

УДК 539.3:534.1

© 2002 г. А.В. Белоконов, А.В. Наседкин, А.Н. Соловьев

**НОВЫЕ СХЕМЫ  
КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА  
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ**

Предлагаются новые конечно-элементные (КЭ) схемы исследования гармонических и нестационарных задач для составных упругих и пьезоэлектрических сред. Эти схемы развивают методики КЭ-анализа пьезоэлектрических структур, основанные на симметричных и блочных матричных алгоритмах. Для учета потерь в пьезоэлектрических средах применена новая модель, обобщающая модель Кельвина для вязкоупругих сред. Показано, что данная модель допускает расщепление системы КЭ-уравнений на отдельные скалярные уравнения. Для прямого интегрирования по времени КЭ уравнений нестационарных задач применена схема Ньюмарка в удобной формулировке, не использующей явно скоростей и ускорений узловых степеней свободы. Приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие эффективность предлагаемых методик и их реализаций в КЭ-пакете ACELAN.

**1. Модели учета затухания в пьезоэлектрических структурах.** В современных КЭ-пакетах для учета затухания в составных твердотельных структурах применяется, как правило, метод Релея, при котором матрица демпфирования  $C_{uu}$  формируется в виде

$$C_{uu} = \sum_j (\alpha_{dj} M_{uuj} + \beta_{dj} K_{uuj}) \tag{1.1}$$

где  $M_{uuj}$ ,  $K_{uuj}$  – матрицы масс и жесткости для среды  $\Omega_j$ ;  $\alpha_{dj}$ ,  $\beta_{dj}$  – неотрицательные коэффициенты затухания. Соотношение (1.1) получается при принятии модели Кельвина учета потерь в среде  $\Omega_j$

$$\sigma = c_j \cdot (\epsilon + \beta_{dj} \dot{\epsilon}) \tag{1.2}$$

и добавлении слагаемого  $\alpha_{dj} \rho_j \dot{u}$  к инерционному члену  $\rho_j \ddot{u}$  в уравнениях движения. Здесь  $\sigma$ ,  $\epsilon$  – тензоры второго ранга напряжений и деформаций;  $c_j$  – полусимметричный тензор четвертого ранга модулей упругости;  $\rho_j$  – плотность;  $u$  – вектор перемещений.

В дальнейшем динамическом КЭ-анализе твердотельных структур часто оказывается удобным применять метод разложения по модам колебаний  $W_k$ , ортонормированным по матрице масс  $M_{uu} = \sum_j M_{uuj}$  и ортогональным по матрице жесткости  $K_{uu} = \sum_j K_{uuj}$ ,

$$W_m^* \cdot M_{uu} \cdot W_k = \delta_{mk}, \quad W_m^* \cdot K_{uu} \cdot W_k = \omega_m^2 \delta_{mk} \tag{1.3}$$

где  $\delta_{mk}$  – символ Кронекера,  $\omega_m$  – собственная частота, отвечающая собственному вектору  $W_m$ .

Если в соотношении (1.1)

$$\alpha_{dj} = \alpha_d, \quad \beta_{dj} = \beta_d \text{ при любых } j, \tag{1.4}$$

то в силу равенств (1.3) векторы  $\mathbf{W}_k$  оказываются ортогональными по матрице демпфирования  $\mathbf{C}_{uu}$

$$\mathbf{W}_m^* \cdot \mathbf{C}_{uu} \cdot \mathbf{W}_k = 2\xi_{dm} \omega_m \delta_{mk}, \quad \xi_{dm} = \frac{1}{2\omega_m} \alpha_d + \frac{\omega_m}{2} \beta_d$$

Коэффициенты  $\xi_{dm}$  носят название модовых коэффициентов затухания. Они связаны простым образом с механической добротностью  $Q_m$  на отдельных модах:  $Q_m = 1/(2\xi_{dm})$ .

Обобщим описанную выше методику Релея учета затухания на структуры, содержащие упругие и пьезоэлектрические среды. Для упругих сред  $\Omega_j = \Omega_{ej}$  будем по-прежнему принимать определяющие соотношения (1.2). Для пьезоэлектрических сред  $\Omega_j = \Omega_{pj}$  будем считать, что тензор механических напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$  и вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$  связаны с тензором деформаций  $\boldsymbol{\epsilon}$  и вектором напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  уравнениями

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_j^E \cdot \cdot (\boldsymbol{\epsilon} + \beta_{dj} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) - \mathbf{e}_j^* \cdot \mathbf{E} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{D} + \zeta_d \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{e}_j \cdot \cdot (\boldsymbol{\epsilon} + \zeta_d \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) + \boldsymbol{\epsilon}_j^S \cdot \mathbf{E} \quad (1.6)$$

где  $\mathbf{e}_j$  – тензор пьезомодулей третьего ранга,  $\boldsymbol{\epsilon}_j^S$  – тензор диэлектрических проницаемостей второго ранга,  $\zeta_d \geq 0$  – коэффициент затухания, отражающий электрические потери.

