаемое $O(\varepsilon^{3/2})$ 4π-периодично по t.

Так как по предположению величина $2\omega_2$ не близка к целому числу, то имеет место нерезонансный случай теории периодических движений Пуанкаре [2], и из каждого положения равновесия (2.3) приближенной системы рождается единственное, 4π-периодическое по t, аналитическое по $\varepsilon^{1/2}$ решение полной системы вида

$$\rho = \tilde{\rho}(t) = \rho_* + O(\varepsilon^{1/2}), \quad \psi = \tilde{\psi}(t) = \psi_* + O(\varepsilon^{1/2}), \quad \tilde{\rho}_2 = \tilde{\rho}_2(t) = O(\varepsilon) \tag{2.5}$$

Таких периодических решений может быть в зависимости от величины параметра χ либо четыре (при $\chi > 1$), либо два (при $-1 < \chi < 1$), либо ни одного (при $\chi < -1$).



Фиг. 1

Решениям (2.5) отвечают следующие 4π-периодические по t движения исходной системы с гамильтонианом (1.1):

$$q_1(t)=\sqrt{\frac{2\varepsilon\sigma\rho_*}{|c_{20}|}}\sin\left(\frac{Nt}{2}+\psi_*+\frac{\pi}{2}(1-\varkappa)-\frac{\theta_0}{2}\right)+O(\varepsilon) \qquad (2.6)$$

$$p_1(t)=\sqrt{\frac{2\varepsilon\sigma\rho_*}{|c_{20}|}}\cos\left(\frac{Nt}{2}+\psi_*+\frac{\pi}{2}(1-\varkappa)-\frac{\theta_0}{2}\right)+O(\varepsilon)$$

$$q_2=O(\varepsilon),\quad p_2=O(\varepsilon)$$

Движения (2.6), отвечающие положениям равновесия модельной системы, для которых величины ψ_* отличаются на π, получаются одно из другого путем сдвига по времени на $2\pi/N$. Поэтому при $\chi > 1$ исходная система имеет два различных периодических движения вида (2.6), при $-1 < \chi < 1$ одно движение, при $\chi < -1$ – ни одного.

Устойчивость периодических движений. Рассмотрим вопрос об устойчивости найденных периодических движений.

Движения, отвечающие неустойчивым положениям равновесия модельной системы, неустойчивы, что следует из наличия у характеристического уравнения линеаризованной приближенной системы положительного вещественного корня.

Чтобы решить вопрос об устойчивости периодических движений, соответствующих устойчивым положениям равновесия модельной системы, рассмотрим гамильтониан возмущенного движения, полагая в (1.5)

$$\tilde\rho_2=r_2,\quad \psi=\tilde\psi(t)+x_1,\quad \rho=\tilde\rho(t)+y_1$$

Имеем

$$H=\Lambda_2 r_2+\varepsilon\alpha_2[(\chi+1)x_1^2+y_1^2]+2\varepsilon\alpha_2 x_1^2 y_1+\varepsilon\alpha_2 b y_1 r_2-$$

$$-\tfrac{1}{3}\varepsilon\alpha_2(\chi+1)x_1^4+\varepsilon\alpha_1 r_2^2+\varepsilon\cdot O_5+O(\varepsilon^{3/2}) \qquad (2.7)$$

где O_5 – совокупность членов не ниже пятой степени относительно x_1, y_1, $r_2^{1/2}$, слагаемое $O(\varepsilon^{3/2})$ 4π-периодично по t, постоянная Λ_2 определяется из (2.4) при $\rho_*=(\chi+1)/2$.

Сделаем замену переменных

$$x_1 = x(\chi+1)^{-1/4}, \quad y_1 = y(\chi+1)^{1/4}, \quad r_2 = r_2$$

и далее осуществим близкое к тождественному каноническое преобразование

$$x, y, \tilde{\psi}_2, r_2 \to x^*, y^*, \psi_2^*, r_2^*$$

нормализующее гамильтониан до членов четвертого порядка включительно. Это преобразование может быть получено, например, при помощи метода Деприи – Хори [3]. Перейдем затем от переменных x^*, y^* к "полярным" координатам ψ^*, r^* по формулам

$$x^* = \sqrt{2r^*}\sin\psi^*, \quad y^* = \sqrt{2r^*}\cos\psi^*$$

в результате чего преобразованный гамильтониан примет вид

$$H = \Lambda_2 r_2^* + 2\varepsilon\alpha_2\sqrt{\chi+1}r^* + \varepsilon(C_{20}r^{*2} + C_{11}r^* r_2^* + C_{02}r_2^{*2}) + \varepsilon\cdot O_5 + O(\varepsilon^{3/2}) \tag{2.8}$$

$$C_{20} = -\frac{\alpha_2(\chi+4)}{2(\chi+1)}, \quad C_{11} = -\frac{c_{11}\sigma}{|c_{20}|\sqrt{\chi+1}}, \quad C_{02} = \frac{\alpha_2(4c_{02}c_{20} - c_{11}^2)}{4c_{20}^2}$$

При выполнении условия $C_{11}^2 - 4C_{02}C_{20} \neq 0$ рассматриваемое периодическое решение устойчиво для большинства начальных условий [3, 4]. Последнее соотношение сводится к неравенству

$$2c_{11}^2 + (\chi+4)(4c_{20}c_{02} - c_{11}^2) \neq 0 \tag{2.9}$$

Таким образом, единственное при $-1 < \chi < 1$ 4π-периодическое движение системы с гамильтонианом (1.1) устойчиво для большинства начальных условий при выполнении соотношения (2.9); из двух при $\chi > 1$ периодических движений системы одно неустойчиво и одно устойчиво для большинства начальных условий (при выполнении (2.9)).

