ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 66. Вып. 3, 2002

УДК 539.375

© 2002 г. И.И. Аргатов, С.А. Назаров

ВЫСВОБОЖДЕНИЕ ЭНЕРГИИ ПРИ ИЗЛОМЕ ТРЕЩИНЫ В ПЛОСКОМ АНИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ

Исследуется задача о деформации однородного упругого анизотропного тела с прямолинейным краевым разрезом, имеющим малый отросток достаточно произвольной формы Υ_τ. Асимптотическое решение данной задачи для малых значений безразмерного параметра τ, характеризующего размер отростка, строится при помощи модифицированного метода сращиваемых асимптотических разложений. Величина высвобождающейся упругой энергии выражается через набор коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в вершине невозмущенной трещины, интегральные характеристики отростка Υ_τ (компоненты расширенной матрицы высвобождения энергии) и интегральные характеристики исходного тела (КИН весовых функций). В случае изотропного тела проводится сопоставление с известными результатами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим однородное анизотропное упругое тело Ω_0, имеющее краевой прямолинейный разрез Ξ_0. Предположим, что в условиях плоской деформации тело нагружено на внешней границе Γ. Вектор перемещений $\mathbf{u}^0 = (u_1^0,\ u_2^0)$ удовлетворяет задаче

$$L(\nabla_x)\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega_0 \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{u}^0; \mathbf{x}) = \mathbf{p}^0(\mathbf{x}), \ \ \mathbf{x} \in \Gamma; \ \ \boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{u}^0; \mathbf{x}) = 0, \ \ \mathbf{x} \in \Xi_0^+ \cup \Xi_0^- \tag{1.2}$$

Здесь $L(\nabla_x)$ – оператор Ламе (анизотропный), $\boldsymbol{\sigma}^{(n)}$ – вектор напряжений на площадке с единичной нормалью $\mathbf{n}$, внешней по отношению к Ω_0; Ξ_0^+ и Ξ_0^- – верхний и нижний берега разреза Ξ_0. Нагрузка $\mathbf{p}^0$ предполагается самоуравновешенной, т.е.

$$\int_\Gamma p_k^0(\mathbf{x})ds_x = 0, \quad k = 1, 2, \quad \int_\Gamma [x_1 p_2^0(\mathbf{x}) - x_2 p_1^0(\mathbf{x})]ds_x = 0 \tag{1.3}$$

Пусть l – наименьшее расстояние от вершины O трещины Ξ_0 до границы Γ. Обозначим τ малый положительный параметр и определим приращение Υ_τ трещины. Введем "растянутые" координаты

$$\boldsymbol{\xi} = \tau^{-1}\mathbf{x}$$

На плоскости переменных $(\xi_1,\ \xi_2)$ выпустим из начала координат кусочно гладкую простую дугу Υ, накрываемую кругом с диаметром l. Дуга Υ_τ получается сжатием Υ в τ^{-1} раз, т.е.

$$\Upsilon_\tau = \{(x_1, x_2)\colon\ \tau^{-1}(x_1, x_2) \in \Upsilon\}$$

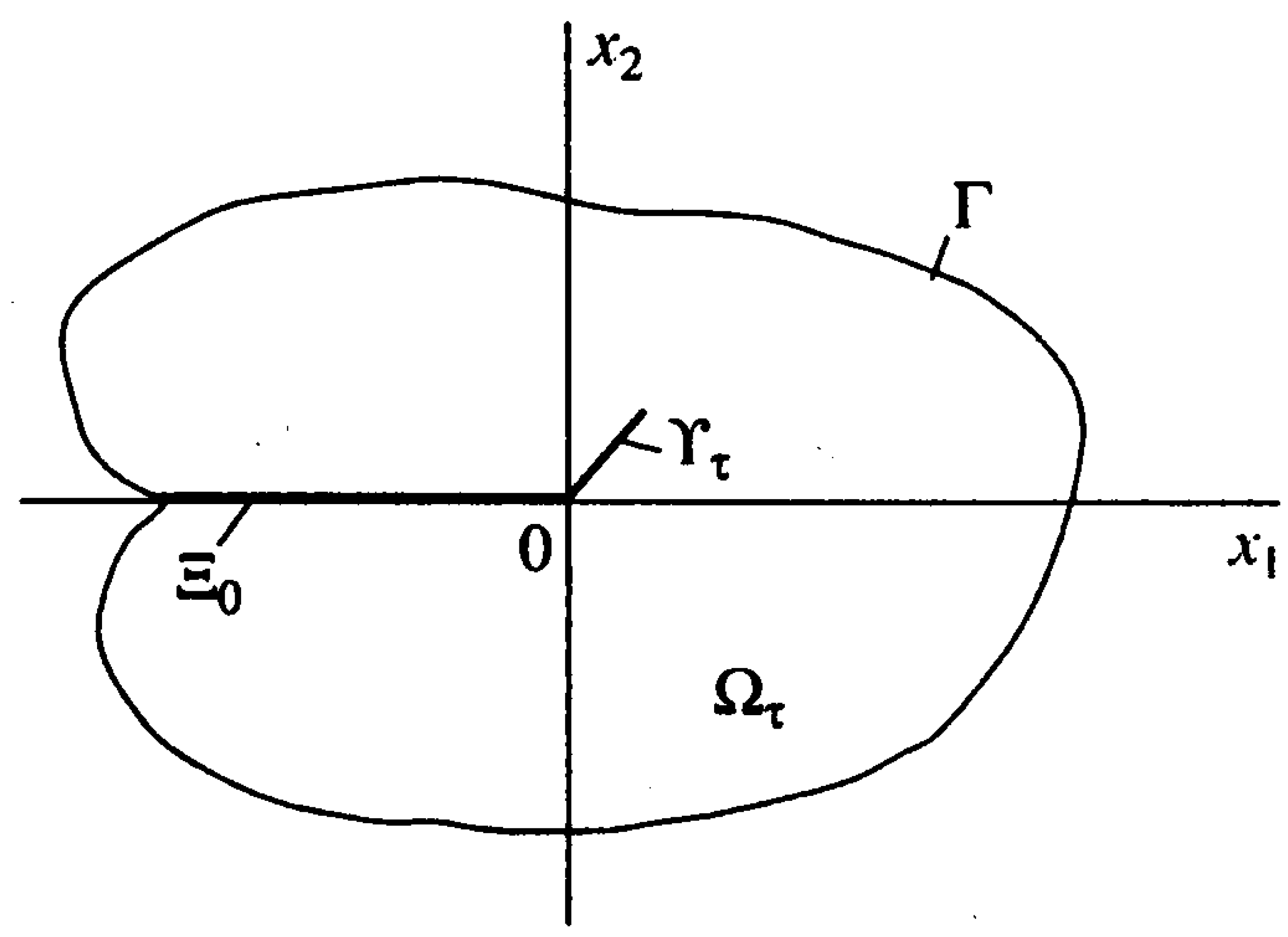
Наконец, удалив из Ω_0 малое множество Υ_τ, получим область Ω_τ с увеличенным и, вообще говоря, изломившимся разрезом Ξ_τ (фигура).

Вектор перемещений $\mathbf{u}^\tau$ точек тела Ω_τ удовлетворяет соотношениям

$$L(\nabla_x)\mathbf{u}^\tau(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_\tau \tag{1.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{u}^\tau; \mathbf{x}) = \mathbf{p}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{u}^\tau; \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Xi_\tau^+ \cup \Xi_\tau^-$$



По теореме Клапейрона потенциальная упругая энергия деформации тела Ω_τ определяется формулой (точка обозначает скалярное произведение)

$$U(\Omega_\tau; \mathbf{u}^\tau) = -\frac{1}{2}\int_\Gamma \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^\tau(\mathbf{x}) ds_x \tag{1.6}$$

Исследуем поведение решения задачи (1.4), (1.5) и функционала (1.6) при малых значениях параметра τ.