Данная модель обобщает модель Кельвина (1.2) на случай пьезоэлектрических сред. При  $\zeta_d = 0$  в уравнении (1.6) получаем более частную модель учета затухания в пьезоэлектрических средах, принятую в таких известных КЭ-пакетах, как ANSYS [1] и COSMOS/M [2]. При  $\zeta_d = 0$  в уравнениях (1.5), (1.6) учитывается как бы одно механическое демпфирование. Правда, в силу связанности механических и электрических полей эффекты затухания и при  $\zeta_d = 0$  будут распространяться и на электрические поля.

Главный же недостаток модели (1.5), (1.6) при  $\zeta_d = 0$  состоит в том, что при реализации метода разложения по модам система КЭ-уравнений не будет расщепляться на независимые уравнения для отдельных мод, поскольку собственные векторы  $\mathbf{W}_k$  не будут ортогональны по получающейся матрице демпфирования  $\mathbf{C}_{uu}$ . В итоге для расщепления уравнений приходится использовать специальную форму матрицы демпфирования, не следующую из модели (1.5), (1.6) при  $\zeta_d = 0$  [3, 4]. Этого недостатка лишена модель (1.5), (1.6) при  $\beta_{dj} = \zeta_d$ , анализируемая в последнее время [5, 6]; было показано [5], что получающаяся модель удовлетворяет условиям, обеспечивающим диссипацию энергии, и для случая гармонических колебаний продемонстрирована [6] возможность расщеплять КЭ-системы на независимые уравнения для мод.

Более отчетливо суть модели (1.5), (1.6) при  $\beta_{dj} = \zeta_d$  видна из иной формы определяющих соотношений, связывающих пару  $\{\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{D}\}$  с парой  $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}\}$ ,

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_j^D \cdot \cdot (\boldsymbol{\epsilon} + \zeta_d \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) - \mathbf{h}_j^* \cdot (\mathbf{D} + \zeta_d \dot{\mathbf{D}}) \quad (1.7)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{h}_j \cdot \cdot (\boldsymbol{\epsilon} + \zeta_d \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) + \boldsymbol{\beta}_j^S \cdot (\mathbf{D} + \zeta_d \dot{\mathbf{D}}) \quad (1.8)$$

где

$$\boldsymbol{\beta}_j^S = (\boldsymbol{\epsilon}_j^S)^{-1}, \quad \mathbf{h}_j = \boldsymbol{\beta}_j^S \cdot \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{c}_j^D = \mathbf{c}_j^E + \mathbf{e}_j^* \cdot \boldsymbol{\beta}_j^S \cdot \mathbf{e}_j$$

Таким образом, из модели (1.5), (1.6) следуют как частные случаи, как модель, принятая в ANSYS, так и модель (1.7), (1.8), допускающая расщепление системы КЭ-уравнений.

Заметим, что для пьезоэлектрических сред можно использовать и интегральные модели учета затухания, обобщающие обычные интегральные модели вязкоупругих сред. Однако подобные подходы при КЭ-анализе нестационарных задач приводят к очень громоздким расчетным схемам [7]. Использованию интегральных моделей затухания препятствует также и почти полное отсутствие экспериментальных данных о модулях релаксаций пьезоэлектрических сред.

**2. КЭ-уравнения для анализа пьезоэлектрических устройств.** Будем считать, что пьезоэлектрическое устройство представляет собой тело  $\Omega$ , составленное из  $N$  однородных областей  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ), вообще говоря, с различными пьезоэлектрическими или упругими свойствами. Примем, что в областях  $\Omega_j = \Omega_{pj}$  с пьезоэлектрическими свойствами вектор перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и электрический потенциал  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяют системе уравнений ( $\mathbf{f}_j$  – вектор плотности массовых сил)

$$\rho_j \ddot{\mathbf{u}} + \alpha_{dj} \rho_j \dot{\mathbf{u}} - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_j \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.2)$$

при определяющих соотношениях (1.5), (1.6) и формулах

$$\boldsymbol{\epsilon} = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^*) / 2, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (2.3)$$

Для областей  $\Omega_j = \Omega_{ej}$ , заполненных упругими материалами без пьезоэлектрических свойств, принимаются обычные уравнения (2.1), (1.2) с учетом демпфирования по Релею.

