УДК 532.546

© 2002 г. Дж.Р. Окендон, С.Д. Ховисон

П.Я. КОЧИНА И ХЕЛЕ-ШОУ В СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ, ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУКАХ И ТЕХНИКЕ

Приводится краткий обзор исследований П.Я. Кочиной по задачам со свободной границей для гармонических функций; эти исследования оказали наибольшее влияние на развитие науки, включая науки о материалах, экологию, медицину и финансы, а также на развитие самой математики и стимулировали многие новые направления в таких областях, как комплексный анализ, асимптотический анализ и задачи со свободной границей для уравнений с частными производными.

Эта статья, пусть и не в полной мере, воздает должное многогранной деятельности П.Я. Кочиной по исследованию задач со свободной границей. Делается попытка подчеркнуть некоторые из принципиальных математических новшеств, которые были стимулированы ее исследованиями, и указать наиболее явные пробелы в наших сегодняшних знаниях. Феноменальный рост интереса к всевозможным задачам со свободными границами гарантирует, что плодотворные идеи П.Я. Кочиной будут влиять на образ мыслей математиков и естествоиспытателей на протяжении многих последующих десятилетий.

1. Ячейка Хеле-Шоу. За год до рождения П.Я. Кочиной Хеле-Шоу [1] впервые описал свою "ячейку", экспериментальную установку для изучения картины течения путем закачки вязкой жидкости в узкий зазор между двумя стеклянными пластинами. Используя визуализацию краской, он смог наблюдать картину течения, когда оно возмущено различными препятствиями (например, в форме крылового профиля), помещенными в зазоре между пластинами. Таким образом, удалось с большой точностью подтвердить предсказание Стокса (сделанное в приложении к статье Хеле-Шоу), согласно которому в предположении о том, что число Рейнольдса не слишком велико, поле скоростей $\mathbf{u}$ в плоскости ячейки безвихревое. Давление играет роль потенциала, удовлетворяющего на поверхности препятствия однородным условиям Неймана (третьего рода), так что при соответствующем выборе масштаба

$$\mathbf{u} = -\nabla p, \qquad \Delta p = 0 \text{ внутри жидкости} \tag{1.1}$$

$$dp/dn = 0 \text{ на препятствии} \tag{1.2}$$

(Лишь в 1968 г. [2] анализ Стокса был видоизменен таким образом, чтобы учесть трехмерные эффекты, с необходимостью возникающие при учете условия прилипания на препятствии.)

Ячейка Хеле-Шоу стала знаменитой как своего рода аналоговое вычислительное устройство для решения уравнения Лапласа, и в этом качестве она оказалась особенно полезной для визуализации двумерных течений в пористых средах в предположении, что они достаточно медленные, чтобы следовать закону Дарси. Однако на протяжении последующих пятидесяти лет только в этом и усматривалось (по крайней мере, многими западными учеными) научное значение ячейки Хеле-Шоу.

2. Модели Кочиной течений со свободными границами в теории фильтрации. В 1930–40-е годы П.Я. Кочина поняла, что многие задачи теории течений грунтовых вод, в особенности связанные с фильтрацией через плотины, приводят к моделям, в которых насыщенная область должна быть отделена от области сухого грунта свободной границей Г, которая подлежит определению в ходе решения задачи [3, 4]. Она, так же как Маскет [5] и Л.А. Галин [6], показала, что на такой границе раздела давление должно быть приблизительно постоянным и равным давлению в сухом грунте и что, согласно закону сохранения массы, скорость жидкости в направлении нормали к Г должна быть пропорциональна v_n, нормальной скорости границы Г. Поэтому, не теряя общности, приняв ось y направленной вертикально вверх, имеем

$$\mathbf{u} = -\nabla(p+\rho g y), \quad \Delta p = 0 \text{ в жидкости} \tag{2.1}$$

$$p = 0, \quad -\partial(p + \rho g y)/\partial n = v_n \quad \text{на } \Gamma \tag{2.2}$$

(Модель (2.1), (2.2) сейчас часто называют задачей Хеле-Шоу со свободной границей, несмотря на явную неуместность такого наименования.)

Таким образом, наряду со своей традиционной ролью аналогового вычислительного устройства для линейных задач теории потенциала, ячейка Хеле-Шоу с полостью (т.е. не заполненная целиком) позволяет легко визуализировать решения задачи (2.1), (2.2). И действительно, П.Я. Кочина ([3], с. 243) быстро смогла получить хорошее согласие между некоторыми из ее изящных точных решений задачи (2.1), (2.2) и своими наблюдениями течений в экспериментальной ячейке.