Было получено ([1, 2] и др.) численное решение задачи об изломе первоначально прямолинейной трещины в анизотропной упругой плоскости. В предположении незначительного отклонения отростка методом малого параметра [3, 4] найдено [5] приближенное решение. В изотропном случае асимптотические формулы для КИН выводились также в работах [6, 7] и др. Строилась ([8, 9] и др.) асимптотика высвобождения энергии. Рассматривалась [10, 11] задача об изломе трещины в упругом теле конечных размеров. Наиболее полные результаты были получены в работах [11, 12].

В настоящей работе форма отростка Υ_τ не ограничивается какими-либо предположениями. Основной результат работы – полное асимптотическое разложение энергии (1.6) по параметру τ.

2. Базис степенных решений задачи о полубесконечной трещине. Асимптотическое представление вектора $\mathbf{u}^0(x)$ при $r = |\mathbf{x}| \to 0$ формируется из степенных решений $r^\Lambda \boldsymbol{\Phi}(\varphi, \ln r)$, в некоторых Λ – комплексное число, $\varphi \in (-\pi, \pi)$ – полярный угол, а $\boldsymbol{\Phi}$ – полином переменной $\ln r$ с гладкими по φ коэффициентами. Как было установлено [13] (впрочем, для частных случаев анизотропии эти факты известны давно), показатель Λ – целый или полуцелый, а $\ln r$ появляется только при $\Lambda = 0$.

В соответствии с механической интерпретацией упомянутые решения принято разбивать на четыре группы. К первой относятся решения

$$\mathbf{X}^{j,2m+1}(r, \varphi) = r^{m+1/2}\boldsymbol{\Phi}^{j,2m+1}(\varphi), \quad j = 1, 2; \quad m = 0, 1, \ldots \tag{2.1}$$

обладающие конечной упругой энергией в любом круге и порождающие в вершине трещины особенности напряжений или их производных. Векторы (2.1) удовлетворяют следующим условиям нормировки на продолжении трещины:

$$\sigma_{i2}(\mathbf{X}^{j,2m+1}; x_1, 0) = (2\pi)^{-1/2} r^{m-1/2}\delta_{3-i,j}, \quad x_1 > 0, \ i = 1, 2 \tag{2.2}$$

Вторая группа содержит однородные полиномы переменных x_1 и x_2

$$\mathbf{X}^{j,2m}(r, \varphi) = r^m \boldsymbol{\Phi}^{j,2m}(\varphi), \quad j = 1, 2; \quad m = 0, 1, \ldots \tag{2.3}$$

Векторы $\mathbf{X}^{1,0} = \mathbf{e}^1$, $\mathbf{X}^{2,0} = \mathbf{e}^2$ и $\mathbf{X}^{2,2}(r, \varphi) = x_1\mathbf{e}^2 - x_2\mathbf{e}^1$ соответствуют поступательным смещениям и повороту. Другие полиномиальные решения (2.3) можно подчинить таким условиям нормировки:

$$\begin{gathered} \sigma_{11}(\mathbf{X}^{j,2m}; x_1, 0) = r^{m-1}\delta_{1,j}, \quad x_1 > 0, \quad m = 1, 2, \ldots \\ \partial_2\sigma_{11}(\mathbf{X}^{j,2m}; x_1, 0) = -(m-1)r^{m-2}\delta_{2,j}, \quad x_1 > 0, \quad m = 2, 3, \ldots \end{gathered} \tag{2.4}$$

Здесь и далее применяются упрощенные обозначения производных $\partial_j = \partial/\partial x_j$; $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Оставшиеся решения имеют сингулярности, и для них интеграл энергии расходится в вершине разреза. Так, в третью и четвертую группы входят векторы

$$\mathbf{Y}^{j,2m+1}(r,\varphi) = r^{-m-1/2}\mathbf{\Psi}^{j,2m+1}(\varphi), \quad j=1,2; \quad m=0,1,\dots \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{Y}^{j,0}(r,\varphi) = \mathbf{\psi}^{j,0}(\varphi)\ln r + \mathbf{\Psi}^{j,0}(\varphi), \quad j=1,2 \\ \mathbf{Y}^{j,2m}(r,\varphi) = r^{-m}\mathbf{\Psi}^{j,2m}(\varphi), \quad j=1,2; \quad m=1,2,\dots\end{gathered} \tag{2.6}$$

Заметим, что решения $\mathbf{Y}^{1,0}$, $\mathbf{Y}^{2,0}$ и $\mathbf{Y}^{2,2}$, парные с $\mathbf{X}^{1,0}$, $\mathbf{X}^{2,0}$ и $\mathbf{X}^{2,2}$, порождают силы и моменты, сосредоточенные в вершине трещины. Неэнергетические решения (2.5) и (2.6) нормируем [14] условиями

$$q(\mathbf{X}^{j,k},\ \mathbf{Y}^{i,n};\ \gamma) = \delta_{i,j}\delta_{n,k} \tag{2.7}$$

$$q(\mathbf{u},\mathbf{v};\gamma) = \int\limits_{\gamma}[\boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{u};\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{v};\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x})]ds_x$$

Здесь γ – произвольная дуга, охватывающая вершину, т.е. имеющая концы на противоположных берегах полубесконечной трещины. В силу тождества Бетти левая часть равенства (2.7) не зависит от γ.

Замечание 1. Для изотропного материала угловые части $\mathbf{\Phi}^{\cdots}$ и $\mathbf{\Psi}^{\cdots}$ были указаны [14] при соблюдении нормировок (2.2) и (2.7), но изменении нормировки (2.4). В случае общей анизотропии была проверена [15] возможность подчинить степенные решения требованиям (2.2) и (2.7).

Убедимся в том, что полиномиальные решения (2.3) допускают нормировку (2.4). Если это не так, то при некотором m найдется полиномиальное решение $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = r^m\mathbf{\Phi}(\varphi)$, для которого

$$\sigma_{11}(\mathbf{X};x_1,0)=0, \quad \partial_2\sigma_{11}(\mathbf{X};x_1,0)=0, \quad x_1>0 \tag{2.8}$$

Для полиномов равенства (2.8) распространяются на все значения x_1. Аналогично краевые условия на берегах полубесконечного разреза

$$\sigma_{12}(\mathbf{X};x_1,0)=0, \quad \sigma_{22}(\mathbf{X};x_1,0)=0, \quad x_1<0 \tag{2.9}$$

также переносятся на всю ось абсцисс.

Соотношения (2.8) и (2.9) можно дифференцировать по x_1. Поэтому из уравнений равновесия, выполняющихся для полиномов на всей плоскости,

$$\partial_2\sigma_{21}(\mathbf{X};\mathbf{x}) = -\partial_1\sigma_{11}(\mathbf{X};\mathbf{x}) = 0, \quad \partial_2\sigma_{22}(\mathbf{X};\mathbf{x}) = -\partial_1\sigma_{12}(\mathbf{X};\mathbf{x}) \tag{2.10}$$

выводим сначала формулы $\partial_2\sigma_{2i}(\mathbf{X};\ x_1,0) = 0$ ($i = 1, 2$), а затем, дифференцируя уравнения (2.10) по x_2, и формулы $\partial_2^2\sigma_{2i}(\mathbf{X};x_1,0)=0$, $\partial_2^3\sigma_{22}(\mathbf{X};x_1,0)=0$. Итак, при некотором $n \geqslant 2$

$$\sigma_{11}(\mathbf{X};\mathbf{x}) = x_2^n P_{11}(\mathbf{x}), \quad \sigma_{12}(\mathbf{X};\mathbf{x}) = x_2^{n+1}P_{12}(\mathbf{x}), \quad \sigma_{22}(\mathbf{X};\mathbf{x}) = x_2^{n+2}P_{22}(\mathbf{x}) \tag{2.11}$$

Степень полинома P_{ij} равна $m-n-i-j+2$. Считаем, что число n взято в равенствах (2.11) максимально возможным, а значит, коэффициент c при x_1^{m-n} в полиноме P_{11} отличен от нуля. В самом деле, если $c = 0$, то

$$\partial_2^k\sigma_{11}(\mathbf{X};x_1,0)=0, \quad \partial_2^k\sigma_{12}(\mathbf{X};x_1,0)=0, \quad \partial_2^{k+1}\sigma_{22}(\mathbf{X};x_1,0)=0, \quad k=0,\dots,n$$