Постановки нестационарных задач электроупругости следует дополнить краевыми условиями на внешней границе  $\Gamma = \partial\Omega$ ;  $\Omega = \cup_j \Omega_j$  и условиями жесткого контакта на границах  $\Gamma_{il} = \Gamma_i \cap \Gamma_l$  соприкасающихся сред  $\Omega_i$  и  $\Omega_l$ . Здесь будем допускать все основные типы краевых условий электроупругости, включая свободные электроды и электроды, запитываемые генераторами токов [8]. Для нестационарных задач необходимо задать также начальные условия для перемещений и скоростей

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, +0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, +0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \quad (2.4)$$

Для решения начально-краевых задач электроупругости будем использовать метод конечных элементов (МКЭ) в классической лагранжевой формулировке. Выберем согласованную сетку конечных элементов в областях  $\Omega_{hj}$ , аппроксимирующих области  $\Omega_j$ . На этой сетке конечных элементов – неизвестные полевые функции  $\mathbf{u}$  и  $\varphi$  аппроксимируем в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{N}_u^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}(t), \quad \varphi(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{N}_\varphi^*(\mathbf{x}) \cdot \Phi(t) \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{N}_u^*$  – матрица функций формы для поля перемещений;  $\mathbf{N}_\varphi^*$  – вектор-строка функций формы для поля потенциала;  $\mathbf{U}(t)$ ,  $\Phi(t)$  – глобальные векторы узловых перемещений и потенциалов.

Стандартная полудискретная КЭ-аппроксимация обобщенных постановок нестационарных задач (2.1)–(2.4), (1.5), (1.6), включающих основные главные и естественные граничные условия, приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\mathbf{M}_{uu} \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}_{uu} \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uu} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \Phi = \mathbf{F}_u \quad (2.6)$$

$$\zeta_d \mathbf{K}_{u\varphi}^* \cdot \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{u\varphi}^* \cdot \mathbf{U} - \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \Phi = \mathbf{F}_\varphi + \zeta_d \dot{\mathbf{F}}_\varphi \quad (2.7)$$

с начальными условиями

$$\mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0, \quad \dot{\mathbf{U}}(0) = \dot{\mathbf{U}}_0 \quad (2.8)$$

получающимися из соответствующих континуальных условий (2.4).

КЭ-матрицы масс  $M_{uu}$ , демпфирования  $C_{uu}$  и жесткости  $K_{uu}$  те же, что и в структурном анализе. В частности, для матрицы демпфирования имеем представление (1.1). Все эти матрицы симметричны и неотрицательно определены, причем  $M_{uu} > 0$ . КЭ-матрицы  $K_{uf}$  и  $K_{ff}$  обусловлены пьезоэффектом и отражают пьезоэлектрические и диэлектрические свойства, причем матрица  $K_{ff}$  симметрична и неотрицательно определена:  $K_{ff} \geq 0$ . Векторы  $F_u$  и  $F_\phi$  формируются в результате учета механических и электрических воздействий. При этом главные граничные условия требуют дополнительных преобразований систем КЭ-уравнений (2.6), (2.7). Будем считать, что такие преобразования в (2.6), (2.7) проведены по методикам [9], сохраняющим структуру КЭ-матриц.

Заметим, что для гармонических задач, когда внешние воздействия изменяются по закону  $\exp[i\omega t]$ , из (2.6), (2.7) для амплитудных значений, очевидно, имеем систему линейных алгебраических уравнений с симметричной матрицей

$$-\omega^2 M_{uu} \cdot U + i\omega C_{uu} \cdot U + K_{uu} \cdot U + K_{uf} \cdot \Phi = F_u \quad (2.9)$$

$$K_{uf}^* \cdot U - (1 + i\omega \zeta_d)^{-1} K_{ff} \cdot \Phi = F_\phi \quad (2.10)$$

**3. Метод разложения по модам.** Следуя развитому ранее подходу [3, 4, 6], рассмотрим особенности применения классического для КЭ-анализа метода разложения по модам в задачах электроупругости. Новым аспектом здесь будет использование модели учета затухания (1.5), (1.6) при  $\beta_{dj} = \zeta_d$ . Кроме того, в отличие от работ [3, 4, 6], где рассматривались задачи об установившихся колебаниях, ниже изложим метод разложения по модам для нестационарных задач.

Пусть  $\{\omega_k, W_k\}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ , где  $n$  – размерность матриц  $M_{uu}$  и  $K_{uu}$ ) – пары собственных частот (электрических резонансов)  $\omega_k$  и соответствующих им собственных векторов (нормальных мод)  $W_k$ , являющихся нетривиальными решениями однородной задачи (2.9), (2.10) в отсутствие демпфирования ( $\alpha_{dj} = \beta_{dj} = \zeta_d = 0$ ). Эта задача эквивалентна обобщенной задаче на собственные значения

$$-\omega^2 M_{uu} \cdot U + \bar{K}_{uu} \cdot U = 0 \quad (3.1)$$

где

$$\bar{K}_{uu} = K_{uu} + K_{uf} \cdot K_{ff}^{-1} \cdot K_{uf}^* \quad (3.2)$$

с симметричными матрицами  $M_{uu} > 0$ ;  $\bar{K}_{uu} \geq 0$ . Поскольку в равенстве (3.1) фигурирует матрица  $\bar{K}_{uu}$ , отличающаяся от матрицы  $K_{uu}$ , то собственные векторы  $W_k$  будут теперь ортогональными именно по матрице  $\bar{K}_{uu}$ , т.е.

$$W_m^* \cdot \bar{K}_{uu} \cdot W_k = \omega_m^2 \delta_{mk} \quad (3.3)$$

Отметим, что методы определения собственных частот  $\omega_k$  и собственных векторов  $W_k$ , использующие алгоритмы решения обобщенных задач для разреженных матриц, а также их реализация в КЭ-пакете ACELAN описаны ранее [3, 10].