Открытие П.Я. Кочиной того факта, что подобные нелинейные задачи допускают такое простое моделирование, само по себе было откровением, однако оно имело и куда более значительные последствия.

3. Приложимость модели Хеле-Шоу к задачам современной науки и техники. Список научных проблем, математические модели которых могут быть сведены к задаче (2.1), (2.2), растет с каждым годом. Здесь назовем только некоторые из них, которые появились после того, как впервые была предложена модель течения грунтовых вод; список этот предназначен только для того, чтобы дать общее представление о широте вопросов, которые эта модель охватывает.

Первое и наиболее значимое развитие теории состоит в появлении множества новых "стефановских" моделей. Исходная модель Стефана относилась к теории альбедо, однако теперь она возникает во многих задачах из области науки о материалах, химии и биологии. Прототипом служит задача о плавлении или затвердевании материала, который первоначально находится при температуре фазового перехода, в предположении, что тепло передается только путем теплопроводности и что имеется некоторое заданное значение скрытой теплоты плавления. Тогда величина p в задаче (2.1), (2.2) для предельного случая нулевой силы тяжести ($g = 0$) может интерпретироваться как температура (или концентрация) в новой фазе при температуре плавления, равной нулю, и безразмерной скрытой теплоте плавления (или скачке концентрации), равной единице, при условии, что теплоемкость материала пренебрежимо мала. Эта модель лежит в основании научного исследования разнообразных технологических процессов (производство стали [7], изготовление полупроводников [8], замораживание пищевых продуктов, лазерная сварка [9]). С другой стороны, если под величиной p понимается электрический потенциал, приходим к модели электрохимической обработки или формообразования [10], тогда как, отождествляя p с концентрацией некоторого биологического агента (и вновь учитывая диффузию, как в задаче Стефана), можно моделировать некроз опухоли [11]. Примечательно, что во многих "стефановских" обобщениях модели (2.1), (2.2) безразмерный параметр, характеризующий соотношение между скоростью изменения свойств в объеме и скоростью изменения свободной границы Г, мал, так что эта модель является разумным приближением.

Следуя по совершенно иному направлению, можно убедиться, что если определить $\omega(x, y)$ как момент времени, когда свободная граница Г достигает точки (x, y) в плоскости ячейки Хеле-Шоу, описываемой моделью (2.1), (2.2) с $g = 0$, то функция

$$u(x,y,t) = \int_{\omega}^{t} p(x,y,\tau)d\tau \tag{3.1}$$

удовлетворяет уравнению $\Delta u = 1$ и, таким образом, описывает поперечное смещение мембраны под действием однородного давления. Более того, из условий на свободной границе (2.2) следует, что $u = \partial u/\partial n = 0$ на Г. Таким образом, в рамках механики контактных взаимодействий функция u может интерпретироваться как смещение нагруженной давлением мембраны, прижимаемой к гладкой жесткой плоскости, причем с изменением времени получаем однопараметрическое семейство таких статических контактных задач.

Заметим, что если снова включить диффузию, то соответствующая задача возникает в теории выбора оптимального времени реализации опциона, причем величина p оказывается связанной с ценой опциона, а роль пространственной переменной играет цена акции [12]. Знаменательно, что, когда впервые в 1960-х годах в одном из первых применений теории вариационных неравенств (см. [13]) было предложено отображение $p \mapsto u$, обычно называемое "преобразованием Байокки", оно было использовано для доказательства существования и единственности решения той самой задачи о плотине, для которой П.Я. Кочина получила классическое явное решение двадцатью годами раньше.

Список новых задач со свободной границей можно было бы продолжать, однако здесь ограничимся замечанием, что имеется также обширный перечень интенсивно исследуемых математических задач, не являющихся задачами со свободной границей, для которых задача (2.1), (2.2) служит сингулярным предельным случаем, как будет указано ниже. Поэтому для многих исследователей, изучающих такие модели для уравнений с частными производными, знание идей П.Я. Кочиной необходимо. Некоторые из этих моделей имеют большее значение для физики, нежели другие, но все они стимулировали весьма интересные новые исследования в теории уравнений с частными производными. Это следующие модели:

уравнение Аллена–Кана

$$\tau\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2\Delta u + u - u^3 \text{ при } \varepsilon,\tau\to 0$$

уравнение Кана–Хиллиарда

$$\tau\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta(\varepsilon^2\Delta u + u - u^3) \text{ при } \varepsilon,\tau\to 0$$

уравнения фазового поля

$$\delta\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2\Delta u + u - u^3 + \alpha T,\ \ \tau\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta T \text{ при } \varepsilon,\tau\to 0$$

уравнение фильтрации

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla\cdot(u^m\nabla u) \text{ при } m\to\infty,\ \ \tau\to 0$$

(Последнее уравнение было предложено как модель распространения галактической цивилизации [14], однако оно часто используется в теории различного рода течений грунтовых вод, как это было хорошо известно П.Я. Кочиной.)