3. Периодические движения вблизи треугольных точек либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел. Построим периодические движения в окрестности треугольных точек либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел. Функция Гамильтона задачи имеет вид [3]

$$H = \frac{1}{2}(p_\xi^2 + p_\eta^2) + p_\xi\eta - p_\eta\xi + \frac{e\cos\nu}{2(1+e\cos\nu)}(\xi^2+\eta^2) - \frac{W}{1+e\cos\nu}$$

$$W = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}, \quad r_1 = \sqrt{(\xi+\mu)^2+\eta^2}, \quad r_2 = \sqrt{(\xi+\mu-1)^2+\eta^2} \tag{3.1}$$

где ξ, η и p_ξ, p_η – переменные Нехвила и отвечающие им обобщенные импульсы, e – эксцентриситет, ν – истинная аномалия, m_1 и m_2 – массы основных притягивающих тел.

Система с гамильтонианом (3.1) имеет частное решение

$$\varepsilon_0 = \frac{1-2\mu}{2}, \quad \eta_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_{\xi_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad p_{\eta_0} = \frac{1-2\mu}{2} \tag{3.2}$$

отвечающее треугольной точке либрации. При $e = 0$ необходимое условие устойчивости решения (3.2) задается неравенством

$$0 < \mu < \mu_* = (9-\sqrt{69})/18 = 0.0385208\ldots$$

Рассмотрим движения системы в окрестности точки (3.2). Положим в (3.1)

$$\xi = \xi_0 + q_1, \quad \eta = \eta_0 + q_2, \quad p_\xi = p_{\xi_0} + p_1, \quad p_\eta = p_{\eta_0} + p_2$$

Тогда получим [3]

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots \tag{3.3}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1 q_2 - q_1 p_2 + \frac{e\cos\nu}{2(1+e\cos\nu)}(q_1^2 + q_2^2) +$$

$$+ \frac{1}{8(1+e\cos\nu)}(q_1^2 - 8kq_1q_2 - 5q_2^2), \qquad k = \frac{3\sqrt{3}(1-2\mu)}{4}$$

где H_3 и H_4 – формы третьей и четвертой степеней относительно q_i и p_i (i = 1, 2), которые здесь не приводим.

При помощи унивалентного линейного канонического преобразования $q_i, \ p_i \to \to q_i', p_i'$ [3] приведем квадратичную часть H_2 гамильтониана (3.3) при $e = 0$ к нормальной форме. Частоты ω_1 и ω_2 ($\omega_1 > \omega_2 > 0$) малых колебаний удовлетворяют уравнению

$$\omega^4 - \omega^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0$$

При $\mu = \mu_0 = (3-2\sqrt{2})/6 = 0.0285954\ldots$ имеем $\omega_2 = \frac{1}{2}$, т.е. в системе реализуется параметрический резонанс основного типа. Считая, что $0 < e \ll 1$, найдем 4π-периодические движения в случае, когда $\omega_2 \simeq \frac{1}{2}$.

Положим $q_i' = \tilde{q}_i / \sqrt{\omega_i}$, $p_i' = \sqrt{\omega_i}\,\tilde{p}_i$ и осуществим затем нормализацию полной формы H_2 в членах порядка e, а также нормализацию форм H_3 и H_4 при $e = 0$. После перехода к "полярным" координатам получим гамильтониан вида

$$H = \tilde{\omega}_1 R_1 - \tilde{\omega}_2 R_2 + e\sigma R_2 \cos(2\theta_2 + \nu + \theta_0) + e(c_{20}R_1^2 + c_{11}R_1R_2 + c_{02}R_2^2) + O(e^{3/2})$$

с точностью до обозначений совпадающий с гамильтонианом (1.3).

Здесь, как показывают расчеты,

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + O(e), \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{1}{2} + 9\sqrt{2}(\mu - \mu_0) + O(e^2), \quad \sigma = \frac{\sqrt{33}}{8}, \quad \theta_0 = \operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{6}}{27}$$

$$c_{20} = \frac{15}{16}, \quad c_{11} = \frac{40\sqrt{3}}{3}, \quad c_{02} = \frac{341}{48}$$

При нахождении числовых значений коэффициентов c_{ij} использованы их выражения как функции частот [5].

Вводя резонансную расстройку $\tilde{\omega}_1 = \frac{1}{2} + e\sigma\chi$ и опираясь на результаты разд. 1 и 2, получим следующие 4π-периодические движения в окрестности треугольной точки либрации:

$$\xi = \xi_0 + 2\sqrt{e}a_* \sin\tau + O(e), \quad \eta = \eta_0 - 0.4\sqrt{e}a_*(\sqrt{6}\sin\tau + 2\cos\tau) + O(e) \tag{3.4}$$

$$a_* = \sqrt{\frac{30\sqrt{33}}{341}\rho_*}, \quad \tau = \psi_* - \frac{\nu}{2} - \frac{\theta_0}{2}$$

где (ψ_*, ρ_*) – положение равновесия модельной системы (см. п. 2.1).