Примем, что для коэффициентов затухания  $\alpha_{dj}$ ,  $\beta_{dj}$  и  $\zeta_d$  исходной модели пьезоэлектрического устройства (2.1), (1.5), (1.6) выполнены соотношения:  $\alpha_{dj} = \alpha_d$ ;  $\beta_{dj} = \zeta_d$  при любых  $j$ . В векторах  $F_u$  и  $F_\phi$  выделим составляющие  $V$ , связанные с заданными значениями электрического потенциала. В результате систему (2.6), (2.7) можно будет представить в виде

$$M_{uu} \cdot (\ddot{U} + \alpha_d \dot{U}) + K_{uu} \cdot (U + \zeta_d \dot{U}) + K_{uf} \cdot \Phi = F_{uv} \quad (3.4)$$

$$K_{uf}^* \cdot (U + \zeta_d \dot{U}) - K_{ff} \cdot \Phi = F_{\phi v} \quad (3.5)$$

где

$$\mathbf{F}_{uu} = \mathbf{F}_u - \mathbf{K}_{uv} \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{F}_{\varphi v} = \mathbf{F}_\varphi + \zeta_d \dot{\mathbf{F}}_\varphi + \mathbf{K}_{\varphi v} \cdot \mathbf{V} \quad (3.6)$$

Отметим, что значения электрического потенциала, фигурирующие в выражении для вектора  $\mathbf{V}$ , в задаче (3.1) полагались равными нулю, и, таким образом, соответствующие степени свободы электрического потенциала не входят в вектор  $\Phi$ .

Из соотношения (3.5) можно выразить  $\Phi$  через  $\mathbf{U}$ :

$$\Phi = \mathbf{K}_{\varphi\varphi}^{-1} \cdot \mathbf{K}_{u\varphi}^* \cdot (\mathbf{U} + \zeta_d \dot{\mathbf{U}}) + \Phi_q \quad (3.7)$$

$\Phi_q$  определяется фактически из отдельной задачи "квазиэлектростатики"

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi} \cdot \Phi = -\mathbf{F}_{\varphi v} \quad (3.8)$$

С использованием выражения (3.7) уравнение (3.4) можно переписать в виде

$$\mathbf{M}_{uu} \cdot (\ddot{\mathbf{U}} + \alpha_d \dot{\mathbf{U}}) + \bar{\mathbf{K}}_{uu} \cdot (\mathbf{U} + \zeta_d \dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{F}_{uv} - \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \Phi_q \quad (3.9)$$

Решение  $\mathbf{U}$  задачи (3.9), (2.8) будем разыскивать в виде разложения по модам

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^n Z_k(t) \mathbf{W}_k \quad (3.10)$$

Подставив это разложение в уравнение (3.9), умножив полученное равенство скалярно на  $\mathbf{W}_m^*$  и использовав соотношения ортогональности собственных векторов по матрицам  $\mathbf{M}_{uu}$  и  $\bar{\mathbf{K}}_{uu}$ , получим скалярные дифференциальные уравнения для отдельных функций  $Z_k(t)$ . Решая эти уравнения, находим

$$Z_k = \frac{1}{\bar{\omega}_k} \int_0^t P_k(\tau) e^{-\xi_k \omega_k (t-\tau)} \sin[\bar{\omega}_k (t-\tau)] d\tau + A_k(0) e^{-\xi_k \omega_k t} \sin(\bar{\omega}_k t + \delta_k) \quad (3.11)$$

$$P_k = \mathbf{W}_k^* \cdot (\mathbf{F}_{uv} - \mathbf{K}_{u\varphi} \cdot \Phi_q), \quad \xi_k = \frac{1}{2\omega_k} \alpha_d + \frac{\omega_k}{2} \zeta_d$$

$$\bar{\omega}_k = \omega_k (1 - \xi_k^2)^{1/2}, \quad A_k(0) = \left[ Z_k^2(0) + \frac{(\dot{Z}_k(0) + \xi_k \omega_k Z_k(0))^2}{\bar{\omega}_k^2} \right]^{1/2}$$

$$\delta_k = \arctg \frac{Z_k(0) \bar{\omega}_k}{\dot{Z}_k(0) + \xi_k \omega_k Z_k(0)}$$

$$Z_k(0) = \mathbf{W}_k^* \cdot \mathbf{M}_{uu} \cdot \mathbf{U}_0, \quad \dot{Z}_k(0) = \mathbf{W}_k^* \cdot \mathbf{M}_{uu} \cdot \dot{\mathbf{U}}_0$$

Таким образом, решение задачи (3.4)–(3.6), (2.8) по методу разложения по модам дается формулами (3.10), (3.11) для  $\mathbf{U}$  и (3.7), (3.8) для  $\Phi$ .