и при помощи уравнений (2.10) обнаруживаем, что $\partial_2^{n+1}\sigma_{12}(\mathbf{X};x_1,0) = \partial_2^{n+2}\sigma_{22}(\mathbf{X};x_1)$, т.е. повышаем n на единицу. Положим $C = c(m-n)!$ и получим

$$\sigma_{11}(\partial_1^{m-n}\mathbf{X};\mathbf{x}) = Cx_2^n, \quad \sigma_{12}(\partial_1^{m-n}\mathbf{X};\mathbf{x}) = \sigma_{22}(\partial_1^{m-n}\mathbf{X};\mathbf{x}) = 0$$

Деформации $\varepsilon_{ik}(\partial_1^{m-n}\mathbf{X};\mathbf{x})$ удовлетворяют уравнению совместности

$$0=\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial x_1^2}-2\frac{\partial^2\varepsilon_{12}}{\partial x_1\partial x_2}=Ca_{11}n(n-1)x_2^{n-2}$$

лишь в случае $C=c=0$, так как $n\geqslant 2$ и a_{11} – ненулевой диагональный элемент матрицы податливости. Нужное противоречие найдено.

Асимптотика решения задачи (1.1), (1.2) в окрестности вершины трещины может быть записана так:

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x})=\sum_{(j,n)}c_{j,n}^0\mathbf{X}^{j,n}(r,\varphi)+O(r^{(N+1)/2}),\quad r\to 0 \tag{2.12}$$

В соотношении (2.12) можно взять любое натуральное N – зафиксируем его для дальнейшего; суммирование должно производиться по $j=1, 2$, $n=1, \ldots, N$. Благодаря тому, что коэффициенты $c_{1,0}^0$, $c_{2,0}^0$ и $c_{2,2}^0$ при жестких смещениях произвольны, их можно взять нулевыми и сократить суммирование, исключив соответствующие пары индексов. Далее удобно пользоваться этим кратким обозначением. Коэффициенты $c_{1,1}^0$ и $c_{2,1}^0$ являются коэффициентами интенсивности напряжений (КИН) K_1^0 и K_2^0.

Замечание 2. Нормировка (2.2) согласована с определением КИН, используемым в силовых критериях, и поэтому введенный базис степенных решений следует назвать "силовым". В деформационных критериях возникает понятие раскрытия трещины, и поэтому "деформационный" базис связывается с такими условиями нормировки:

$$[X_\varphi^{j,2m+1}]=-r^{m+1/2}\delta_{1,j},\quad [X_r^{j,2m+1}]=-r^{m+1/2}\delta_{2,j} \tag{2.13}$$

$$X_r^{j,2m}(r,0)=r^m\delta_{1,j},\quad X_\varphi^{j,2m}(r,0)=r^m\delta_{j,2} \tag{2.14}$$

($[X]=X(r,+\pi)-X(r,-\pi)$ – скачок функции X на берегах трещины).

Отметим, что ранее [14] соотношение (2.14) использовалось вместо (2.4).

Возможность соблюсти нормировки (2.13) и (2.14) доказывается от противного. Например, отрицая возможность удовлетворить требованиям (2.13), находим степенное решение $\mathbf{X}(\mathbf{x})=r^{m+1/2}\mathbf{\Phi}^m(\varphi)$, для которого $[X_i]=0$ ($i=1, 2$). Поскольку $[\sigma_{2i}(\mathbf{X})]=0$ ввиду краевых условий на берегах разреза, вектор $\mathbf{X}$ удовлетворяет однородным уравнениям равновесия всюду на плоскости, за исключением вершины разреза. Следовательно, у него показатель Λ должен быть целым, а не полуцелым $m+1/2$.

3. Дифференцирование вдоль трещины. Так как $L(\nabla_x)$ – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами (упругий материал однородный), то всякое степенное решение $U(x)=r^\Lambda\mathbf{\Phi}(\varphi)$, отличающееся от постоянного, после применения дифференцирования $\partial/\partial x_1$ остается степенным решением, но имеет показатель $\Lambda-1$. Нетрудно убедиться, что векторы (2.1), (2.3) связаны равенствами

$$\partial_1\mathbf{X}^{j,n+2}(r,\varphi)=\frac{n}{2}\mathbf{X}^{j,n}(r,\varphi),\quad n=0,1,2,\ldots \tag{3.1}$$

Отметим, что множитель $m-1$ во втором соотношении (2.4) поставлен именно для соблюдения зависимости (3.1).

Для степенных решений $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ проверена [16] формула

$$q(\partial_1\mathbf{U},\mathbf{V};\gamma)=-q(\mathbf{U},\partial_1\mathbf{V};\gamma) \tag{3.2}$$

Из равенства (3.1), (3.2) при учете условий (2.7) вытекает соотношение

$$\partial_1\mathbf{Y}^{j,n}(r,\varphi)=-\frac{n}{2}\mathbf{Y}^{j,n+2}(r,\varphi),\quad n=0,1,2,\ldots \tag{3.3}$$

Таким образом, для построения базисных векторов (2.1) и (2.5) достаточно вычислить угловые части $\mathbf{\Phi}^{j,1}$ и $\mathbf{\Psi}^{j,1}$ и соблюсти условия нормировки (2.2) и (2.7). Остальные векторы (2.1) и (2.5) для $m = 1, 2, \ldots$ отыскиваются согласно равенствам (3.1) и (3.3). Кроме того, справедливо разложение

$$-\partial_1 \mathbf{X}^{j,1}(r,\varphi) = \alpha_{j1}\mathbf{Y}^{1,1}(r,\varphi) + \alpha_{j2}\mathbf{Y}^{2,1}(r,\varphi), \quad j = 1, 2 \tag{3.4}$$

Коэффициенты α_{jk} определяются через упругие постоянные по формуле

$$\alpha_{jk} = -q(\mathbf{X}^{k,1},\ \partial_1\mathbf{X}^{j,1}), \quad j, k = 1, 2 \tag{3.5}$$

При этом матрица $\boldsymbol{\alpha} = \|\alpha_{jk}\|$ оказывается симметрической (см. (3.2)) и положительно определенной (см. [15]). Величины α_{jk} зависят от ориентации трещины по отношению к осям анизотропии. Положим $\alpha_0 = (\alpha_{11} + \alpha_{22})/2$.

Была установлена [16] связь формы q из условий (2.7) с инвариантным интегралом Черепанова – Райса

$$J(\mathbf{u}^0;\gamma) = -\frac{1}{2}q(\mathbf{u}^0, \partial_1\mathbf{u}^0;\gamma) \tag{3.6}$$

$$J(\mathbf{u};\gamma) = \int\limits_{\gamma} [W(\mathbf{u};\mathbf{x})\cos(\mathbf{n}, x_1) - \boldsymbol{\sigma}^{(n)}(\mathbf{u};\mathbf{x})\cdot\partial_1\mathbf{u}(\mathbf{x})]ds_x$$

Здесь $W(\mathbf{u};\mathbf{x})$ – плотность упругой энергии, отвечающая полю перемещений $\mathbf{u}$. Таким образом, согласно соотношениям (2.7), (3.4) – (3.6) и (2.12) имеем

$$J(\mathbf{u}^0;\gamma) = \frac{1}{2}[\alpha_{11}(K_1^0)^2 + 2\alpha_{12}K_1^0K_2^0 + \alpha_{22}(K_2^0)^2] \tag{3.7}$$

4. Весовые функции. Пары индексов (j, n), отличающиеся от (1, 0), (2, 0) и (2, 2), называем разрешенными. Следуя известному подходу [17, 18], для разрешенных пар индексов введем весовые функции, т.е. неэнергетические решения однородной задачи (1.1), (1.2) с сингулярностями в вершине разреза,

$$\boldsymbol{\zeta}^{j,n}(\mathbf{x}) = \mathbf{Y}^{j,n}(r,\varphi) + O(1), \quad r \to 0 \tag{4.1}$$