Соотношения (3.4) (если отбросить в них слагаемые $O(e)$) задают уравнение эллипса. Бóльшая ось эллипса наклонена к оси $\eta = 0$ под углом $\alpha = -0.5\operatorname{arctg}(2\sqrt{6}/3) = -29.26°$..., отношение длин осей эллипса равно $(41 + 7\sqrt{33})/8 = 3.186$...

Фиксируя параметры μ и e ($\mu - \mu_0 \sim e$), из соотношения $\mu - \mu_0 = \sqrt{66}e\chi/144 + O(e^2)$ находим соответствующее им значение параметра χ модельной системы, а следовательно, число и вид периодических решений (3.4).

На фиг. 2 в плоскости параметров (μ, e) в окрестности точки $\mu = \mu_0$, $e = 0$ выделены области 0, 1 и 2, отвечающие случаям $\chi < -1$, $-1 < \chi < 1$ и $\chi > 1$. Граничные кривые между областями задаются уравнениями $\mu = \mu_0 \pm \sqrt{66}e/144 + O(e^2)$, на них параметр χ принимает значения ± 1. В области 0 нет 4π-периодических движений системы в окрестности треугольной точки либрации. В области 1 существует одно 4π-периодическое движение вида (3.4), являющееся устойчивым для большинства начальных условий. В области 2 существуют два движения (3.4), одно из которых устойчиво (для большинства начальных условий) и одно неустойчиво. Условие (2.9) для устойчивых движений всегда выполняется в области $\chi > -1$ существования этих движений.

Периодические движения из областей 1 и 2 показаны на фиг. 3, *а*, *б*. Движения по эллиптическим траекториям происходят в направлении, противоположном направлению вращения тела J вокруг тела S. В случае существования двух периодических движений (фиг. 3, *б*) внешний эллипс отвечает устойчивому движению, внутренний – неустойчивому.

4. Периодические движения динамически симметричного спутника, близкие к цилиндрической прецессии. Рассмотрим движение динамически симметричного спутника – твердого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле на эллиптической орбите малого эксцентриситета. Считая размеры спутника малыми по сравнению с размерами орбиты, примем обычное предположение о независимости движения спутника относительно центра масс от движения самого центра масс.

Введем орбитальную систему координат $OXYZ$ (ось OX направлена по трансверсали к орбите, OY – по бинормали и OZ – вдоль радиус-вектора центра масс O спутника) и связанную со спутником систему координат $Oxyz$ с осью Oz, направленной по оси симметрии спутника. Ориентацию связанной системы координат относительно орбитальной зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ.

Существует движение спутника, когда его ось симметрии во все время движения перпендикулярна плоскости орбиты, а сам спутник вращается относительно оси симметрии с постоянной угловой скоростью (цилиндрическая прецессия). При этом $\theta_0 = \pi/2$, $\psi_0 = \pi$, а канонически сопряженные к переменным θ и ψ импульсы p_θ и p_ψ принимают нулевые значения.

Используя функцию Гамильтона, приведенную ранее [6], и полагая

$$\theta = \pi/2 + q_1, \quad \psi = \pi + q_2, \quad p_\theta = p_1, \quad p_\psi = p_2$$

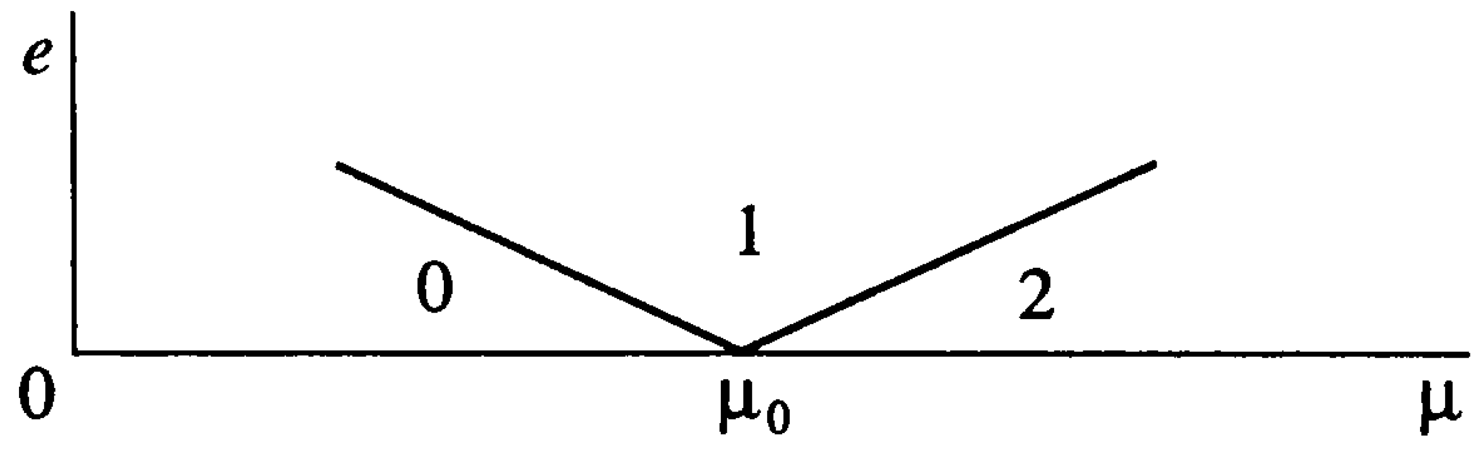
получим гамильтониан возмущенного движения спутника вблизи его цилиндрической прецессии