В части нахождения вектора  $\mathbf{U}$  представленный метод во многом идентичен классическому варианту метода разложения по модам в линейных динамических задачах механики деформируемого твердого тела. Расщеплению уравнений здесь существенно способствовала ортогональность векторов  $\mathbf{W}_k$  по матрице  $\bar{\mathbf{C}}_{uu} = \alpha_d \mathbf{M}_{uu} + \zeta_d \bar{\mathbf{K}}_{uu}$ , обеспечиваемая принятой моделью демпфирования. Коэффициенты  $\xi_k$  в (3.11) являются модовыми коэффициентами демпфирования, и по ним можно приближенно определить коэффициенты затухания  $\alpha_d$  и  $\zeta_d$  для всего пьезоустройства. Реализация метода в задачах установившихся колебаний теперь очевидна (см. также [6] и [3, 4] при  $\zeta_d = \bar{\beta}_d$ ).

**4. Схема Ньюмарка для решения нестационарных задач.** Метод разложения по модам требует равенства параметров демпфирования для различных сред (т.е. выполнения соотношений (1.4)), а также однородности главных граничных условий для перемещений  $u(x, t)$ . Более общими являются методы прямого интегрирования по времени. Аналогично изложенному ранее [9] для интегрирования по времени задачи Коши (2.6)–(2.8) будем использовать метод Ньюмарка в формулировке, в которой не фигурируют явно скорости и ускорения на временных слоях.

Обычная схема Ньюмарка [1, 11] основана на следующих разложениях вектор-функций  $a_{i+1} = a(t_{i+1})$ ,  $\dot{a}_{i+1} = \dot{a}(t_{i+1})$ ,  $a = \{U, \Phi\}$  ( $t_i = i\tau$ ;  $\tau = \Delta t$  – шаг по времени)

$$a_{i+1}^p = a_i + \tau \dot{a}_i + (\frac{1}{2} - \beta)\tau^2 \ddot{a}_i, \quad a_{i+1} = a_{i+1}^p + \beta\tau^2 \ddot{a}_{i+1} \quad (4.1)$$

$$\dot{a}_{i+1}^p = \dot{a}_i + (1 - \gamma)\tau \ddot{a}_i, \quad \dot{a}_{i+1} = \dot{a}_{i+1}^p + \gamma\tau \ddot{a}_{i+1}$$

где  $\beta, \gamma$  – параметры метода Ньюмарка.

Введем в рассмотрение осредняющий оператор  $Y_i$ :

$$Y_j a = \sum_{k=0}^2 \beta_k a_{j+1-k} \quad (4.2)$$

где

$$\beta_0 = \beta, \quad \beta_1 = \gamma_+ - 2\beta, \quad \beta_2 = \gamma_- + \beta; \quad \gamma_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \gamma$$

Имеет место следующая

*Лемма.* Пусть величины  $a_i, \dot{a}_i, \ddot{a}_i, a_i^p, \dot{a}_i^p$  связаны соотношениями (4.1), (4.2) для всех  $i \in N$ . Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned} Y_i a^p &= \gamma_+ a_i + \gamma_- a_{i-1}; \quad Y_i \dot{a}^p = (a_i - a_{i-1}) / \tau \\ Y_i \dot{a} &= (\gamma a_{i+1} - (2\gamma - 1)a_i - (1 - \gamma)a_{i-1}) / \tau \\ Y_i \ddot{a} &= (a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1}) / \tau^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Легко также убедиться, что величины  $Y_i \ddot{a}$  и  $Y_i \dot{a}$  выражаются через  $Y_i a^p$ ,  $Y_i \dot{a}^p$ ,  $Y_i a$  по формулам

$$Y_i \ddot{a} = \frac{1}{\beta\tau^2} (Y_i a - Y_i a^p), \quad Y_i \dot{a} = \frac{\gamma}{\beta\tau} (Y_i a - Y_i a^p) + Y_i \dot{a}^p \quad (4.4)$$

Поддействуем теперь на уравнения (2.6), (2.7), записанные в моменты времени  $t_i$ , осредняющим оператором  $Y_i$  (4.2). При учете выражений (4.4) получаем следующие разрешающие системы линейных алгебраических уравнений для каждого временного слоя:

$$K_{uu}^{\text{eff}} \cdot Y_i U + K_{u\phi} \cdot Y_i \Phi = F_u^{\text{eff}} \quad (4.5)$$

$$K_{u\phi}^* \cdot Y_i U - \left(1 + \frac{\zeta_d \gamma}{\beta\tau}\right)^{-1} K_{\phi\phi} \cdot Y_i \Phi = F_{\phi}^{\text{eff}}$$