Условия нормировки (2.7) обеспечивают [18, 16] интегральные представления для коэффициентов разложения (2.12)

$$c_{j,n}^0 = \int\limits_{\Gamma_\sigma} \mathbf{p}^0(\mathbf{x})\cdot\boldsymbol{\zeta}^{j,n}(\mathbf{x})ds_x \tag{4.2}$$

Асимптотическая формула (4.1) допускает уточнение

$$\boldsymbol{\zeta}^{j,n}(\mathbf{x}) = \mathbf{Y}^{j,n}(r,\varphi) + \sum_{(i,p)} m_{i,p}^{j,n}\mathbf{X}^{i,p}(r,\varphi) + O(r^{(N+1)/2}), \quad r \to 0 \tag{4.3}$$

При этом, как и в разд. 2, считаем, что $m_{1,0}^{j,n} = m_{2,0}^{j,n} = m_{2,2}^{j,n} = 0$, т.е. суммирование ведется по разрешенным парам (i, p). Из коэффициентов $m_{i,p}^{j,n}$ составим матрицу КИН весовых функций $m = \|m_{i,p}^{j,n}\|$ размером $(2N - 1) \times (2N - 1)$, согласовывая нумерацию строк и столбцов следующим образом:

$$\begin{Vmatrix}
m_{1,1}^{1,1} & m_{2,1}^{1,1} & m_{1,2}^{1,1} & m_{1,3}^{1,1} & m_{2,3}^{1,1} & \cdots & m_{1,N}^{1,1} & m_{2,N}^{1,1} \\
m_{1,1}^{2,1} & m_{2,1}^{2,1} & m_{1,2}^{2,1} & m_{1,3}^{2,1} & m_{2,3}^{2,1} & \cdots & m_{1,N}^{2,1} & m_{2,N}^{2,1} \\
m_{1,1}^{1,2} & m_{2,1}^{1,2} & m_{1,2}^{1,2} & m_{1,3}^{1,2} & m_{2,3}^{1,2} & \cdots & m_{1,N}^{1,2} & m_{2,N}^{1,2} \\
m_{1,1}^{1,3} & m_{2,1}^{1,3} & m_{1,2}^{1,3} & m_{1,3}^{1,3} & m_{2,3}^{1,3} & \cdots & m_{1,N}^{1,3} & m_{2,N}^{1,3} \\
m_{1,1}^{2,3} & m_{2,1}^{2,3} & m_{1,2}^{2,3} & m_{1,3}^{2,3} & m_{2,3}^{2,3} & \cdots & m_{1,N}^{2,3} & m_{2,N}^{2,3} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
m_{1,1}^{1,N} & m_{2,1}^{1,N} & m_{1,2}^{1,N} & m_{1,3}^{1,N} & m_{2,3}^{1,N} & \cdots & m_{1,N}^{1,N} & m_{2,N}^{1,N} \\
m_{1,1}^{2,N} & m_{2,1}^{2,N} & m_{1,2}^{2,N} & m_{1,3}^{2,N} & m_{2,3}^{2,N} & \cdots & m_{1,N}^{2,N} & m_{2,N}^{2,N}
\end{Vmatrix} \tag{4.4}$$

Применением формулы Грина к функциям $\zeta^{j,n}$ и $\zeta^{i,p}$ в области Ω_0, из которой удален круг радиусом ε, вместе с предельным переходом $\varepsilon \to 0$ устанавливается симметричность и положительная определенность матрицы m (см. [14], § 1.5). Коэффициенты $m_{i,p}^{j,n}$ определяются исключительно геометрией области Ω_0 и зависят от упругих постоянных, но не от приложенной нагрузки $\mathbf{p}^0$. Если L – размерность длины, то размерность величины $\alpha_0 m_{i,p}^{j,n}$ равна $L^{-(p+n)/2}$.

5. Матрица высвобождения энергии. Перейдем на плоскость растянутых координат и в области $G = \mathbf{R}^2 \setminus (\Lambda_0 \cup \Upsilon)$, где Λ_0 – луч $\{\xi\colon \xi_1 \leqslant 0,\ \xi_2 = 0\}$, рассмотрим упругую задачу

$$L(\nabla_\xi)\mathbf{w}(\xi) = 0, \quad \xi \in G; \quad \sigma^{(n)}(\mathbf{w}; \xi) = 0, \quad \xi \in \partial G \tag{5.1}$$

Здесь ∂G – граница области G, состоящая из берегов разреза $\Lambda_0^+ \cup \Upsilon^+$ и $\Lambda_0^- \cup \Upsilon^-$.

Как и ранее [14], обозначим $\boldsymbol{\eta}^{j,n}$ специальные решения однородной задачи (5.1), растущие на бесконечности как $\mathbf{X}^{j,n}(\rho, \varphi) = \rho^{n/2}\boldsymbol{\Phi}^{j,n}(\varphi)$, где $\rho = \varepsilon^{-1} r$ "растянутый" полярный радиус. При $\rho \to \infty$ справедливо разложение

$$\boldsymbol{\eta}^{j,n}(\xi) = \mathbf{X}^{j,n}(\rho, \varphi) + \sum_{(i,p)} M_{i,p}^{j,n}\mathbf{Y}^{i,p}(\rho, \varphi) + O(\rho^{-(N+1)/2}) \tag{5.2}$$

Введем матрицу $M = \left\| M_{i,p}^{j,n} \right\|$ размером $(2N - 1) \times (2N - 1)$, упорядочив в ней коэффициенты разложения (5.2) аналогично (4.4). Было установлено [14], что матрица M – симметрическая и неотрицательно определенная (положительно определенная, если, например, Υ не является отрезком, продолжающим луч Λ_0). Коэффициенты $M_{i,p}^{j,n}$ зависят от упругих постоянных и определяются формой и размером отростка Υ. Размерность величины $\alpha_0^{-1} M_{i,p}^{j,n}$ равна $L^{(n+p)/2}$.

Замечание 3. Если Υ – отрезок, продолжающий разрез Λ_0, то при четном n решение (5.2) совпадает с полиномом $\mathbf{X}^{j,n}$ а значит, нулевыми оказываются строки и столбцы в матрице M, отвечающие парам (j, n) с четными n (при этом M – лишь неотрицательно определенная матрица). Оставшиеся (2×2) – клетки с элементами $M_{q,2p+1}^{i,2m+1}$ $(i, q = 1, 2)$ обозначим M_{2p+1}^{2m+1} и выведем для них рекуррентные формулы, используя прием, предложенный ранее [19]. Именно, представим решение $\boldsymbol{\eta}^{j,2m+1}$ как линейную комбинацию степенных решений

$$\mathbf{h}^{j,2k+1}(\rho, \varphi) = \mathbf{X}^{j,2k+1}(\rho_l, \varphi_l), \quad k = 0, \ldots, m \tag{5.3}$$

отнесенных к полярным координатам ρ_l и $\varphi_l \in (-\pi, \pi)$ с центром в вершине разреза $\Lambda_0 \cup \Upsilon$. Положим

$$S(\mathbf{h}^{\ldots,2m+1}) = \sqrt{2\pi}\begin{Vmatrix} \sigma_{22}(\mathbf{h}^{1,2m+1}; \rho, 0) & \sigma_{22}(\mathbf{h}^{2,2m+1}; \rho, 0) \\ \sigma_{12}(\mathbf{h}^{1,2m+1}; \rho, 0) & \sigma_{12}(\mathbf{h}^{2,2m+1}; \rho, 0) \end{Vmatrix}$$

В согласии с соотношениями (2.2) и (3.4), (3.3) имеем

$$S(\mathbf{X}^{\ldots,2k+1}) = \rho^{k-1/2}E_2, \quad S(\mathbf{Y}^{\ldots,2p+1}) = \frac{1}{2}\rho^{-p-3/2}\alpha^{-1} \tag{5.4}$$