$$H = H_2 + H_4 + \ldots \tag{4.1}$$

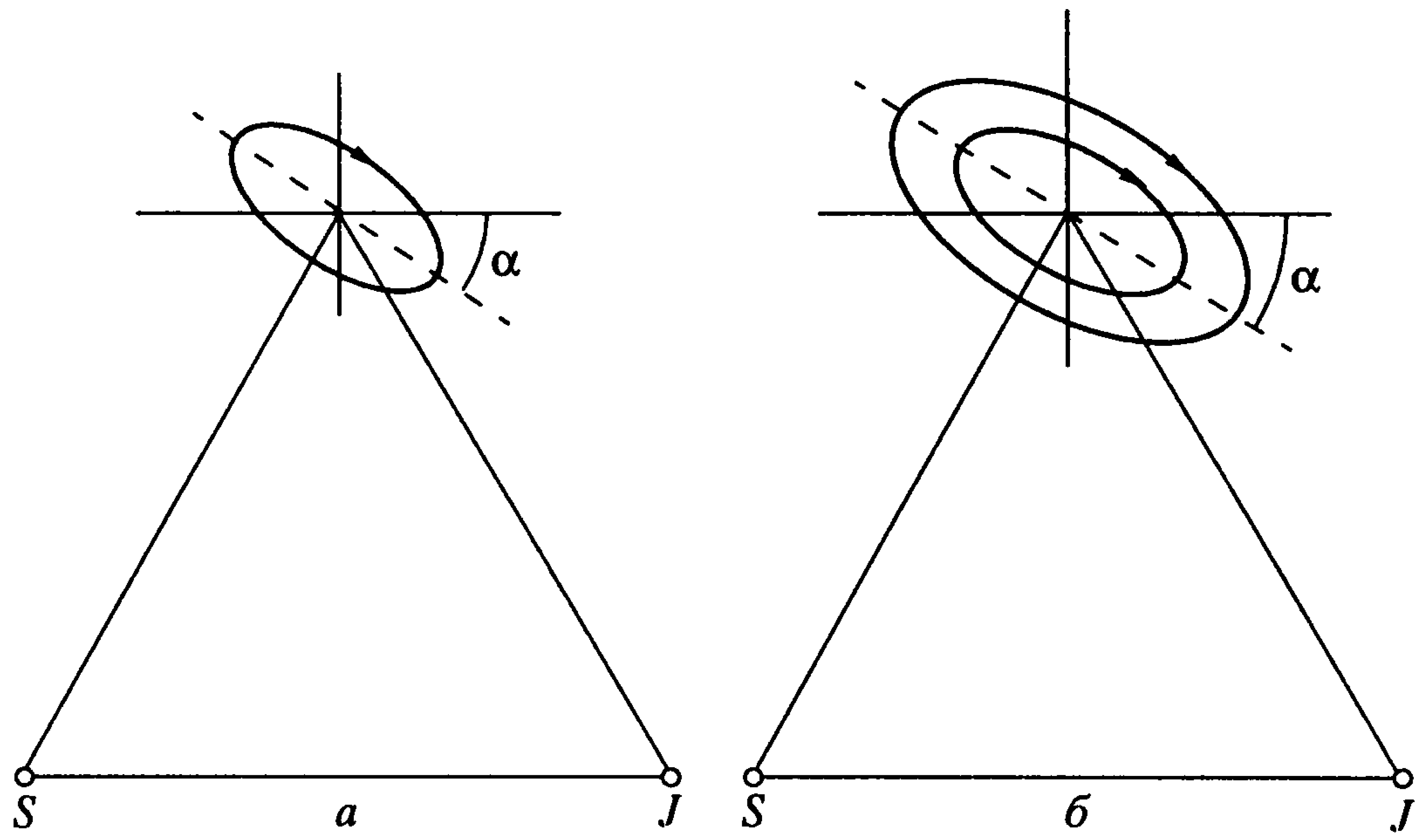
$$H_2 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2(1 + e\cos\nu)^2} - p_2 q_1 + \frac{\alpha\beta(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e\cos\nu)^2} q_1 p_2 + p_1 q_2 - \frac{1}{2}\alpha\beta(1 - e^2)^{3/2}(q_1^2 - q_2^2) +$$
$$+ \frac{\alpha^2\beta^2(1 - e^2)^3}{2(1 + e\cos\nu)^2} q_1^2 + \frac{3}{2}(\alpha - 1)(1 + e\cos\nu)q_1^2$$

$$H_4 = \left[\frac{1}{2}\alpha^2\beta^2 - \frac{5}{24}\alpha\beta + \frac{1}{2}(1 - \alpha)\right]q_1^4 + \left(\frac{5}{6}\alpha\beta - \frac{1}{3}\right)p_2 q_1^3 - \frac{\alpha\beta}{24}q_2^4 - \frac{1}{6}p_1 q_2^3 +$$
$$+ \frac{1}{2}p_2^2 q_1^2 + \frac{\alpha\beta}{4}q_1^2 q_2^2 + \frac{1}{2}p_2 q_1 q_2^2 + O(e); \quad \alpha = \frac{C}{A} \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 2)$$

где e – эксцентриситет орбиты центра масс спутника, ν – истинная аномалия, A и C – экваториальный и осевой моменты инерции, $\beta = r_0/\omega_0$, r_0 – проекция абсолютной



Фиг. 2



Фиг. 3

угловой скорости спутника на ось симметрии (r_0 = const), ω_0 – среднее движение центра масс.

