ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 66. Вып. 4, 2002

УДК 531.36:62–50

© 2002 г. В.Ф. Журавлёв

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЗМА ДВИЖЕНИЯ ЗМЕИ

Рассматривается движение змеи, моделируемой упругим стержнем с управляемой формой нейтральной оси. Найдено оптимальное управление этой формой, обеспечивающее при заданном среднем значении движущей силы минимум внутренних усилий.

Существуют различные представления о механизме, позволяющем змеям перемещаться. Рассматривался так называемый "волновой перенос массы" [1], когда змея "эстафетным" способом переносит различные участки своего тела, а силы трения в мгновенных точках опоры обеспечивают локально отсутствие проскальзывания. В недавней работе [2] сухому трению отведена более существенная роль: фазы покоя чередуются с фазами проскальзывания, обеспечивая прерывистое движение, в котором важную роль играют инерционные эффекты.

Принцип создания силы тяги при движении змеи за счет внутренних сил без участия трения был впервые сформулирован М.А. Лаврентьевым (см., например, [3]).

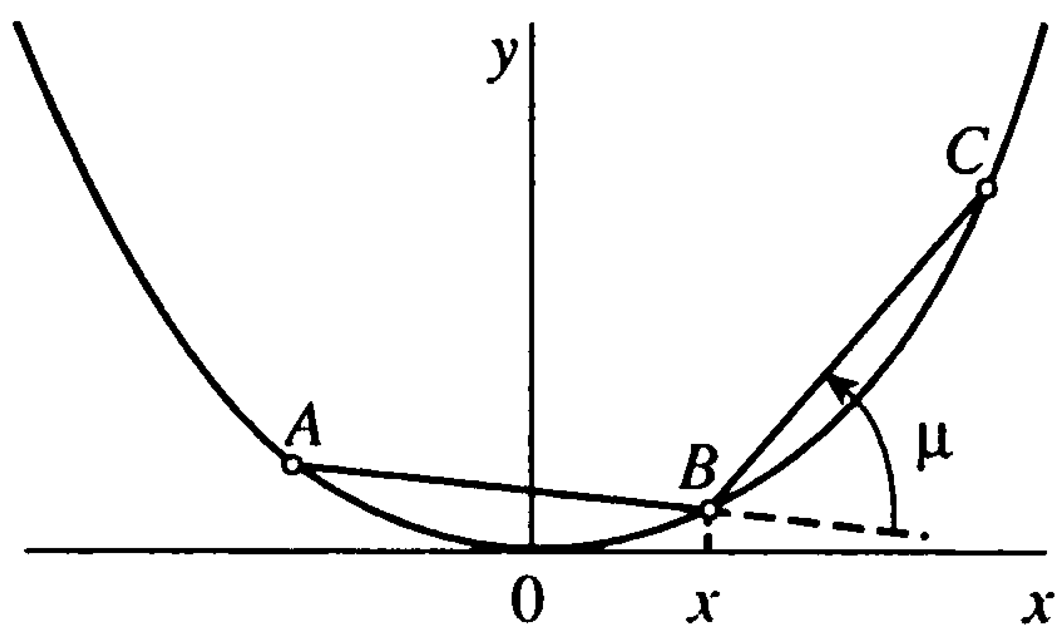
В предлагаемой ниже модели сухое трение также играет пассивную роль: если оно и существует, то лишь как сопротивление движению, которое необходимо преодолевать. Движущая сила создается змеей благодаря управлению формой своего тела, взаимодействующего с окружающими препятствиями. Эта модель примыкает к моделям [3–6], в которых змея рассматривается как абсолютно гибкая нерастяжимая нить с распределенным по длине управляющим моментом, причем змея изначально рассматривается как сплошная среда [3–5], либо к модели сплошной среды приходят в результате предельного перехода от модели многозвенника [6].

Натурные наблюдения показывают, что змеи движутся так, что каждая точка осевой линии тела змеи описывает ту же траекторию, что и все другие такие точки. Иными словами, вектор скорости змеи в любой точке направлен по касательной к траектории, или к изогнутой линии тела. Такое движение гибкой нити называют кажущимся покоем.