где E_2 – единичная (2×2) – матрица, а α – матрица с элементами (3.5). При помощи формулы Тейлора получаем разложение

$$S(\mathbf{h}^{\ldots,2m+1}) = E_2\rho_l^{m-1/2} = E_2(\rho - l)^{m-1/2} = E_2\rho^{m-1/2}\left\{1 + \sum_{j=1}^{m} \frac{(2m-1)!!}{[2(m-j)-1]!!}\,\frac{1}{j!}\left(-\frac{l}{2\rho}\right)^j + \right.$$
$$\left. +(2m-1)!!\left(-\frac{l}{2\rho}\right)^m \sum_{k=1}^{N} \frac{(2k-1)!!}{(k+m)!}\left(\frac{l}{2\rho}\right)^k + O(\rho^{-N-3/2})\right\}$$

($(2k-1)!!$ – произведение нечетных чисел $1, 3, \ldots, 2k-1$, причем $(-1)!! = 1$). Эти соотношения позволяют определить коэффициенты упоминавшихся линейных комбинаций и, кроме того, вместе с равенствами (5.4) приводят к рекуррентной формуле

$$M_{2p+1}^{2m+1} + \sum_{j=1}^{m} \frac{(2m-1)!!}{[2(m-j)-1]!!}\frac{1}{j!}\left(-\frac{l}{2}\right)^j M_{2p+1}^{2(m-j)+1} = 2\alpha\frac{(-1)^m}{(m+p+1)!}(2m-1)!!(2p+1)!!\left(\frac{l}{2}\right)^{m+p+1}$$

В частности, взяв $m = p = 0$, обнаруживаем известные соотношения [15]

$$M_{1,1}^{1,1} = \alpha_{11}l, \quad M_{2,1}^{1,1} = M_{1,1}^{2,1} = \alpha_{12}l, \quad M_{2,1}^{2,1} = \alpha_{22}l \tag{5.5}$$

Подчеркнем, что при прямолинейном увеличении разреза ненулевые клетки матрицы M отличаются от (2×2)-матрицы α лишь числовыми множителями, не зависящими от вида анизотропии.

6. Модифицированный метод сращиваемых асимптотических разложений. Применительно к задачам механики хрупкого разрушения метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [20, 21, 22] и др.) детально разработан [23, 14]. В работе [24], по-видимому впервые, была высказана идея видоизменения названного метода, повышающего точность асимптотического решения [25].

При фиксированном N в качестве внешнего асимптотического представления поля $\mathbf{u}^\tau(\mathbf{x})$ на удалении от устья трещины Ξ_τ назначим сумму

$$\mathbf{v}(r;\ \mathbf{x}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \sum_{(j,n)} a_{j,n}\boldsymbol{\zeta}^{j,n}(\mathbf{x}) \tag{6.1}$$

где $a_{j,n}$ – коэффициенты, подлежащие определению.

Вблизи устья Υ_τ приближаем $\mathbf{u}^\tau(\mathbf{x})$ линейной комбинацией с неизвестными коэффициентами

$$\mathbf{w}(\tau; \mathbf{x}) = \sum_{(j,n)} b_{j,n}\boldsymbol{\eta}^{j,n}(\tau; \mathbf{x}) \tag{6.2}$$

Поскольку внутреннее асимптотическое представление (6.2) записано в реальных координатах, вместо асимптотической формулы (5.2) понадобится следующая:

$$\boldsymbol{\eta}^{j,n}(\tau; \mathbf{x}) = \mathbf{X}^{j,n}(r, \varphi) + \sum_{(i,p)} M_{i,p}^{j,n}(\tau)\mathbf{Y}^{i,p}(r, \varphi) + O(r^{-(N+1)/2}) \tag{6.3}$$

Здесь фигурируют компоненты $M_{i,p}^{j,n}(\tau)$ матрицы $M(\tau)$ для отростка Υ_τ, причем

$$M_{i,p}^{j,n}(\tau) = \tau^{(n+p)/2}\dot{M}_{i,p}^{j,n} \tag{6.4}$$

Согласно соотношениям (2.12), (4.3) справедливо разложение

$$\mathbf{v}(\tau; x) = \sum_{(j,n)} c_{j,n}^0\mathbf{X}^{j,n}(r, \varphi) + \sum_{(j,n)} a_{j,n}\mathbf{Y}^{j,n}(r, \varphi) +$$

$$+ \sum_{(j,n)}\sum_{(i,p)} a_{j,n}m_{i,p}^{j,n}\mathbf{X}^{i,p}(r, \varphi) + O(r^{(N+1)/2}), \quad r \to 0 \tag{6.5}$$

С другой стороны, в силу формул (6.3) и (6.4) для внутреннего асимптотического представления (6.2) при $\tau^{-1}r \to \infty$ выполняются соотношения

$$\mathbf{w}(\tau; \mathbf{x}) = \sum_{(j,n)} b_{j,n}\mathbf{X}^{j,n}(r, \varphi) + \sum_{(j,n)}\sum_{(i,p)} b_{j,n}M_{i,p}^{j,n}(\tau)\mathbf{Y}^{i,p}(r, \varphi) + O(\tau^{(N+1)/2}r^{-(N+1)/2}) \tag{6.6}$$

Пусть $\mathbf{c}^0$, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – столбцы, составленные из коэффициентов $c_{j,n}^0$, $a_{j,n}$ и $b_{j,n}$ с разрешенными парами индексов. Сращивание внешнего и внутреннего разложений (6.5) и (6.6) подразумевает совпадение отделенных асимптотических членов. Возникающие при этом соотношения образуют систему линейных уравнений относительно столбцов **a** и **b**,

$$c^0 + m\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = M(\tau)\mathbf{b} \tag{6.7}$$

Обозначив E единичную матрицу размером $2N-1$, находим решение системы (6.7)

$$\mathbf{a} = [E - M(\tau)m]^{-1} M(\tau)\mathbf{c}^0, \quad \mathbf{b} = [E - mM(\tau)]^{-1}\mathbf{c}^0 \tag{6.8}$$

7. Асимптотическая формула для приращения потенциальной энергии деформации. Подставив в выражение (1.6) вместо вектора $\mathbf{u}^\tau$ его внешнее асимптотическое представление (6.1), имеем

$$U(\Omega_\tau; \mathbf{u}^\tau) = U(\Omega_0; \mathbf{u}^0) - \frac{1}{2}\sum_{(j,n)} a_{j,n} \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{p}^0(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\zeta}^{j,n}(\mathbf{x}) ds_x + O(\tau^{N+1/2})$$

Вычисляя интегралы по формуле (4.2), получаем

$$\Delta U = U(\Omega_\tau; \mathbf{u}^\tau) - U(\Omega_0; \mathbf{u}^0) = -\frac{1}{2}\sum_{(j,n)} a_{j,n} c^0_{j,n} + O(\tau^{N+1/2})$$

Строгое обоснование полученной формулы вытекает из общих результатов [26] (см. также [22, 27]).

Учитывая зависимость (6.8), выводим

$$\Delta U = -\frac{1}{2}(\mathbf{c}^0)^T [E - M(\tau)m]^{-1} M(\tau)\mathbf{c}^0 + O(\tau^{N+1/2}) \tag{7.1}$$

Здесь T – знак транспонирования. Подчеркнем, что матрица m составляется из КИН весовых функций и определяется геометрией исходного тела Ω_0. Следуя известному подходу [19], для коэффициентов $m^{j,n}_{i,k}$ можно вывести интегральные представления.

В случае $N = 1$ формула (7.1) упрощается (ср. с [15])

$$\Delta U = -\frac{1}{2}(K^0_1, K^0_2)\begin{Vmatrix} M^{1,1}_{1,1}(\tau) & M^{1,1}_{2,1}(\tau) \\ M^{2,1}_{1,1}(\tau) & M^{2,1}_{2,1}(\tau) \end{Vmatrix}\begin{pmatrix} K^0_1 \\ K^0_2 \end{pmatrix} + O(\tau^{3/2}) \tag{7.2}$$

Главный (2×2) блок $\mathbf{M}(\tau) = \| M^{j,1}_{i,1}(\tau) \|$ матрицы $M(\tau)$, фигурирующий в (7.2), уместно назвать *матрицей высвобождения упругой энергии* при появлении в исходном теле Ω_0 малого дополнительного разреза Υ.