Частоты ω_1 и ω_2 ($\omega_1 > \omega_2 > 0$) колебаний системы с гамильтонианом H_2 при $e = 0$ удовлетворяют уравнению

$$\omega^4 - (\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta + 3\alpha - 1)\omega^2 + (\alpha\beta - 1)(\alpha\beta + 3\alpha - 4) = 0$$

В плоскости параметров (α, β) существует счетное множество кривых, на которых реализуется параметрический резонанс основного типа. Ограничимся рассмотрением трех резонансных случаев.

Пусть $\beta = 0$ (что соответствует поступательному движению спутника в абсолютном пространстве), тогда при $\alpha = \alpha_1 = 181/156 = 1.1603...$ имеем $\omega_1 = 3/2$, а при $\alpha = \alpha_2 = 23/20 = 1.15$ имеем $\omega_2 = 1/2$. Если параметры α и β связаны соотношением $\alpha\beta = 2$, то $\omega_1 = 1$ при $2/3 < \alpha < 1$ и $\omega_2 = 1$ при $1 < \alpha < 2$.

В соответствии с алгоритмом, изложенным в разд. 1 и 2, найдем периодические движения спутника, близкие к его цилиндрической прецессии в случаях, близких к резонансным.

Сначала при помощи линейной замены переменных $q_i, p_i \to q_i', p_i'$ ($i = 1, 2$) приведем функцию H_2 при $e = 0$ к нормальной форме. Вид замены при $\beta = 0$ указан ранее [7]. При $\alpha\beta = 2$ эта замена имеет вид

$$q_1 = q_2'/\sqrt{\omega_2},\quad q_2 = q_1',\quad p_1 = p_2'\sqrt{\omega_2} - q_1',\quad p_2 = p_1' - q_2'/\sqrt{\omega_2}\quad (\omega_2 = \sqrt{3\alpha - 2}) \tag{4.2}$$

если $2/3 < \alpha < 1$; если же $1 < \alpha < 2$, то в равенствах (4.2) q_1', q_2', p_1', p_2', ω_2 меняются соответственно на q_2', q_1', p_2', p_1', ω_1.

Резонансные слагаемые в форме H_2 при $e \neq 0$ в случаях $\omega_1 \approx 3/2$, $\omega_2 \approx 1/2$ и $\omega_i \approx 1$ ($i = 1, 2$) имеют порядки e^3, e и e^2 соответственно, поэтому нормализацию формы H_2 надо проводить соответственно до членов порядка e^3, e и e^2 включительно.

Осуществляя далее нормализацию формы H_4 и переходя к "полярным" координатам θ_i, R_i по формулам

$$q_i' = \sqrt{2e^k R_i}\sin\theta_i, \quad p_i' = \sqrt{2e^k R_i}\cos\theta_i$$

где $k = 3$, 1 или 2, получим гамильтониан, аналогичный гамильтониану (1.3) разд. 1.

В случае $\beta = 0$, $\omega_1 \approx 3/2$ этот гамильтониан имеет вид

$$H = \tilde{\omega}_1 R_1 - \tilde{\omega}_2 R_2 + e^3 \sigma R_1 \cos(2\theta_1 - 3\nu + \pi) + e^3(c_{20}R_1^2 + c_{11}R_1R_2 + c_{02}R_2^2) + O(e^{9/2}) \tag{4.3}$$

$$\tilde{\omega}_1 = \frac{3}{2} + \frac{169}{105}(\alpha - \alpha_1^*) + O(e^4), \quad \alpha_1^* = \alpha_1 + e^2\alpha_{12}, \quad \alpha_{12} = \frac{59751675}{13541632} = 4.4124...$$

$$\tilde{\omega}_2 = \frac{\sqrt{39}}{13} + O(e^2), \quad \sigma = \frac{23475}{2048}, \quad c_{20} = c_{02} = -\frac{25}{1764}, \quad c_{11} = -\frac{244\sqrt{39}}{1323}$$

Коэффициенты c_{ij} в (4.3) (и ниже, в (4.5)) вычислены с использованием формул, приведенных ранее [7].

Вводя резонансную расстройку по формуле $\tilde{\omega}_1 = 3/2 + e^3\chi\sigma$ (χ – параметр модельной системы), получим следующие 4π-периодические движения спутника:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{13}{80}a_* e^{3/2}\sin\left(\frac{3\nu}{2} + \psi_*\right) + O(e^3), \quad \psi = \pi - \frac{3}{20}a_* e^{3/2}\cos\left(\frac{3\nu}{2} + \psi_*\right) + O(e^3) \tag{4.4}$$

где $a_* = \sqrt{65730\rho_*}$, а (ψ_*, ρ_*) – положение равновесия модельной системы.

Формулы (4.4) (если пренебречь слагаемыми $O(e^3)$) определяют такое движение спутника, когда конец единичного вектора его оси описывает на единичной сфере кривую, проекция которой в плоскость OXZ орбитальной системы координат представляет собой эллипс с полуосями ~ $e^{3/2}$ (отношение длин полуосей равно 13/12) (фиг. 4, *а*). Движение оси спутника происходит в направлении, совпадающем с направлением движения его центра масс по орбите.