Во всех случаях все параметры постоянны и пределы должны вычисляться соответствующим образом (см. [15] в отношении первых трех случаев и [16] в отношении последнего).

И этот список может быть значительно расширен, однако сейчас обратимся к наиболее фундаментальному теоретическому аспекту задачи (2.1), (2.2).

4. Корректность и некорректность постановки задачи. Знаменитое точное решение П.Я. Кочиной задачи (2.1), (2.2), обсуждаемое далее в разд. 5, выявило склонность этих решений к "обострению" в случае неустойчивости, когда площадь внутри границы Г, занятая жидкостью, со временем уменьшается (т.е. при всасывании жидкости).

И обратно, все решения П.Я. Кочиной обретают гладкость, когда занятая жидкостью область расширяется. Это согласуется с исследованием Хилла [17] устойчивости в линейном приближении, и в 1958 г. Саффмэн и Тейлор [18] столкнулись с одним из наиболее эффективных проявлений этой необратимости движения. Отбирая жидкость с одного конца ячейки, имеющей форму длинного канала с параллельными стенками, они обнаружили, что "язык" воздуха, который постепенно продвигается к концу канала, занимает примерно половину ширины канала. Однако их анализ равномерно распространяющейся волны в рамках модели (2.1), (2.2), использовавший упрощенную форму техники конформных отображений П.Я. Кочиной, привел к однопараметрическому семейству "языков", и возникшая таким образом проблема отбора "правильной" конфигурации до сих пор не решена. Здесь снова сталкиваемся с ситуацией, когда работы П.Я. Кочиной стимулировали развитие области исследований, которая обсуждается теперь в сотнях статей и книг.

Действительно, "неустойчивость Саффмена–Тейлора" (именно это выражение теперь обычно используется для описания некорректности задачи (2.1), (2.2), когда занятая жидкостью область стягивается) побудила множество тонких исследований регуляризованных версий модели (2.1), (2.2), целью которых было понять такие явления, как рост дендритов и развитие двухфазной области при затвердевании расплавов. Морфология областей, которая наблюдается при таких процессах, обладает непредсказуемостью, сходной с имеющей место в турбулентности, и модель (2.1), (2.2) со всей ее математической структурой находится в самом центре научного базиса такой непредсказуемости. Поэтому перейдем к некоторым более детальным замечаниям об этой математической структуре.

5. Задачи со свободной границей для течений Хеле-Шоу. Явные решения, полученные методами комплексного переменного. Как уже упоминалась, П.Я. Кочина нашла явное решение знаменитой классической задачи о течении через проницаемую плотину прямоугольного сечения под действием силы тяжести. Это решение – наиболее известный пример метода, разработанного ею для часто встречающегося класса задач со свободной границей для уравнения Лапласа, в котором на каждом отдельном участке границы области течения выполняются два независимых линейных соотношения между независимыми переменными (x, y) и потенциалом $-p$ и функцией тока ψ. Ключевой момент заключается в том, что, когда физическая плоскость и плоскость комплексного потенциала конформно отображаются на вспомогательную полуплоскость, решение возникающей задачи Римана–Гильберта можно выразить через P-функции Римана. Эта связь между задачами со свободной границей и дифференциальными уравнениями класса Фукса была отличительной чертой работ П.Я. Кочиной на протяжении всей ее деятельности [3]; активные исследования в этой области ведутся и поныне [19].

Гораздо большее влияние, однако, оказал на последующих исследователей метод комплексного переменного, который П.Я. Кочина и Л.А. Галин развили для исследования нестационарных течений Хеле-Шоу в отсутствие силы тяжести. Вновь ключевая идея состоит в отображении физической плоскости $(x + iy)$ и плоскости комплексного потенциала $(-p + i\psi)$ на вспомогательную область, обычно – единичный круг $|\zeta| < 1$. Поскольку действительная часть комплексного потенциала обращается в нуль на свободной границе, одно из этих отображений тривиально, однако отображение $f(\zeta, t)$ области $|\zeta| < 1$на область, занятую жидкостью, приводит к проблеме нахождения однозначного конформного отображения, удовлетворяющего нелинейному граничному условию

$$\Re\left(\frac{1}{\zeta}\frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\overline{\partial f}}{\partial t}\right) = \Re W(\zeta,t) \tag{5.1}$$

В этом условии правая часть представляет собой преобразованное давление, которое, будучи решением уравнения Лапласа в известной области $|\zeta| < 1$, полностью определено внешними условиями, которые порождают движение, и граничным условием $p = 0$ на Г.