Если Υ_τ – отрезок длиной $l_\tau = \tau l$, продолжающий разрез Ξ_0, то матрица $\mathbf{M}(\tau)$ согласно соотношениям (5.5) заменяется на $l_\tau \boldsymbol{\alpha}$, и формула (7.2) представляет собой обобщение известной формулы Ирвина [28]

$$\Delta U = -\frac{1}{2} l_\tau (\mathbf{K}^0)^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{K}^0 + O(\tau^{3/2}), \quad \mathbf{K}^0 = (K^0_1, K^0_2)^T \tag{7.3}$$

При этом скорость высвобождения энергии равна

$$G = \lim_{\tau\to 0} \frac{U(\Omega_0; \mathbf{u}^0) - U(\Omega_\tau; \mathbf{u}^\tau)}{l_\tau} = \frac{1}{2}[\alpha_{11}(K^0_1)^2 + 2\alpha_{12}K^0_1 K^0_2 + \alpha_{22}(K^0_2)^2] \tag{7.4}$$

Напомним (см. соотношения (7.4) и (3.7)), что величина G совпадает с инвариантным интегралом Черепанова – Райса $J(\mathbf{u}^0; \gamma)$, вычисленным по решению исходной задачи (1.1), (1.2).

Сопоставляя формулу (7.4) с известным результатом [29], определяем значения постоянных α_{ij}. Связь компонент тензоров деформаций и напряжений запишем в виде [30]

$$\varepsilon_{ii} = a_{i1}\sigma_{11} + a_{i2}\sigma_{22} + a_{i6}\sigma_{12}, \quad i = 1, 2; \quad 2\varepsilon_{12} = a_{16}\sigma_{11} + a_{26}\sigma_{22} + a_{66}\sigma_{12}$$

Тогда согласно расчетам [29], получаем

$$\alpha_{11} = -\frac{a_{11}}{2}\operatorname{Im}(\mu_1 + \mu_2)\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2, \quad \alpha_{12} = -\frac{a_{11}}{2}\operatorname{Im}\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2, \quad \alpha_{22} = \frac{a_{11}}{2}\operatorname{Im}(\mu_1 + \mu_2)$$

Здесь $\operatorname{Im}\mu_i > 0$ и μ_1, μ_2 – корни характеристического уравнения [30]

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0$$

8. Асимптотика коэффициентов интенсивности напряжений в вершине трещины с прямолинейным отростком. Пусть Υ_τ – отрезок длиной $l_\tau = \tau l$, исходящий из вершины трещины Ξ под углом $\beta \in (-\pi, \pi)$. В вершине отростка введем полярные координаты $\hat{r}$ и $\hat{\varphi} \in (-\pi, \pi)$, направив полярную ось вдоль Υ_τ. Для вектора перемещений $\mathbf{u}^\tau(\mathbf{x})$ при $\hat{r} \to 0$ справедливо разложение

$$\mathbf{u}^\tau(\mathbf{x}) = c_{1,0}^\tau \hat{\mathbf{X}}^{1,0} + c_{2,0}^\tau \hat{\mathbf{X}}^{2,0} + K_1^\tau \hat{\mathbf{X}}^{1,1}(\hat{r}, \hat{\varphi}) + K_2^\tau \hat{x}^{2,1}(\hat{r}, \hat{\varphi}) + O(\hat{r}) \tag{8.1}$$

Подчеркнем, что в случае произвольной анизотропии при $\beta \neq 0$ выражения для векторов $\hat{\mathbf{X}}^{j,1}(\hat{r}, \hat{\varphi})$ отличны от $\mathbf{X}^{j,1}(\hat{r}, \hat{\varphi})$.

Асимптотика КИН K_1^τ и K_2^τ в вершине подросшей трещины определяется по внутреннему асимптотическому представлению (6.2). Приведем аналогичные (8.1) формулы для специальных решений

$$\boldsymbol{\eta}^{j,n}(\tau; \mathbf{x}) = K_1^{j,n}(\tau)\hat{\mathbf{X}}^{1,1}(\hat{r}, \hat{\varphi}) + K_2^{j,n}(\tau)\hat{\mathbf{X}}^{2,1}(\hat{r}, \hat{\varphi}) + O(\hat{r}) \tag{8.2}$$

$$K_i^{j,n}(\tau) = \tau^{(n-1)/2} K_i^{j,n}, \quad i = 1, 2 \tag{8.3}$$

Таким образом, в соответствии с соотношениями (6.2) и (8.2), (8.3) находим асимптотическое представление для КИН K_1^τ и K_2^τ из разложения (8.1)

$$K_i^\tau \simeq \sum_{(j,n)} b_{j,n} K_i^{j,n}(\tau) = \sum_{(j,n)} \tau^{(n-1)/2} b_{j,n} K_i^{j,n} \tag{8.4}$$

При этом $b_{j,n}$ – элементы столбца (6.9), а $K_1^{j,n}$ и $K_2^{j,n}$ – не зависящие от параметра τ коэффициенты (отвечающие значению $\tau = 1$).

При $N = 3$ формула (8.4) с точностью $O(\tau^{3/2})$ выглядит так:

$$K_i^\tau \simeq \sum_{j=1}^{2} K_j^0 K_i^{j,1} + \tau^{1/2} T_0 K_i^{1,2} +$$

$$+ \tau\left\{\sum_{j=1}^{2} k_j^0 K_i^{j,3} + \sum_{j=1}^{2} K_i^{j,1}[K_1^0(m_{1,1}^{j,1} M_{1,1}^{1,1} + m_{2,1}^{j,1} M_{1,1}^{2,1}) + K_2^0(m_{1,1}^{j,1} M_{2,1}^{1,1} + m_{2,1}^{j,1} M_{2,1}^{2,1})]\right\} \tag{8.5}$$

Здесь $K_j^0 = c_{j,1}^0$, $T_0 = c_{1,2}^0$ и $k_j^0 = c_{j,3}^0$ – соответственно КИН, интенсивность растяжения вдоль трещины и младшие КИН; $m_{1,1}^{j,n}$ и $m_{2,1}^{j,n}$ – КИН весовой функции $\zeta^{j,n}$. Обоснование асимптотических представлений КИН получается, как обычно, при помощи методов, разработанных ранее [22, 27, 31].

Предложенные ранее приемы [15] позволяют связать величины $M_{i,k}^{j,n}$ и КИН специальных решений $\eta^{j,n}(\xi)$ и $\eta^{i,k}(\xi)$

$$M_{i,k}^{j,n}=\frac{2l}{k+n}(K_1^{i,k},K_2^{i,k})\begin{Vmatrix}\hat{\alpha}_{11} & \hat{\alpha}_{12}\\ \hat{\alpha}_{21} & \hat{\alpha}_{22}\end{Vmatrix}\begin{pmatrix}K_1^{j,n}\\ K_2^{j,n}\end{pmatrix} \tag{8.6}$$

Здесь $\hat{\alpha}_{j1}$, $\hat{\alpha}_{j2}$ – коэффициенты в аналогичной (3.4) формуле дифференцирования вектора $\hat{\mathbf{X}}^{j,1}(\hat{r},\hat{\varphi})$ вдоль отростка Υ.

Теперь при помощи соотношения (8.6) асимптотическую формулу (7.2) для приращения энергии можно переписать в виде [15]

$$\Delta U=-\frac{1}{2}l_\tau(\mathbf{K}^\tau)^T\hat{\alpha}\mathbf{K}^\tau+O(\tau^{3/2}) \tag{8.7}$$

Здесь $l_\tau=\tau l$ – длина отростка Υ_τ, $\mathbf{K}^\tau=(K_1^\tau,K_2^\tau)^T$ –вектор-столбец КИН в вершине Υ_τ, $\hat{\alpha}$ – матрица, фигурирующая в формуле (8.6).