Если $\beta = 0$, $\omega_2 \approx 1/2$, нормализованный гамильтониан имеет вид (4.3), в котором e^3 надо заменить на e, резонансное слагаемое – на $e\sigma R_2\cos(2\theta_2 + \nu)$ и положить

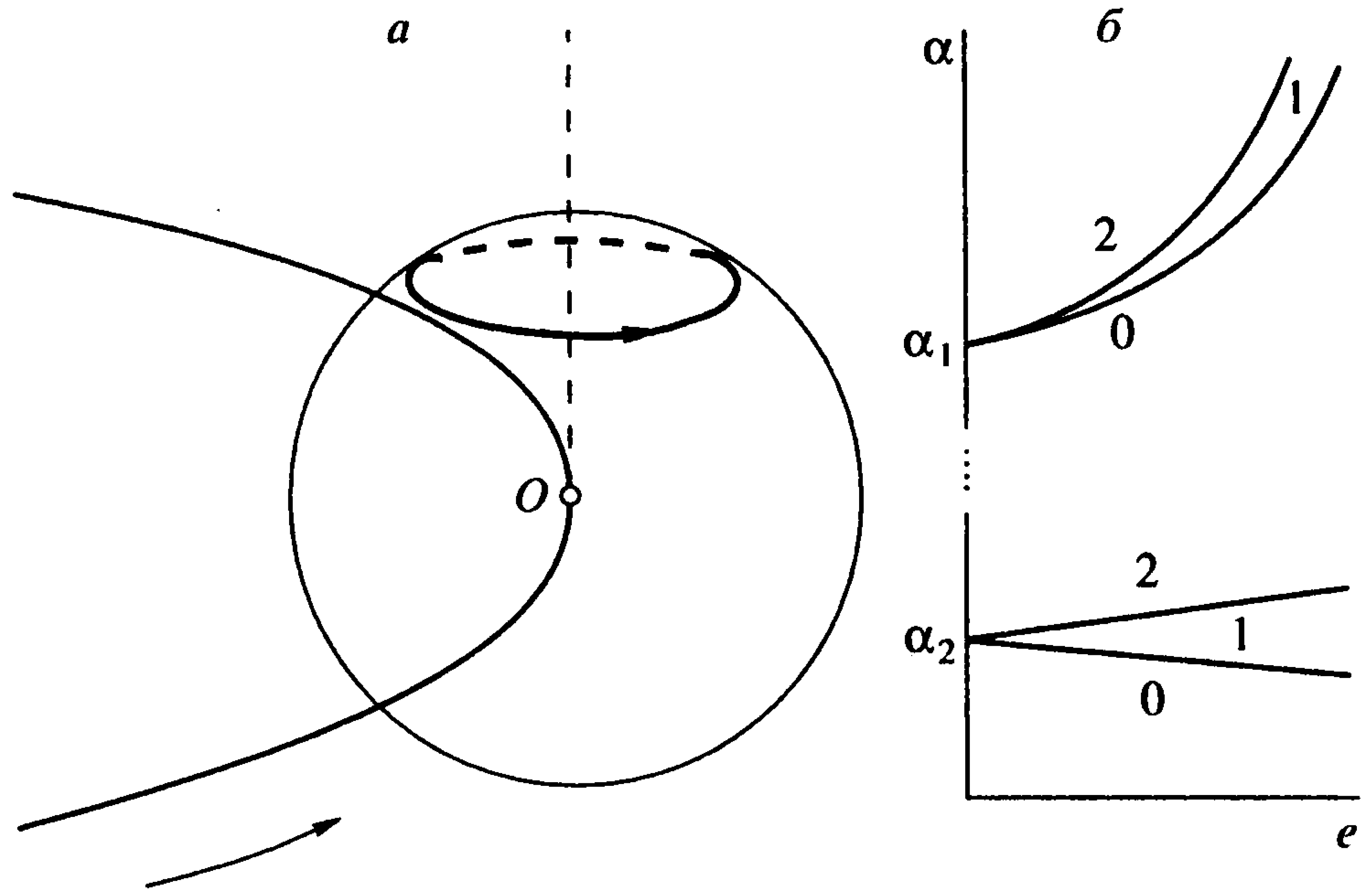
$$\tilde{\omega}_1 = \frac{\sqrt{55}}{5} + O(e), \quad \tilde{\omega}_2 = \frac{1}{2} - \frac{25}{13}\left(\alpha - \frac{23}{20}\right) + O(e^2) \tag{4.5}$$

$$\sigma = \frac{3}{104}, \quad c_{20} = c_{02} = -\frac{9}{676}, \quad c_{11} = -\frac{284\sqrt{55}}{1859}$$

Вводя резонансную расстройку по формуле $\tilde{\omega}_2 = 1/2 - e\chi\sigma$, получим следующие 4π-периодические движения спутника:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 5a_*\sqrt{e}\sin\left(\frac{\nu}{2} + \psi_*\right) + O(e), \quad \psi = \pi - 4a_*\sqrt{e}\cos\left(\frac{\nu}{2} + \psi_*\right) + O(e) \tag{4.6}$$

где $a_* = \sqrt{2\rho_*}/3$. Движение спутника, отвечающее формулам (4.6), аналогично предыдущему, только полуоси эллипса имеют порядок $\sqrt{e}$, отношение их длин равно $5/4$, а движение оси спутника происходит в направлении, противоположном направлению движения его центра масс по орбите.