Замечательное свойство такой формулировки задачи состоит в том, что для движений, обусловленных простыми движущими механизмами, например источниками или стоками, можно найти точные решения, используя многие простые конформные отображения (полиномиальные, рациональные и логарифмически-полиномиальные функции). При отыскании решений постулируется определенная форма функции $f(\zeta, t)$ (в статье П.Я. Кочиной 1945 г. приведен пример функции $f(\zeta, t) = a_1(t)\zeta + a_2(t)\zeta^2$, отвечающей кардиоиде), и после подстановки в условие (5.1) обеспечивается взаимное уничтожение дополнительных членов, после чего остается ровно столько членов, сколько есть неизвестных коэффициентов. Имеется весьма обширная литература, посвященная решениям этого типа (и во многих случаях выводу заново решений, опубликованных в русской литературе в 1950-е годы); ее можно найти в Интернете по адресу www.maths.ox.ac.uk./~howison/Hele-Shaw/.

6. Моменты области, занятой жидкостью. Течение Хеле-Шоу обладают обманчиво простой геометрической структурой в том отношении, что "моменты" области, занятой жидкостью, изменяются со временем предсказуемым образом [20]. Чтобы убедиться в этом для простого случая, когда течение вызвано уединенным точечным стоком интенсивности Q в начале координат, запишем уравнение для поля давления в форме

$$\Delta p = -Q\delta(x)\delta(y) \text{ в } \Omega(t)$$

Для любой функции $L(z)$, аналитической в области $\Omega(t)$, использование теоремы Грина показывает, что [21, 22]

$$\frac{d}{dt}\int\int_{\Omega(t)} L(z)dxdy = \int_{\Gamma(t)} L(z)\,v_n ds = -\int_{\Gamma(t)} L(z)\frac{\partial p}{\partial n}ds = QL(0)$$

В частности, выбирая в качестве подынтегрального выражения $L(z) = z^k$ при целых положительных k, получаем бесконечное множество моментов $M_k(t)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\frac{d}{dt}M_k(t) \equiv \frac{d}{dt}\int\int_{\Omega(t)} z^k dxdy = Q\delta_{0k} \tag{6.1}$$

Таким образом, все моменты, за исключением нулевого ($k = 0$), равного площади области, которая изменяется со скоростью Q, постоянны. Эти значения для моментов дают решение дифференциальных уравнений, возникающих при подстановке в условие (5.1) выражения для функции f и приравнивании коэффициентов при степенях ζ

Этот результат для моментов в случае одного источника или стока легко обобщается на случай, когда внутри области Ω имеется система источников или стоков [21] или особенности типа мультиполей [23]. Он также непосредственно ведет к связи с задачей определения формы гравитирующего тела в случае двух пространственных переменных. Если определить преобразование Коши области Ω

$$\Theta(z, \bar{z}, t) = \frac{1}{\pi}\int\int_{\Omega} \frac{dx'dy'}{z - z'}$$

то легко видеть, что функция Θ пропорциональна производной по z от гравитационного потенциала, порождаемого равномерным распределением плотности в области Ω. Его представление рядом Лорана при больших $|x|$ имеет вид $M_0/z + M_1/z^2 + \ldots$, и, действительно, этот подход легко использовать для получения мультипольных решений задачи восстановления области по ее моментам [24].

Обобщение проблемы моментов на случай двух жидкостей. Описанная выше задача Хеле-Шоу допускает очевидное обобщение на случай, когда часть ячейки заполнена другой жидкостью ненулевой вязкости, причем свободная граница Γ теперь оказывается границей раздела между двумя жидкостями (задача Маскета). Таким образом, область течения состоит из двух областей Ω_1 и Ω_2, разделенных границей Γ, причем скорость жидкости в области $\Omega_i (i = 1, 2)$ дается выражением $\mathbf{u}_i = -k_i \nabla p$, где k_i – подвижности, обратно пропорциональные вязкостям. Вновь давления p_i гармоничны в областях Ω_i, но граничные условия на свободной границе имеют вид

$$p_1 = p_2, \quad -k_1 \partial p_1 / \partial n = -k_2 \partial p_2 / \partial n = v_n \quad \text{на } \Gamma \tag{6.2}$$

и выражают непрерывность давления и нормальной скорости соответственно.