В случае изотропного тела $\alpha_{12}=0$ и $\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha_0=(4\mu)^{-1}(1+\varkappa)$, где $\varkappa=$ $=(\lambda+3\mu)(\lambda+\mu)^{-1}$, λ и μ – постоянные Ламе. При этом соотношение (7.3) совпадает с классической формулой Ирвина [28]

$$\Delta U=-\frac{1}{2}l_\tau\alpha_0\,|\mathbf{K}^0|^2+O(\tau^{3/2}) \tag{8.8}$$

При этом зависимость (8.6) упрощается

$$M_{i,k}^{j,n}=\frac{2\alpha_0 l}{k+n}(K_1^{i,k}K_1^{j,n}+K_2^{i,k}K_2^{j,n}) \tag{8.9}$$

Составив (2×2)-матрицу $F=\|F_{ij}\|$ из коэффициентов $K_i^{j,1}=F_{ij}$, перепишем формулу (8.9) при $n=k=1$ в матричной форме

$$\mathbf{M}=\alpha_0 lF^TF \tag{8.10}$$

Подставляя в (8.5) величины $M_{i,1}^{j,1}$, вычисленные согласно (8.10), получаем результат работы [11] для случая прямого отростка Υ_τ. В работе [12] для величин $K_i^{j,1}$ и $l^{-1/2}K_i^{1,2}$ получены разложения по степеням параметра $m=\beta/\pi$. Используя результаты [12] и зависимость (8.9), нетрудно вычислить и коэффициенты $M_{i,1}^{j,1}$.

9. Обсуждение результатов и замечания. 1°. Для анизотропного тела плотность поверхностной энергии, фигурирующей в энергетическом критерии разрушения, зависит от направления развития трещины (см. [32] и др.). Пусть трещина Ξ_0 расположена в наиболее опасном направлении, т.е. $\min\gamma=\gamma(0)$. Найдем необходимые условия прямолинейности ее развития. Приращение полной энергии, вызванное возникновением отростка $\Upsilon_\tau(\beta)$ в виде отрезка длиной $l_\tau=\tau l$, направленного под углом β к Ξ_0, в силу выражения (7.2) равно

$$2\gamma(\beta)\tau l-\frac{1}{2}(\mathbf{K}^0)^T\mathbf{M}(\tau;\beta)\mathbf{K}^0=\tau\left[2\gamma(\beta)l-\frac{1}{2}(\mathbf{K}^0)^T\mathbf{M}(1;\beta)\mathbf{K}^0\right] \tag{9.1}$$

Здесь $\mathbf{M}(\tau;\beta)$ – матрица высвобождения энергии для отростка $\Upsilon_\tau(\beta)$.

Согласно критерию Гриффитса [33], трещина растет прямолинейно при условии, что угол $\beta=0$ соответствует *глобальному* минимуму величины (9.1). Так как по предположению $\partial_\beta\gamma(0) = 0$, величина (9.1) имеет *локальный* минимум в направлении $\beta = 0$ при выполнении двух соотношений

$$(\mathbf{K}^0)^T \partial_\beta \mathbf{M}(1;0)\mathbf{K}^0 = 0 \tag{9.2}$$

$$4\partial^2_\beta\gamma(0)l - \frac{1}{2}(\mathbf{K}^0)^T \partial^2_\beta \mathbf{M}(1;0)\mathbf{K}^0 > 0 \tag{9.3}$$

Первое из них требует, чтобы матрица $\partial_\beta\mathbf{M}(1; 0)$ не была знакоопределенной, и приводит к связи столбца КИН с собственными числами μ_i и столбцами m_i этой матрицы

$$K^0 = \mathrm{const}\,(|\mu_2|^{1/2} m_1 \pm |\mu_1|^{1/2} m_2) \tag{9.4}$$

Так как $\partial^2_\beta\gamma(0) \geqslant 0$, неравенство (9.3) гарантировано, например, для отрицательно определенной матрицы $\partial^2_\beta\mathbf{M}(1;0)$. Подчеркнем, что упомянутые необходимые условия имеют дело не с самой матрицей $\mathbf{M}(1; 0)$, а с ее первой и второй производными.

Используя расчеты [12], для изотропного тела имеем

$$\partial_\beta\mathbf{M}(1;0) = \frac{\alpha_0 l}{2}\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \partial^2_\beta\mathbf{M}(1;0) = \frac{\alpha_0 l}{2}\mathrm{diag}\left\{-1, \left(3 - \frac{16}{\pi^2}\right)\right\}$$

$$m_1 = (1,\ 1)^T, \quad \mu_1 = 1, \quad m_2(-1,\ 1)^T, \quad \mu_2 = -1$$

Следовательно, в силу выражения (9.4) равенство (9.2) возможно в двух ситуациях: чистая первая мода $K_1^0 = C$, $K_2^0 = 0$ и чистая вторая мода $K_1^0 = 0$, $K_2^0 = C$. Второй диагональный элемент матрицы $\partial^2_\beta\mathbf{M}(1;0)$ положителен, чем и объясняется невозможность прямолинейного развития трещины при сдвиговом нагружении.

2°. Согласно сказанному в разд. 2, деформационный и силовой критерии имеет смысл снабжать различными базисами $\mathbf{X}^{j,n}_{(d)}$ и $\mathbf{X}^{j,n}_{(s)}$ степенных решений. Пусть переход от пары $\mathbf{X}^{1,1}_{(d)}$, $\mathbf{X}^{2,1}_{(d)}$ к паре $\mathbf{X}^{1,1}_{(s)}$, $\mathbf{X}^{2,1}_{(s)}$ осуществляется при помощи (2×2)-матрицы $T = \|T_{ij}\|$. Сравнивая нормировки (2.2) и (2.13), видим, что та же матрица T пригодна для пар $\mathbf{X}^{1,2m+1}_{(d)}$, $\mathbf{X}^{2,2m+1}_{(d)}$ и $\mathbf{X}^{1,2m+1}_{(s)}$, $\mathbf{X}^{2,2m+1}_{(s)}$ с произвольным натуральным m. В силу условий (2.7) для сингулярных решений $\mathbf{Y}^{1,2m+1}_{\ldots}$, $\mathbf{Y}^{2,2m+1}_{\ldots}$ нужно пользоваться обратной матрицей T^{-1}. Наконец, благодаря условиям (2.13), условие раскрытия разреза Ξ_0 в терминах КИН (силовой базис) записывается так:

$$K_1^0 T_{11} + K_2^0 T_{12} \geqslant 0$$

3°. Был введен базис $\mathbf{X}^{j,n}_{(e)}$ степенных решений, приспособленный к энергетическим критериям разрушения [15]. Матрица, осуществляющая переход от пары $\mathbf{X}^{1,1}_{(s)}$, $\mathbf{X}^{2,1}_{(s)}$ к паре $\mathbf{X}^{1,1}_{(e)}$, $\mathbf{X}^{2,1}_{(e)}$, равна $\alpha_0^{1/2}\alpha^{-1/2}$, причем α_0 и α определены в разд. 3 (см. формулы (3.4) и (3.5)). Из коэффициентов $c^0_{1,1}$ и $c^0_{2,1}$ в аналогичном (2.12) асимптотическом разложении по энергетическому базису решения невозмущенной задачи $\mathbf{u}^0$ составим столбец $\mathbf{K}^0_{(e)}$. Столбец $\mathbf{K}^0_{(e)}$ связан [15] со столбцом КИН $\mathbf{K}^0$ следующим образом:

$$\mathbf{K}^0_{(e)} = \alpha_0^{-1/2}\alpha^{1/2}\mathbf{K}^0$$

Выражая отсюда вектор $\mathbf{K}^0$ через $\mathbf{K}^0_{(e)}$ и подставляя в выражение (7.3), находим

$$\Delta U = -\frac{1}{2} l_\tau \alpha_0 |\mathbf{K}^0_{(e)}|^2 + O(\tau^{3/2}) \tag{9.5}$$

В результате формула (9.5) приращения энергии для анизотропного материала в случае прямолинейного распространения трещины не отличается по виду от классической формулы Ирвина (8.9).