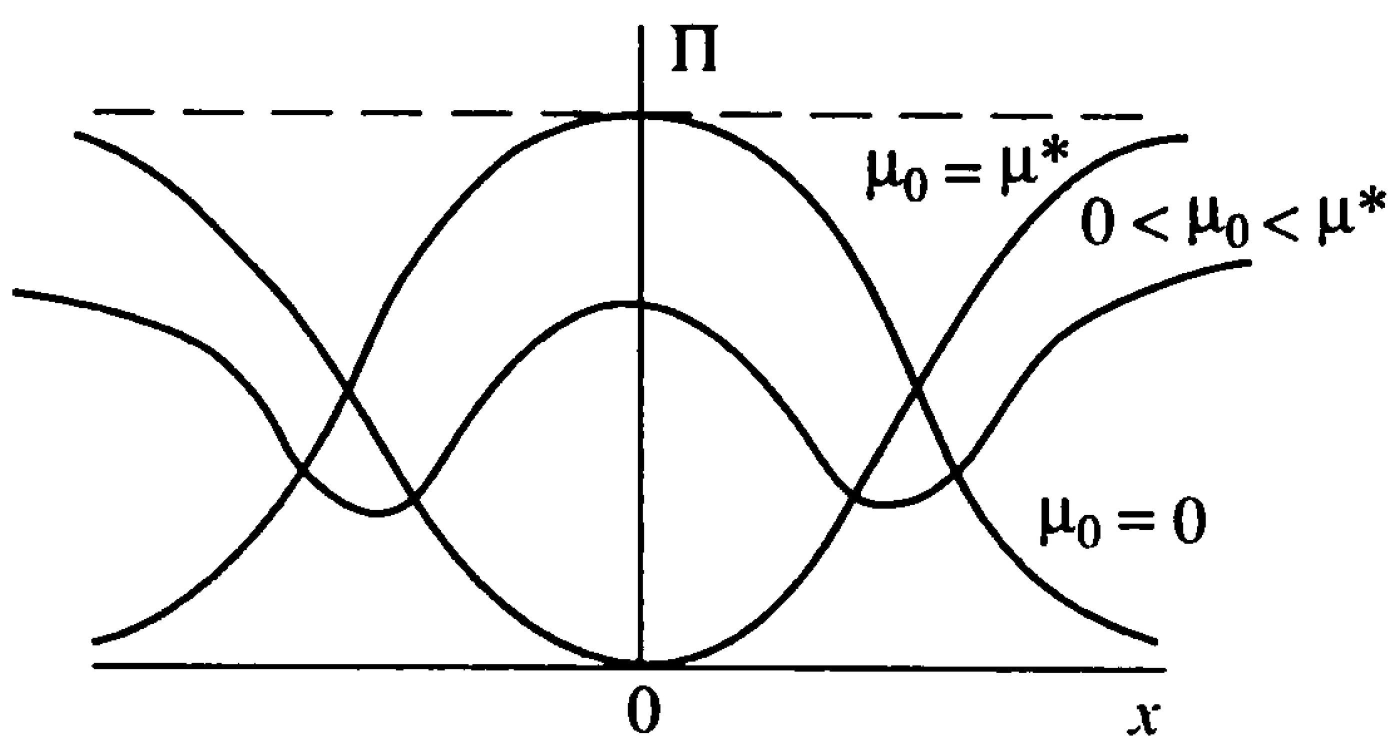
Это означает, что траекторию змеи, осевая линия тела которой в каждый момент времени представляет собой целый кусок траектории, можно рассматривать как геометрическую связь. Двигаясь по связи, змея распоряжается внутренними силами так, чтобы реакция связи имела нужное направление.

Поясним эту идею на простейшем примере (фиг. 1). Пусть три материальные точки A, B, C все время лежат на фиксированной параболе (связь). Между собой они соединены жесткими невесомыми стержнями с упругим элементом (пружиной) в месте их сочленения. Точки могут перемещаться по параболе без трения. Никаких других сил нет.