Первое из этих условий делает задачу гораздо более сложной по сравнению с задачей в случае одной жидкости, поскольку давление на границе Γ уже не является постоянным. В частности, методы комплексного переменного, которые так хорошо работают применительно к более простой задаче, оказываются значительно менее эффективными (краткое обсуждение того, что может быть сделано, см. в [25]), а другие теоретические подходы представляются трудными. Например, описанный выше метод моментов приводит, как будет сейчас показано, к обобщению классической проблемы моментов, которое, по-видимому, ранее не изучалось.

Предположим для определенности, что жидкость 1 занимает односвязную область Ω_1, содержащую точечный источник (или сток) интенсивности Q, расположенный в начале координат, так что жидкость 2 занимает кольцевую область Ω_2, ограниченную изнутри границей раздела Γ между двумя жидкостями, а снаружи – другой границей Γ', причем область, внешняя по отношению к Ω_2, находится при постоянном (нулевом) давлении. (Цель выбора такой конфигурации состоит в том, чтобы избежать трудностей, связанных с бесконечными областями и(или) фиксированными границами.) Таким образом, вдобавок к условиям (6.2), выполняющимся на границе Γ, имеем

$$\Delta p_1 = -Q\delta(x)\delta(y) \text{ в } \Omega_1, \quad \Delta p_2 = 0 \text{ в } \Omega_2 \tag{6.3}$$

$$p_2 = 0, \quad -k_2 \partial p_2 / \partial n' = v_n' \quad \text{на } \Gamma' \tag{6.4}$$

Теперь для функции $L(z)$, аналитической в областях Ω_1 и Ω_2, рассмотрим выражение

$$\tilde{M}(t) = \int\int_{\Omega_1} \frac{L}{k_1} dxdy - \int\int_{\Omega_2} \frac{L}{k_2} dxdy$$

(Смена знака у второго интеграла связана с тем, что нормаль n направлена во внешность области Ω_1 и внутрь Ω_2). Используя граничные условия (6.4) и (6.2) и теорему Грина, получим

$$\tilde{M}(t) = QL(0) + \int_{\Gamma} -p_1 \frac{\partial L}{\partial n} ds + \int_{\Gamma'} p_2 \frac{\partial L}{\partial n} ds' + \int_{\Gamma} p_2 \frac{\partial L}{\partial n} ds = QL(0)$$

Отсюда следует, что обобщенный момент $\tilde{M}(t)$ постоянен, если $L(0) = 0$, и изменяется линейно со временем t, если $L(0) \neq 0$.

7. Преобразование Байокки, функция Шварца и вариационные неравенства. Обострение. В разд. 3 было введено преобразование Байокки $u(x, y, t)$ для давления соотношением (3.1), которое показывает, что выражение (3.1) является решением задачи со свободной границей

$$\nabla^2 u = 1; \quad u = \partial u / \partial n = 0 \quad \text{на } \Gamma$$

(в областях, пересекаемых границей Г, это верно непосредственно, а вне их – в силу аналитического продолжения).

Можно также ввести функцию Шварца [26] для этой свободной границы Г, записав ее уравнение в виде $z = g(z, t)$. Это всегда можно сделать для (кусочно) аналитической кривой, причем функция $g(z, t)$ оказывается аналитичной в окрестности любой гладкой части Г. Поскольку

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 1 \text{ в } \Omega; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \bar{z} - g(z,t) = 0 \text{ на } \Gamma$$

получаем, следуя описанный ранее процедуре [27], с помощью аналитического продолжения, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}(\bar{z} - g(z,t)) \text{ в } \Omega$$

Поскольку также $\partial u/\partial t = p$, видно, что особенности функции u, а следовательно, и $g(z, t)$ внутри области Ω должны либо не меняться со временем, либо быть интегралами по времени от p. Аналогичным образом, следуя описанному ранее подходу [20], можно представить преобразование Коши в форме

$$\Theta(z, \bar{z}, t) = \begin{cases} \Theta_e(z, t) & \text{вне } \Omega \\ z + \Theta_i(z, t) & \text{внутри } \Omega \end{cases}$$

где функции Θ_e и Θ_i аналитичны внутри и вне области Ω соответственно. Действительно, по определению функции $g(z, t)$, имеем $\Theta_e(z, t) - \Theta_i(z, t) = g(z, t)$, откуда ясно, что два изложенных подхода по существу эквивалентны (заметим, однако, что, если занятая жидкостью область многосвязна, применим только подход, основанный на преобразовании Коши [28]).