где

$$K_{uu}^{\text{eff}} = \frac{1}{\beta\tau^2} M_{uu} + \frac{\gamma}{\beta\tau} C_{uu} + K_{uu}$$

$$F_u^{\text{eff}} = Y_i F_u + M_{uu} \cdot Y_i U^p + C_{uu} \cdot \left(\frac{\gamma}{\beta\tau} Y_i U^p - Y_i \dot{U}^p\right)$$

$$F_{\phi}^{\text{eff}} = Y_i F_{\phi} + \zeta_d \left(1 + \frac{\zeta_d \gamma}{\beta\tau}\right)^{-1} \left[ \frac{\gamma}{\beta\tau} Y_i F_{\phi}^p - Y_i \dot{F}_{\phi}^p + K_{u\phi}^* \cdot \left(\frac{\gamma}{\beta\tau} Y_i U^p - Y_i \dot{U}^p\right) \right]$$

для  $Y_i U^p$ ,  $Y_i \dot{U}^p$ ,  $Y_i F_\varphi^p$ ,  $Y_i \dot{F}_\varphi^p$  справедливы выражения вида первых двух соотношений (4.3), для  $Y_i F_u$ ,  $Y_i F_\varphi$  – выражения вида (4.2), а для перехода на следующий временной слой требуется еще формула

$$\mathbf{a}_{i+1} = (Y_i \mathbf{a} - \beta_1 \mathbf{a}_i - \beta_2 \mathbf{a}_{i-1}) / \beta \quad (4.6)$$

следующая из (4.2).

Система уравнений (4.5) относительно вектора осредненных узловых неизвестных  $\{Y_i U, Y_i \Phi\}$  записана в симметричном виде с матрицей  $\mathbf{K}^{\text{eff}}$  седловой структуры [9]

$$\mathbf{K}^{\text{eff}} = \begin{vmatrix} \mathbf{K}_{uu}^{\text{eff}} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{\varphi u}^* & -(1 + \zeta_d \gamma / \beta \tau)^{-1} \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{vmatrix}$$

Эта матрица может быть факторизована по методу квадратного корня [9], и тогда на каждом временном слое можно будет решать только СЛАУ с нижними и верхними треугольными матрицами.

Согласно лемме, представленная здесь схема Ньюмарка математически эквивалентна обычной схеме Ньюмарка со скоростями и ускорениями [1, 11] и, следовательно, безусловно устойчива при  $\beta \geq (\frac{1}{2} + \gamma)^2 / 4$ ,  $\gamma \geq \frac{1}{2}$ , а при  $\beta \geq \frac{1}{4}$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$  она не имеет аппроксимизационной вязкости [11]. Однако схема Ньюмарка (4.5) – (4.6) не использует явно скоростей и ускорений, что предпочтительно для рассматриваемых здесь задач электроупругости, когда в уравнениях отсутствуют скорости и ускорения электрического потенциала.

Отметим, что в обычной формулировке метод Ньюмарка применялся для интегрирования по времени уравнений МКЭ плоских задач электроупругости без учета потерь в [12, 13] и других работах тех же авторов.

**5. Численные эксперименты.** Изложенная методика КЭ-анализа гармонических и нестационарных задач реализована в пакете ACELAN, специально ориентированном на расчет пьезоэлектрических устройств [14]. В ACELAN используется комплекс блочных седловых алгоритмов для различных КЭ-процедур и решения матричных задач МКЭ [3, 9], а поэтому описанные выше схемы оптимальным образом укладываются в общую идеологию пакета.

В качестве примера рассмотрим цилиндрический стержень длиной  $l = 0.040567$  м и радиусом  $R = 0,002$  м. Отнесем стержень к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , направив ось  $x_3$  вдоль оси стержня и расположив оси  $x_1, x_2$  в плоскости его нижнего торца. Пусть стержень выполнен из пьезокерамики PZT-4, поляризованной вдоль длины. Торцы стержня предполагаются полностью электродированными и запитываются разностью потенциалов  $\Delta\varphi = V(t)$ . Будем считать, что нижний торец  $x_3 = 0$  жестко заземлен, а остальные грани стержня свободны от механических напряжений.

В случае действия гармонически изменяющейся разности потенциалов  $V = V_0 \exp[i2\pi ft]$  с частотой  $f = \omega/(2\pi)$  имеем задачу об установившихся колебаниях. Будем рассматривать частоты  $f$ , близкие к первым частотам электрического резонанса  $f_{r1}$  и антирезонанса  $f_{a1}$ . Как известно, для такого случая, когда колебания происходят на пьезожестких модах, важнейшей интегральной характеристикой стержня является величина электрического импеданса

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V}{i\omega Q}, \quad Q = -2\pi \int_0^R D_3 dr \quad \text{при } x_3 = l$$

где  $I$  – ток, а  $Q$  – заряд на верхнем электроде.