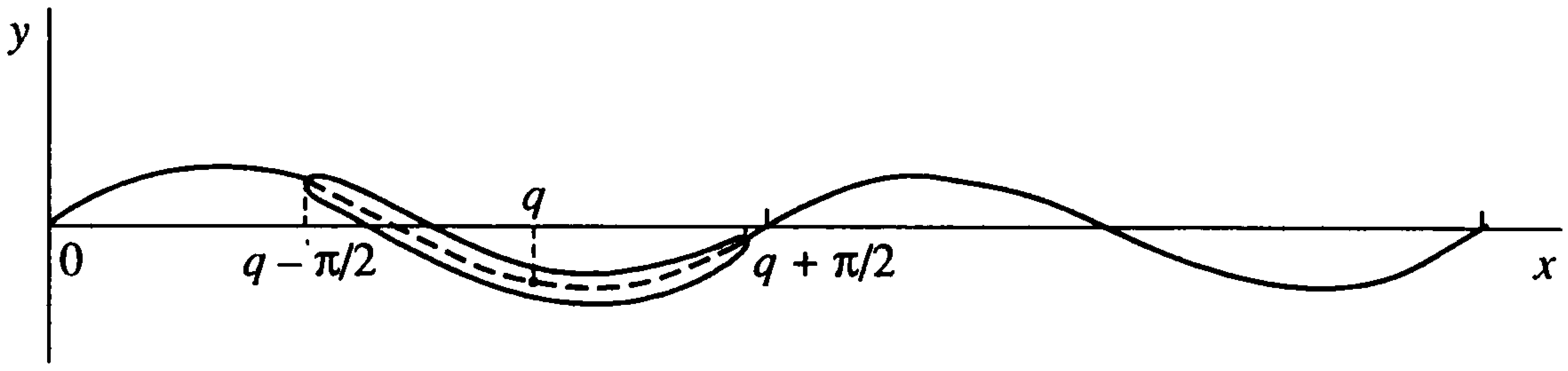
Если стержни одинаковой длины, то имеется очевидное положение равновесия, в котором точка B лежит в начале координат. Если в ненапряженном состоянии пружины стержни лежат на одной прямой, то в указанном положении равновесия потенциальная энергия деформированного состояния максимальна и такое положение неустойчиво. При возмущении система уходит в бесконечность. Если пружина не напряжена как раз в этом положении равновесия, то оно будет, очевидно, устойчивым. Пружина может быть ненапряженной в любом положении точки B на параболе.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Тогда система будет иметь два устойчивых положения равновесия, симметричных относительно оси y, и одно неустойчивое в нуле.

Пусть μ – угол между стержнями, как это показано на фиг. 1, μ_0 – значение угла μ, при котором пружина не напряжена, а μ^* – угол между стержнями в положении точки B в начале координат. На фиг. 2 изображены кривые, отражающие поведение потенциальной энергии в зависимости от координаты точки B на оси x при разных значениях угла μ_0.

Таким образом, меняя точку закрепления пружины на одном из звеньев, можно управлять как положением равновесия, так и движением рассматриваемой системы.

Пример можно слегка усложнить, расположив на параболе несколько сочлененных стержней с упругими элементами между ними. В такой системе будет несколько управляющих параметров: управлению может подвергаться ненапряженное относительное положение каждой пары стержней. Число управляющих параметров можно уменьшать, в частности довести до одного, если связывать между собой управления разными параметрами.

Рассмотренная система – простейший пример упругой системы, в которой, регулируя внутренним образом параметры упругого элемента, можно управлять движением системы по упругой связи.

Именно на этой идее и основана модель динамического поведения змеи, которая отличается от рассмотренного простейшего примера лишь тем, что она является распределенной упругой системой. Если представить себе, что цель движения – перемещение из начальной точки на горизонтальной плоскости в конечную, то обсуждаемый механизм не позволяет осуществить движение, когда в качестве геометрической связи берется прямая, проходящая через эти две точки. Опять-таки, основываясь на натурных наблюдениях, будем исходить из того, что формируемая для реализации поставленной цели геометрическая связь представляет собой периодическую кривую, которую в простейшем случае можно считать синусоидой (фиг. 3). Период этой синусоиды и ее амплитуда подлежат определению.

Без ограничения общности можно считать длину змеи равной π. Змея представляет собой систему с одной степенью свободы при дополнительном предположении о ее нерастяжимости, и единственная обобщенная координата q_1 определяет положение центра тела змеи на оси x. Поперечными размерами пренебрегаем.

Далее для упрощения анализа будем полагать, что кривизна траектории невелика, так что приближенно ее можно считать равной второй производной: $y'' = d^2y/dx^2$. Тогда потенциальная энергия деформированного состояния змеи вычисляется следующим образом:

$$\Pi = \frac{1}{2}EJ\int\limits_{q_1-\pi/2}^{q_1+\pi/2}\xi^2(x,x^*,q_2)dx,\quad \xi(x,x^*,q_2) = y''(x) - u''(x^*,q_2)$$

где E – модуль упругости, J – момент инерции поперечного сечения, а функция $u(x^*, q_2)$ определяет форму ненапряженного состояния тела змеи. Переменная $x^* = x - q_1$ есть относительная координата точки на теле, а q_2 – параметр управления. Роль функции управления в распределенной системе $u(x^*, q_2)$ эквивалентна роли параметра μ_0 в рассмотренном выше простейшем примере.