Если задать дополнительно ограничение $u \geqslant 0$, то, как отмечалось ранее, функция u удовлетворяет корректно сформулированному вариационному неравенству [29]. Коль скоро найдено однопараметрическое семейство его решений при заданных особенностях (или граничных условиях), изменяющихся со временем t, его производная по времени представляет собой давление в течении Хеле-Шоу. И обратно, любое решение задачи об отборе жидкости из ячейки Хеле-Шоу, которое существует до того момента, когда отобрана вся жидкость (или, в случае бесконечной области, при всех t), является производной по времени от решения такой задачи о препятствии для вариационного неравенства [30]. Упомянутое ранее обострение связано с тем, что области отрицательных значений функции $u(x, y, t)$ достигают границы Г, и (за некоторыми исключениями, которые будут обсуждаться ниже) этого не может случиться, пока выполняется ограничение $u \geqslant 0$.

Как уже упоминалось, П.Я. Кочина обнаружила, что в "отступающем" течении Хеле-Шоу без поверхностного натяжения может проявляться обострение за конечное время, знаменитым примером которого служит решение для кардиоиды [4]. Действительно, поскольку любая задача при нулевом поверхностном натяжении обратима по времени, можно строить решения с обострением, если решить задачу о нагнетании жидкости при негладких начальных условиях, а затем обратить последовательность полученных таким образом решений. Такая процедура может обнаружить некоторые неожиданные свойства решений, например наличие "времени запаздывания", когда нагнетание происходит в начальную область с угловой точкой [31]. Исследование таких ситуаций вновь связано с применением преобразования Байокки, причем оно полезно также при анализе допустимости точек возврата на границе области в задачах о нагнетании жидкости [32].

Можно показать [33], что в задаче о препятствии (для преобразования Байокки) на свободной границе могут существовать только степенные, степени $(4n + 1)/2$, особенности решения и никакие иные, и в силу приведенного выше рассуждения такие особенности могут также возникать в некоторый момент на свободной границе в задаче Хеле-Шоу, причем граница остается гладкой до и после этого момента. Пример точки возврата со степенью $5/2$ приведен в [32]. Заметим, что в этих примерах условие $u \geqslant 0$ вблизи точки возврата для преобразования Байокки не нарушается.

Отметим, что в случае задачи Маскета линейный анализ устойчивости плоской границы раздела, по-прежнему, предсказывает катастрофическую неустойчивость, когда подвижность вытесняющей жидкости превосходит подвижность вытесняемой жидкости. Однако неизвестно, как присутствие второй жидкости повлияет на "обострение", которое обычно происходит в задаче для одной жидкости при стягивании. Возможно, что влияние второй жидкости, скажем, на обострение посредством образования точки возврата порядка $3/2$ будет весьма значительным, поскольку такая геометрия может реализоваться в двухжидкостном случае, только если вытесняющая жидкость может быть вытеснена из развивающегося "заострения" достаточно быстро.

8. Экспоненциальные асимптотики. Неустойчивости, внутренне присущие решениям П.Я. Кочиной для течений Хеле-Шоу в стягивающихся областях, послужили новым стимулом в теории асимптотических разложений, и в частности в теории "асимптотик во всех порядках", или "экспоненциальных асимптотик" [34]. Как уже отмечалось, модель Хеле-Шоу служит базовой моделью для изучения тонкого явления роста кристаллов, причем сокращающаяся (соответственно расширяющаяся) область соответствует переохлажденному (соответственно нормальному) расплаву, из которого растет кристалл. В течение долгого времени целью науки о материалах было выяснение термодинамических и механических балансов, которые определяют выбор формы кристалла, причем, как и в упомянутой ранее работе Саффмена и Тейлора [18], возникает проблема "выбора формы решения". Согласно теории [18], в отсутствие эффектов поверхностного натяжения на межфазной границе существует однопараметрическое семейство "языков", продвигающихся в канал, однако их эксперименты и эксперименты многих других исследователей [18, 35] показывают, что при малом поверхностном натяжении реализуется "язык", ширина которого асимптотически стремится к полуширине канала.

Здесь возникает вопрос о поведении системы (2.1), (2.2), когда условие $p = 0$ на свободной границе Γ заменяется регуляризованным условием, например, $p = -\varepsilon v_n$ или $p = \varepsilon\varkappa$, где $\varkappa$ – кривизна контура Γ, взятая с соответствующим знаком, ε – малый положительный параметр. (Преобразование Байокки при ограничении $u \geqslant 0$ и "сглаженные" модели, перечисленные в разд. 3, также могут рассматриваться как регуляризованные модели, но в другом смысле.)