Вблизи первых резонансных частот можно воспользоваться одномерной теорией для продольно-поляризованного пьезоэлектрического стержня. В приближении этой стержневой теории при модели демпфирования (1.7), (1.8), (2.1) для электрического

импеданса можно получить представление

$$Z = \frac{1 + i\zeta_d \omega}{i\omega C_0 (1 - k_{33}^2)} \left[ 1 - k_{33}^2 \frac{\operatorname{tg} \Omega l}{\Omega l} \right] \quad (5.1)$$

$$C_0 = \frac{\pi R^2 \varepsilon_{33}^T}{l}, \quad \Omega = \frac{1}{v_3^D} \sqrt{\frac{\omega^2 - i\alpha_d \omega}{1 + i\zeta_d \omega}}$$

Коэффициент электромеханической связи  $k_{33}$  и продольная скорость  $v_3^D$  определяются по обычным для электроупругости формулам [8].

Описанную задачу о гармонических колебаниях стержня решим также в осесимметричной постановке численно на ACELAN.

Коэффициенты демпфирования  $\alpha_d$  и  $\beta_d = \zeta_d$  модели (1.7), (1.8), (2.1) определим по стандартной методике, использующей величины добротности на двух модах. Будем считать, что добротности  $Q$  стержня на резонансных частотах  $f_{r1} = 18.867$  кГц и  $f_{r2} = 73.345$  кГц одинаковы и равны 500. Тогда коэффициенты  $\alpha_d$  и  $\zeta_d$  можно приближенно вычислить по формулам [3], обычным для метода разложения по модам,

$$\alpha_d = \frac{2\pi f_{r1} f_{r2}}{f_{r1} + f_{r2}}, \quad \zeta_d = \frac{1}{2\pi(f_{r1} + f_{r2})} \quad (5.2)$$

что дает  $\alpha_d = 190 \text{ с}^{-1}$ ,  $\zeta_d = 0.345 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ .

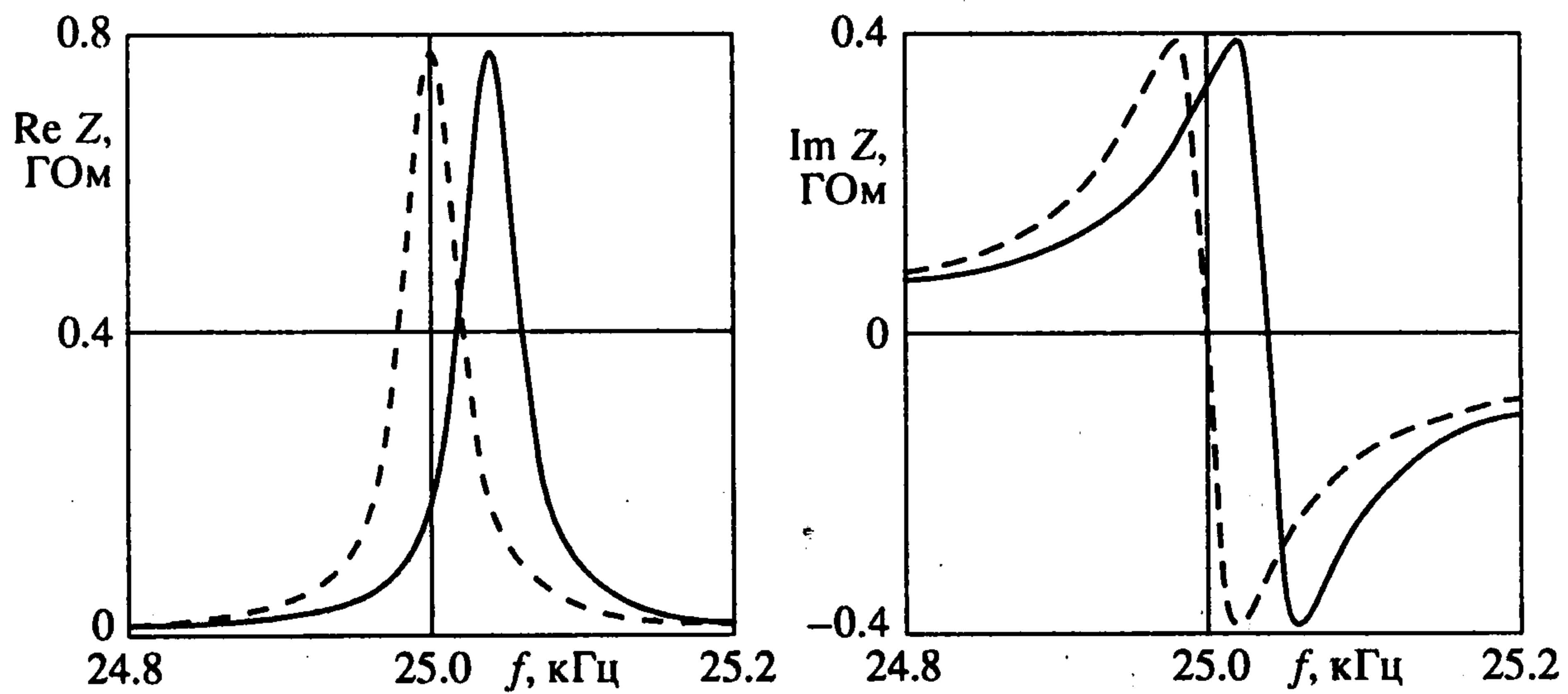
Результаты расчетов на ACELAN зависимостей вещественной ( $\operatorname{Re} Z$ ) и мнимой ( $\operatorname{Im} Z$ ) частей электрического импеданса  $Z$  от частоты вблизи первой частоты электрического антирезонанса  $f_{a1}$  показаны на фиг. 1 ( $V_0 = 10^3 \text{ В}$ ).