Фиг. 4

На фиг. 4, *б* в плоскости параметров (e, α) в окрестности точек $e = 0$, $\alpha = \alpha_1$ и $e = 0$, $\alpha = \alpha_2$ выделены области 0, 1 и 2, в которых существует соответственно 0, 1 и 2 периодических движений спутника вида (4.4) и (4.6). Границами между областями служат кривые

$$\alpha = \alpha_1^* \pm \frac{2464875}{346112} e^3 + O(e^4) \quad \text{и} \quad \alpha = \alpha_2 \pm \frac{3}{200} e + O(e^2)$$

на которых параметр χ модельной системы принимает значения ± 1.

В случае, когда $\alpha\beta = 2$, $\omega_i \simeq 1$ ($i = 1$ или 2), нормализованный гамильтониан имеет вид

$$H = \tilde{\omega}_1 R_1 + \tilde{\omega}_2 R_2 + e^2 \sigma_i R_i \cos(2\theta_i - 2\nu + \theta_{0i}) + e^2 (c_{20} R_1^2 + c_{11} R_1 R_2 + c_{02} R_2^2) + O(e^3) \qquad (4.7)$$

где $\theta_{01} = \pi$, $\theta_{02} = 0$, а величины σ_i и c_{kl} вычисляются для произвольной точки $(\alpha_0, 2/\alpha_0)$ кривой $\alpha\beta = 2$ $(\alpha_0 \neq 1)$, причем

$$\sigma_i = {}^3\!/\!_2 \, | \alpha_0 - 1 | / (3\alpha_0 - 2)$$

$$c_{20} = {}^1\!/\!_8, \quad c_{11} = 1/(2\omega_2), \quad c_{02} = (3 - 2\omega_2^2)/(8\omega_2^2), \quad \omega_2 = \sqrt{3\alpha_0 - 2} \quad \text{при} \quad {}^2\!/\!_3 < \alpha_0 < 1$$

$$c_{20} = (3 - 2\omega_1^2)/(8\omega_1^2), \quad c_{11} = 1/(2\omega_1), \quad c_{02} = {}^1\!/\!_8, \quad \omega_1 = \sqrt{3\alpha_0 - 2} \quad \text{при} \quad 1 < \alpha_0 < 2$$

Величина $\tilde{\omega}_i$ в (4.7), отвечающая резонансной частоте ω_i, вычисляется в точке (α, β), отстоящей от точки $(\alpha_0, 2/\alpha_0)$ в направлении нормали к кривой $\alpha\beta = 2$ на расстоянии $\sim e^2$, и равна

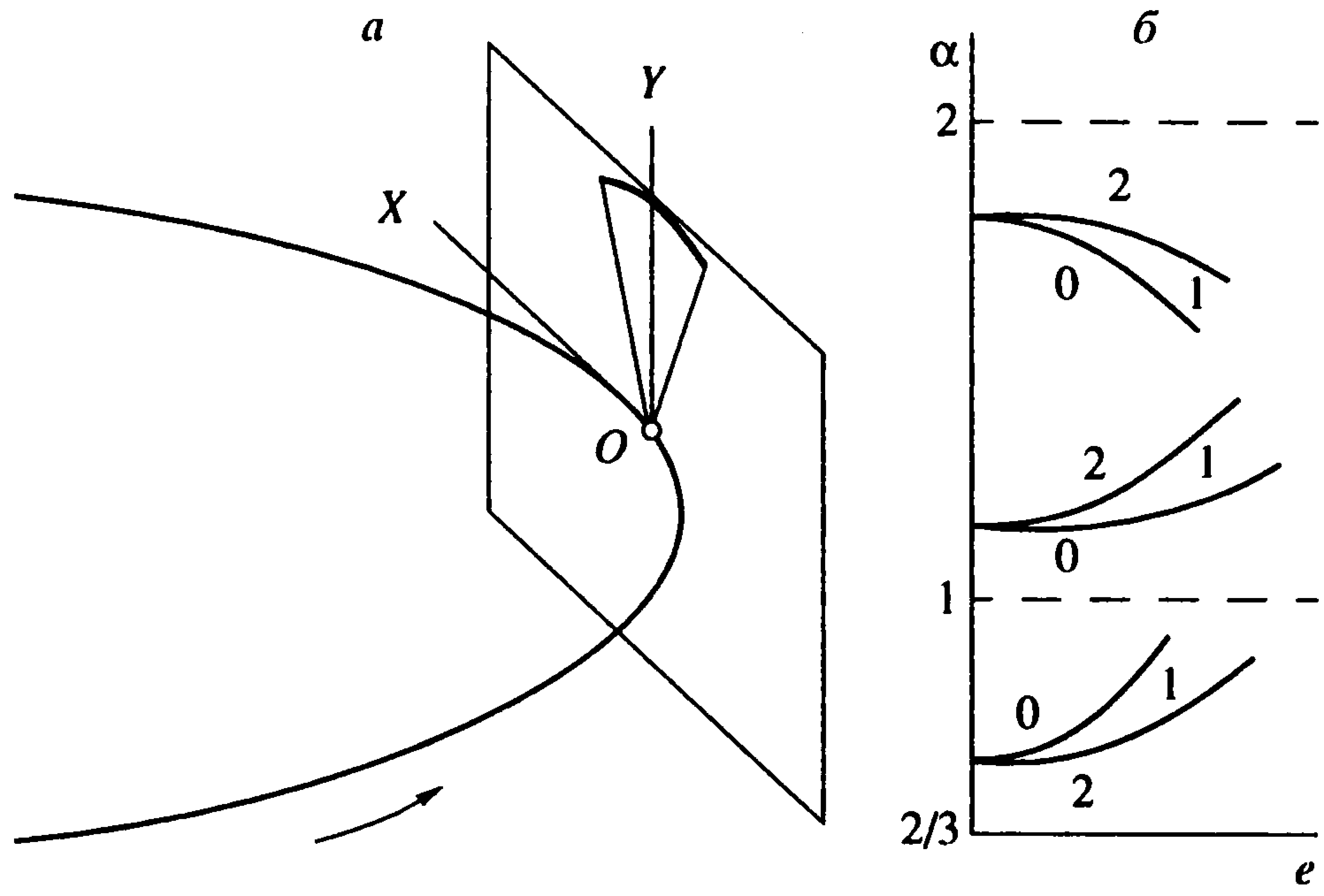
$$\tilde{\omega}_i = 1 + \frac{\alpha_0^4 + 4}{4\alpha_0}(\alpha - \alpha_0) + e^2 \frac{3(5\alpha_0^2 - 10\alpha_0 + 4)}{2(3\alpha_0 - 2)(2 - \alpha_0)} + O(e^3) \qquad (4.8)$$