Производная от силовой функции $U(q_1,\ q_2) = -\Pi(q_1,\ q_2)$ по параметру q_1, определяющему положение центра тела змеи вдоль оси x при замороженной функции управления $u(x^*,\ q_2)$, равна силе, действующей на змею со стороны связи:

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{1}{2}EJ\left[\xi^2\left(q_1 - \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, q_2\right) - \xi^2\left(q_1 + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, q_2\right)\right] -$$

$$-EJ\int\limits_{q_1-\pi/2}^{q_1+\pi/2}\xi(x, x-q_1, q_2)u'''(x-q_1, q_2)dx$$

Производная от силовой функции по параметру q_2 при фиксированном q_1 определяет меру силового воздействия, осуществляемого змеей при реализации функции управления. При этом предполагаем, что электрические сигналы, направляемые к мышцам змеи, связаны между собой так, что управление нейтральной осью осуществляется регулированием единственного скалярного параметра (змея не управляет каждой мышцей в отдельности). Тогда мерой внутренних сил, развиваемых змеей при движении, будет приращение энергии ее деформированного состояния при вариации управляющего параметра.

Перед тем как вычислить эту силу, удобно перейти под знаком интеграла, выражающего силовую функцию, к относительной координате, после чего находим

$$Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} = EJ\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\xi(x^* + q_1, x^*, q_2)\frac{\partial u''}{\partial q_2}dx^*$$

Поставим следующую задачу. Требуется найти такое управление $u(x^*,\ q_2)$ нейтральной осью змеи при движении ее вдоль синусоиды, которое при заданном среднем значении движущей силы $\langle Q_1\rangle$ обеспечивало бы минимум управляющих усилий в следующем смысле: $\langle Q_2^2\rangle \to \min$ (угловыми скобками обозначено среднее по q_1).

Как уже отмечалось, змея движется по синусоиде $y = a\sin bx$ с заранее неизвестной амплитудой a и пространственной частотой b.

Управляющую функцию также будем искать в виде синусоиды, характеризующей движение упругой волны по телу змеи:

$$u = c\sin\eta(x^*, q_2),\quad \eta(x^*, q_2) = dx^* + eq_2 + f$$

Эта функция будет определять распространение упругой волны, отслеживающей движение тела вдоль связи, если параметр управления q_2 следит за параметром движения q_1: $q_2 = q_1 = q$.

Таким образом, искомыми являются пять параметров: a, b, c, d, e, f. При этом без ограничения общности можно считать $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Вычислим движущую силу

$$Q_1 = \frac{1}{2}EJ\left[\xi^2\left(q-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2},q\right)-\xi^2\left(q+\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},q\right)\right]-$$

$$-EJ\int\limits_{q-\pi/2}^{q+\pi/2}\xi(x,x-q,q)cd^3\cos\eta(x-q,q)dx$$

$$\xi(x,x-q,q) = ab^2\sin bx - cd^2\sin\eta(x-q,q)$$

Если управления нет ($c = 0$, форма недеформированного состояния змеи прямолинейная), то действующая на змею сила имеет вид

$$Q_1 = -\frac{1}{2}a^2b^4EJ\sin 2bq\sin b\pi$$

Если, например, длина змеи составляет четверть периода траектории, т.е. $b = ½$, то $Q_1 = -(a^2EJ/32)\sin q$. Это означает, что в рассматриваемом случае синусоидальной связи в отсутствие управления змея представляет собой математический маятник, в котором роль угловой переменной играет координата q, с чередующимися устойчивыми и неустойчивыми положениями равновесия. Такая же картина будет и тогда, когда длина змеи превосходит четверть периода на целое число полупериодов. Если же длина змеи кратна полупериоду траектории, то сила Q_1 тождественно по q обращается в нуль. При этом змея не испытывает со стороны связи никаких сил и любое ее положение на связи является безразличным положением равновесия.

Именно последнему условию должна удовлетворять длина змеи (или, что эквивалентно, при заданной длине змеи этому условию должна удовлетворять выбираемая траектория), чтобы в случае управления развиваемые усилия не расходовались на преодоление консервативной силы.

Таким образом установлено, что в дальнейшем, т.е. когда $c \neq 0$, имеет смысл рассматривать только случай $b \in N$ ($b = 1, 2, \ldots$).