В случае отрезка Υ_τ длиной l_τ, составляющего угол β с направлением трещины Ξ_0, формула (7.2) преобразуется к виду

$$\Delta U = -\frac{1}{2} l_\tau \alpha_0 (\mathbf{K}^0_{(e)})^T \tilde{\mathbf{M}}(\beta) \mathbf{K}^0_{(e)} + O(\tau^{3/2})$$

При этом $\tilde{\mathbf{M}}(\beta) = (l_\tau \alpha_0)^{-1} \boldsymbol{\alpha}^{-1/2} \mathbf{M}(\tau;\beta) \boldsymbol{\alpha}^{-1/2}$ – симметрическая матрица с безразмерными коэффициентами, нормированная условием $\tilde{\mathbf{M}}(0) = E_2$. Перечисленные свойства делают нормированную матрицу высвобождения упругой энергии $\tilde{\mathbf{M}}(\beta)$ канонической характеристикой излома полубесконечной трещины.

4°. Расширенная матрица высвобождения упругой энергии $M(\tau)$ определяется формой и размером отростка Υ_τ. Для коэффициентов $M^{j,n}_{i,k}$ можно получить [14] интегральные представления. Подчеркнем, что значения коэффициентов $M^{j,n}_{i,k}$ зависят от используемого базиса степенных решений. Именно, переход от силового базиса к деформационному или энергетическому должен сопровождаться пересчетом компонент матрицы M. Ранее ([34, 35, 36] и др.) интегральные характеристики, аналогичные матрице M, вводились для других задач механики и в других геометрических ситуациях.

Предлагаемая асимптотическая процедура применима и в случае семейства краевых и внутренних трещин (ср. с исследованием [37] трещины нормального разрыва). Отметим, что взаимодействие трещин описывается при помощи аналога матрицы (4.4), которая составлена из КИН весовых функций во всех вершинах и потому имеет размеры, увеличенные пропорционально количеству вершин. Такая матрица сохраняет симметричность, но, вообще говоря, утрачивает положительную определенность (см. [19]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00455) и Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (INTAS-96-0876).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miller G.R., Stock W.L.* Analysis of branched interface cracks between dissimilar anisotropic media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1989. V. 56. № 4. P. 844–849.
2. *Obata M., Nemat-Nasser S., Goto Y.* Branched cracks in anisotropic elastic solids // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1989. V. 56. № 4. P. 858–864.
3. *Баничук Н.В.* Определение формы криволинейной трещины методом малого параметра // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 2. С. 130–137.
4. *Cotterell B., Rice J.R.* Slightly curved or kinked cracks // Intern. J. Fract. 1980. V. 16. № 2. P. 155–169.
5. *Gao H., Chiu C.-H.* Slightly curved or kinked cracks in anisotropic elastic solids // Intern. J. Solids Struct. 1992. V. 29. № 8. P. 947–972.
6. *Гольдштейн Р. В., Салганик Р.Л.* Плоская задача о криволинейных трещинах в упругом теле // Изв. АН СССР. МТТ. 1970. № 3. С. 69–82.
7. *Karihaloo B.L., Keer L.M., Nemat-Nasser S., Oranratnachai A.* Approximate description of crack kinking and curving // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1981. V. 48. № 3. P. 515–519.
8. *Wu C.H.* Explicit asymptotic solution for the maximum-energy-release-rate problem // Intern. J. Solids Struct. 1979. V. 15. № 7. P. 561–566.
9. *Hayashi K., Nemat-Nasser S.* Enegry release rate and crack kinking // Intern. J. Solids Struct. 1981. V. 17. № 1. P. 107–114.
10. *Sumi Y.* A second order perturbation solution of a non-collinear crack and its application to crack path prediction of brittle fracture in weldment // Theoretical studies on fracture mechanics in Japan / Ed. K. Ohtsuka. Hiroshima: Hiroshima-Denki Inst. Technol., 1997. P. 73–86.

11. *Leblond J.B.* Crack path in plane situations – I. General form of the expansion of the stress intensity factors // Intern. J. Solids Struct. 1989. V. 25. № 11. P. 1311–1325.
12. *Amestoy M., Leblond J.B.* Crack path in plane situations – II. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors // Intern. J. Solids Struct. 1992. V. 29. № 4. P. 465–501.
13. *Duduchava R., Wendland W.* The Wiener – Hopf method for systems of pseudodifferential equations and an application to crack problems // Integral Equations and Operator Theory. 1995. V. 23. № 3. P. 294–335.
14. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Критерии разрушения, асимптотические условия в вершинах трещин и самосопряженные расширения оператора Ламе // Труды Моск. мат. о-ва, 1996. Т. 57. С. 16–74.
15. *Назаров С.А.* Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности напряжений и инвариантные интегралы // ПММ, 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 489–502.
16. *Назаров С.А.* Весовые функции и инвариантные интегралы // Вычислительная механика деформируемого твердого тела, 1990. Вып. 1. С. 17–31.
17. *Bueckner H.F.* A novel principle for the computation of stress intensity factors // ZAMM. 1970. V. 50. H. 9. P. 529–546.
18. *Мазья В.Г., Пламеневский Б.А.* О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками // Math. Nahr. 1977. Bd. 76. S. 29–60.
19. *Назаров С.А.* Локальная устойчивость и неустойчивость трещин нормального отрыва // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 3. С. 124–129.
20. *Van Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. New York; London: Acad. Press, 1964 = *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
21. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
22. *Mazja V.G., Nasarow S.A., Plamenevski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Bd. 1. Berlin: Akademie-Verlag, 1991. 432 S; *Maz'ya V., Nasarow S., Plamenevskij B.* Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Domains. V. 1. Basel, etc.: Birkhäuser Verlag, 2000. 435 p.
23. *Назаров С.А., Полякова О.Р.* Весовые функции и инвариантные интегралы высших порядков // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 104–119.
24. *Назаров С.А.* Асимптотические условия в точке, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых разложений // Тр. Санкт-Петербург. мат. о-ва. 1996. Т. 5. С. 112–183.
25. *Аргатов И.И.* Об улучшении асимптотического решения, получаемого по методу сращиваемых разложений в контактной задаче теории упругости // Ж. вычисл. математики и мат. физики, 2000. Т. 40. № 4. С. 623–632.
26. *Мазья В.Г., Назаров С.А.* Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях границы вблизи угловых и конических точек // Труды Моск. мат. о-ва. 1987. Т. 50. С. 79–129.
27. *Nazarov S.A., Plamenevsky B.A.* Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. Berlin; New York: Walter de Gruyter. 1994. 525 p.
28. *Irwin G.R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1957. V. 24. № 3. P. 361–364.
29. *Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R.* On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // Intern. J. Fracture Mech. 1965. V. 1. № 3. P. 189–203.
30. *Лехницкий С.Г.* Анизотропные пластинки. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1947. 364 с.
31. *Eck C., Nazarov S.A., Wendland W.L.* Asymptotic analysis for a mixed boundaryvalue contact problem // Arch. Ration. Mech. Analysis. 2001. V. 156. № 4. P. 275–316.
32. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
33. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solid // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1920. V. 221. P. 163–198.
34. *Pólya G., Szegö G.* Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton: Princeton Univ. Press, 1951 = *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
35. *Зорин И.С., Мовчан А.Б., Назаров С.А.* Об использовании тензора упругой поляризации в задачах механики трещин // Изв. АН СССР. МТТ. 1988. № 6. С. 128–134.
36. *Аргатов И.И.* Интегральные характеристики жестких включений и полостей в плоской теории упругости // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 283–289.
37. *Назаров С.А.* Взаимодействие трещин при хрупком разрушении. Силовой и энергетический подходы // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 484–496.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
4.VI.2001