Величина $\tilde{\omega}_i$, отвечающая нерезонансной частоте, равна $\sqrt{3\alpha_0 - 2} + O(e^2)$.

Введем резонансную расстройку по формуле $\tilde{\omega}_i = 1 - e^2 \chi \sigma_i$. Имеем следующие 2π-периодические движения спутника:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + O(e^2), \quad \psi = \pi + 4e\sqrt{\sigma_i \rho_*} \cos(\nu + \psi_*) + O(e^2) \qquad (4.9)$$

для случая ${}^2\!/\!_3 < \alpha_0 < 1$; в случае $1 < \alpha_0 < 2$ в формуле для ψ надо sin заменить на cos.



Фиг. 5

Соотношения (4.9) определяют такое движение спутника, когда его ось совершает колебания в плоскости OXY орбитальной системы координат (фиг. 5, *а*) около своего положения в невозмущенном движении с угловой амплитудой порядка e.

На фиг. 5, *б* в плоскости параметров e, α в окрестности точек $e = 0$, $\alpha = \alpha_0$ ($2/3 < \alpha_0 < 1$ или $1 < \alpha_0 < 2$) показаны области 0, 1 и 2, имеющие тот же смысл, что и раньше. Если $2/3 < \alpha_0 < 1$, то уравнение границы $\chi = 1$ имеет вид

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{6\alpha_0(3-2\alpha_0)}{(\alpha_0^4+4)(2-\alpha_0)}e^2 + O(e^3)$$

а уравнение границы $\chi = -1$ – вид

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{6\alpha_0(4\alpha_0^2-7\alpha_0+2)}{(\alpha_0^4+4)(3\alpha_0-2)(2-\alpha_0)}e^2 + O(e^3)$$

Если $1 < \alpha_0 < 2$, то уравнения границ $\chi = 1$ и $\chi = -1$ меняются местами.

Пусть задана точка (α, β) в малой ($\sim e^2$) окрестности гиперболы $\alpha\beta = 2$. Для определения числа периодических решений вида (4.9), отвечающих этой точке, сначала из уравнения нормальной прямой $\beta - 2/\alpha_0 = \alpha_0^2(\alpha - \alpha_0)/2$ определяется ближайшая точка $(\alpha_0, 2/\alpha_0)$ на гиперболе, затем из равенства $\tilde{\omega}_i = 1 - e^2\chi\sigma_i$ и соотношения (4.8) находится величина параметра χ модельной системы и делается вывод о числе и виде периодических решений.

Во всех перечисленных резонансных случаях единственное в областях 1 периодическое движение устойчиво для большинства начальных условий; из двух периодических движений в областях 2 одно (отвечающее меньшей по величине амплитуде) неустойчиво и одно (отвечающее большей амплитуде) устойчиво для большинства начальных условий. Условие (2.9) для устойчивых движений нарушается только для резонансного случая $\omega_i \simeq 1$ при $\alpha\beta \simeq 2$, если при $2/3 < \alpha_0 < 5/6$ параметр χ модельной системы принимает значение $\chi = \chi_* = 3(2\alpha_0 - 1)/(5 - 6\alpha_0)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования РФ (Т00-14.1-746).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркеев А.П.* Параметрический резонанс и нелинейные колебания тяжелого твердого тела в окрестности его плоских вращений // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 5. С. 34–44.
2. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
3. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
4. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.
5. *Deprit A., Deprit-Bartholomé A.* Stability of the triangular Lagrangian points // Astron. J. 1967. V. 72. № 2. P. 173–179.
6. *Маркеев А.П.* Резонансные эффекты и устойчивость стационарных вращений спутника // Космич. исследования. 1967. Т. 5. Вып. 3. С. 365–375.
7. *Маркеев А.П., Чеховская Т.Н.* Об устойчивости цилиндрической прецессии спутника на эллиптической орбите // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 6. С. 1040–1047.

Москва

Поступила в редакцию 25.XII.2001