Двадцать лет назад этот вопрос можно было бы считать нерешенной проблемой теории сингулярных возмущений. Например, в задаче Саффмена – Тейлора стандартное разложение по степеням ε не ведет к принципу выбора для определения формы языка и фактически не указывает на то, что влияние регуляризации проявляется в чем-либо, кроме малого возмущения нерегуляризованного решения. Однако новая методология (см. [34], где собраны ранние результаты, и [36] в отношении недавних работ по задаче Саффмена – Тейлора) показала, сколь существенным может оказаться эффект регуляризации, по крайней мере, для стационарных решений или равномерно распространяющихся волн.

Используемая утонченная процедура состоит в том, что задача сперва переформулируется как смешанная краевая задача для полупространства, а затем как нелинейное интегродифференциальное уравнение для углового коэффициента границы Γ. После этого независимая переменная s продолжается в комплексную плоскость, и проводится разложение Вентцеля – Крамера – Бриллюэна (ВКБ) по малому параметру ε для нахождения линий Стокса решения как функции s; эти линии возникают на особенностях нерегуляризованного решения. (Было показано [36], что структура решений вблизи этих сингулярностей сама по себе может быть использована для отыскания условия разрешимости задачи.) Наконец, как допустимые рассматриваются только такие решения, для которых поведение линий Стокса таково, что можно удовлетворить соответствующим граничным условиям и условиям симметрии; именно так обстоит дело, когда параметр регуляризации ε принимает одно из дискретного набора значений. Для задачи Саффмена – Тейлора это означает, что имеется счетное бесконечное множество значений ширины языка, сходящихся к предельному значению $1/2$ при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, выявляется еще один аспект взаимосвязи между результатами П.Я. Кочиной и теорией функций комплексного переменного. Это – другая история, и она далека от завершения, поскольку не существует общепринятой теории экспоненциальных асимптотик для эволюционных задач, особенно для тех, в которых обострение развивается за конечное время t^*. Еще идут споры о том, могут или нет регуляризованные решения дать полезную информацию для времен, меньших t^*. В одной из теорий [37] предполагается, что из сингулярностей аналитического продолжения нерегуляризованной задачи могут возникать "дочерние сингулярности", которые распространяются таким образом, что в результате регуляризованное решение отличается от нерегуляризованного на величину $O(1)$ для времен $O(1)$ до достижения момента времени t^*, в [38] приведены свидетельства в пользу этого, полученные численно.

Работа доложена на Международной конференции "Современная теория фильтрации", посвященной памяти П.Я. Кочиной (сентябрь 1999 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hele-Shaw H.S.* The flow of water // Nature. 1898. V. 58. № 1488. P. 33–36.
2. *Thompson B.W.* Secondary flow in a Hele-Shaw cell // J. Fluid Mech. 1968. V. 31. Pt. 2. P. 379–395.
3. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Гидродинамика и теория фильтрации: Избр. тр., М.: Изд-во АН СССР, 1991. 352 с.
4. *Полубаринова-Кочина П.Я.* К вопросу о движении контура нефтеносности // Докл. АН СССР. 1945. Т. 47. № 4. С. 254–257.
5. *Muskat M.* The flow of homogeneous fluids through porous media. N.Y.: McGraw-Hill, 1937. 763 p.
6. *Галин Л.А.* Неустановившаяся фильтрация со свободной границей // Докл. Акад. наук СССР. 1945. Т. 47. № 4. С. 246–249.
7. *Kurz W., Fisher D.J.* Fundamentals of Solidification. Aedermannsdorf, Switzerland: Trans Tech. Publ., 1986. 242 p.
8. *King J.R.* The isolation oxidation of silicon // SIAM J. Appl. Math. 1989. V. 49. № 1. P. 263–260.
9. *Andrews J.G., Atthey D.R.* On the motion of an intensely heated evaporating boundary // J. Inst. Math. and Appl. 1975. V. 15. № 1. P. 59–72.
10. *McGeough J.A., Rasmussen H.* On the derivation of the quasi-steady model in electrochemical machining // J. Inst. Math. and Appl. 1974. V. 13. № 1. P. 13–21.
11. *Please C.P., Pettet G., McElwain D.L.S.* A new approach to modelling the formation of necrotic regions in tumours // Appl. Math. Lett. 1998. V. 11. № 3. P. 89–94.
12. *Wilmott P., Howison S.D., Dewynne J.* The Mathematics of Financial Derivatives: a Student Introduction. Cambridge: Univer. Press, 1996. 317 p.
13. *Baiocchi C., Capelo A.* Variational and Quasivariational Inequalities: Applications to Free Boundary Problems. Chichester: Wiley, 1984. 452 p.
14. *Newman W.I., Sagan C.*, Galactic civilization – population dynamics and interstellar diffusion // Icarus. 1981. V. 46. № 4. P. 293–327.
15. *Caginalp G., Chen X.* Convergence of the phase-field model to its sharp interface limits // Euro. J. Appl. Math. 1998. V. 9. № 4. P. 417–445.