Вычисление среднего значения Q_1 приводит в общем случае к выражению

$$\langle Q_1\rangle = \begin{cases}\langle Q_1\rangle_+, & e+b=0,\\ \langle Q_1\rangle_-, & e-b=0,\end{cases} \quad \langle Q_1\rangle_\pm = EJab^3cd^2\omega_\pm\sin f$$

$$\omega_\pm = \frac{1}{b\pm d}\sin(b\pm d)\frac{\pi}{2}$$

Сравнивая волну перемещения $y = a\sin b(x^* + q)$ с волной деформаций нейтральной оси $u = b\sin\eta(x^*, q)$, замечаем, что эти волны движутся в противоположные стороны, если $\mathrm{sgn}(ed) < 0$, и в одну сторону, если $\mathrm{sgn}(ed) > 0$. Поэтому, если, не снижая общности, рассматривать $d > 0$, то полученное для $\langle Q_1\rangle$ выражение можно представить в эквивалентной форме

$$\langle Q_1\rangle = \begin{cases}\langle Q_1\rangle_+, & e<0\\ \langle Q_1\rangle_-, & e>0\end{cases}$$

Видно, что при прочих равных условиях движущая сила больше, если обе волны распространяются в одну сторону ($e > 0$). Этот случай и будем рассматривать дальше.

Вычислим теперь $\langle Q_2^2 \rangle$:

$$\langle Q_2^2 \rangle = \frac{1}{2}(EJab^3cd^2)^2(\omega_+^2 + 2\omega_-^2 \sin^2 f) + \frac{1}{8}(EJbcd^3)^2 \sin^2 d\pi -$$

$$-\frac{1}{2}E^2J^2ab^4c^3d^2\omega_+ \sin d\pi \cos f$$

В дальнейшем во избежание громоздких выкладок примем без обоснования одно достаточно очевидное предположение. Будем считать, что d – целое число. Тогда выражение для $\langle Q_2^2 \rangle$ упрощается и при учете выражения для $\langle Q_1 \rangle$ может быть получено в такой форме:

$$\langle Q_2^2 \rangle = \langle Q_1 \rangle^2 \left[1 + \left(\frac{\omega_+}{\omega_- \sin f} \right)^2 \right]$$

Здесь уже легко видеть, что при заданном значении средней движущей силы $\langle Q_1 \rangle$ минимум расходуемых усилий $\langle Q_2^2 \rangle$ будет достигаться при $b = d$, когда $\langle Q_2^2 \rangle = \langle Q_1 \rangle^2$. Выражение для средней силы при этом принимает форму $\langle Q_1 \rangle = (\pi/2)EJab^5c\sin f$.

Видно, что фазовый сдвиг f выгодно выбрать равным $\pi/2$.

Таким образом, установлено, что при движении по связи $y = a\sin bx$ оптимальное управление нейтральной линией в теле змеи имеет вид $u = c\cos b(x^* + q)$.

В заключение приведем полученное выражение для силы тяги в размерных переменных, учитывая, что безразмерная координата x связана с соответствующей размерной координатой $\tilde{x}$ так: $x = \pi\tilde{x}/L$, где L – длина змеи. Имеем $\langle Q_1 \rangle = $ $= \pi^5 EJacb^5/(2L^4)$.

Пример. Пусть длина змеи $L = 100$ см. Средний радиус поперечного сечения $R = 2$ см. Амплитуда траектории $a = 5$ см. Амплитуда управляемой нейтральной оси $c = 1$ см. Положим $b = 5$ (2.5 волны на длине тела). Модуль упругости $E = 2$ кг/см^2. Для указанных размеров вес змеи ≈ 1.5 кг, а $J = 64/3$ см^4. Подставляя эти значения в последнюю формулу, получаем: $\langle Q_1 \rangle \cong 1$ кг.

Изменение координаты q во времени зависит от постановки динамической задачи. В частности, если движущая сила уравновешивает силу трения, то эта координата меняется во времени линейно: $q = \nu t$. Изменение формы змеи в размерных переменных и в связанной системе координат имеет в этом случае вид $y = a\sin[\pi b(x^* + \nu t)/L]$. Частота колебаний тела равна $\pi b\nu/L$. Для данных примера, принимая частоту колебаний равной 2.5 Гц, находим скорость змеи: 1 м/с.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Добролюбов А.И.* Бегущие волны деформации. Минск: Наука и техника, 1987. 142 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* Движение многозвенника по горизонтальной плоскости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 1. С. 8–18.
3. *Лаврентьев М.А., Лаврентьев М.М.* Об одном принципе создания тяговой силы для движения // ПМТФ. 1962. № 4. С. 3–9.
4. *Кузнецов В.М., Луговцев Б.А., Шер Е.Н.* О механизме движения ужей и рыб // Динамика сплошной среды. Сб. статей. Новосибирск: Наука, 1969. Вып. 1. С. 207–233.
5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
6. *Литвинцев А.И., Пятницкий Е.С.* Динамика и управление многозвенным транспортным механизмом // Автоматика и телемеханика. 1993. № 1. С. 141–153.

Москва

Поступила в редакцию
3.IV.2001