16. *Elliott C.M., Herrero M.A., King J.R., Ockendon J.R.* The mesa problem: diffusion patterns for $u_t = \nabla \cdot (u^m \nabla u)\, as m \to \infty$ // IMA J. Appl. Math. 1986. V. 37. № 2. P. 147–154.
17. *Hill S.* Channeling in packed columns // Chem. Eng. Sci. 1952. V. 19. № 6. P. 247–253.
18. *Saffman P.G., Taylor G.I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A 1958. V. 245. № 1242. P. 312–329.
19. *Craster R.V., Hoang V.H.* Applicationd of Fuchsian differential equations to free boundary problems // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A 1998. V. 454. N1972. P. 1241–1252.
20. *Richardson S.* Hele-Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel // J. Fluid Mech. 1972. V. 56. Pt. 4. P. 609–618.
21. *Richardson S.* Some Hele-Shaw flows with time-dependent free boundaries // J. Fluid Mech. 1981. V. 102. P. 263–278.
22. *Richardson S.* Hele-Shaw flows with time-dependent free boundaries involving injection through slits // Stud. Appl. Math. 1992. V. 87. № 2. P. 175–194.
23. *Entov V.M., Etingof P.I., Kleinbock D.Ya.* Hele-Shaw flows with a free boundary produced by multipoles // Europ. J. Appl. Math. 1993. V. 4. № 2, P. 97–120.
24. *Varchenko A.N., Etingof P.I.* Why the Boundary of a Round Drop Becomes a Curve of Order Four. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1992. 388 p.
25. *Howison S.D.* A note on the two-phase Hele-Shaw problem // J. Fluid Mech. 2000. V. 409. P. 243–249.
26. *Davis P.J.* The Schwarz Function and its Applications. Washington: Math. Assoc. of America, 1974. 228 p.
27. *Lacey A.A.* Moving boundary problems in the flow of liquid through porous media // J. Austral. Math. Soc. 1982. V. B24. № 2. P. 171–193.
28. *Richardson S.* Hele-Shaw flows with time-dependent free boundaries in which the fluid occupies a multiply-connected region // Europ. J. Appl. Math. 1994. V. 5. № 2. P. 97–122.
29. *Elliott C.M., Janovsky V.* A variational inequality approach to Hele-Shaw flow with a moving boundary // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A. Mathematics. V. 88. № 1–2. P. 93–107.
30. *Di Benedetto E., Friedman A.* The ill-posed Hele-Shaw model and the Stefan problem for supercooled water // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 282. № 1. P. 183–204.
31. *King J.R., Lacey A.A., Vazquez J.L.* Persistence of corners in free boundaries in Hele-Shaw flow // Europ. J. Appl. Math. 1995. V. 6. № 5. P. 455–490.
32. *Howison S.D.* Cusp development in Hele-Shaw flow with a free surface // SIAM J. Appl. Math. 1986. V. 46. № 1. P. 20–26.
33. *Schaeffer D.G.* Some examples of singularities in a free boundary // Ann. Scuol. Norm. Sup. Pisa. 1977. Cl. Sci. V. 4. № 1. P. 133–144.
34. Asymptotics Beyond all Orders Eds. H. Segur et al. N.Y.: Plenum Press, 1991. 388 p.
35. *Saffman P.G.* Viscous fingering in Hele-Shaw cells // J. Fluid Mech. 1986. V. 173. P. 73–94.
36. *Chapman S.J.* On the role of Stokes lines in the selection of Saffman – Taylor fingers with small surface tension // Europ. J. Appl. Math. 1999. V. 10. № 6. P. 513–534.
37. *Tanveer S.* Surprises in viscous fingering // J. Fluid Mech. 2000. V. 409. P. 273–308.
38. *Ceniceros H.D., Hou T.Y., Si H.* Numerical study of Hele-Shaw flow with suction // Phys. Fluids. 1999. V. 11. № 9. P. 2471–2486.

Оксфорд (Великобритания)
e-mail: ejam@maths.ox.ac.uk

Поступила в редакцию
7.II.2000