При расчетах на ACELAN использовалась неструктурированная КЭ-сетка из 90 треугольных квадратичных пьезоэлектрических осесимметричных элементов с максимальным диаметром  $h = 0,002 \text{ м}$ . При этом общее число узлов КЭ-разбиения было равным 229.

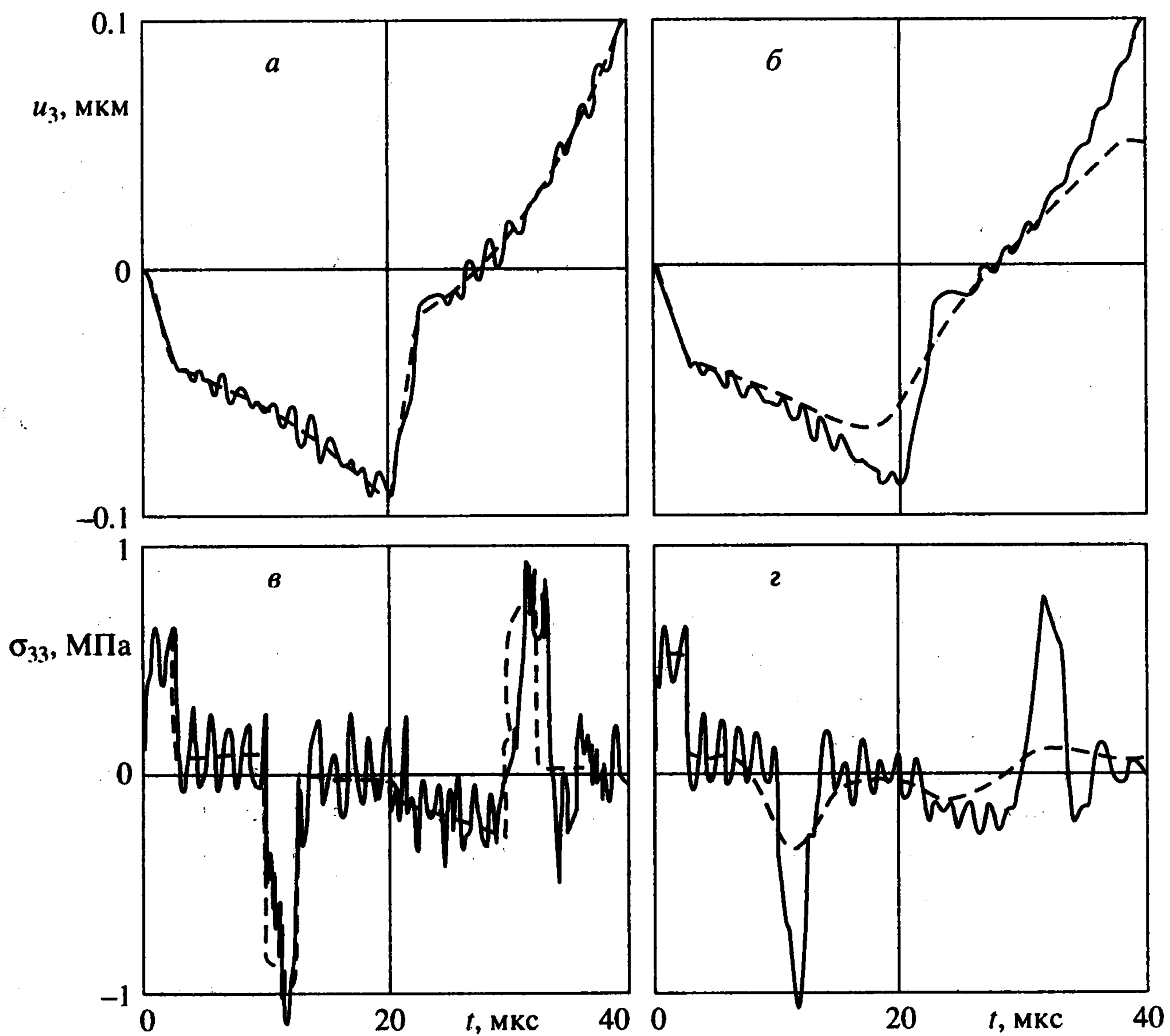
Для сравнения на фиг. 1 и 2 штриховыми линиями показаны графики  $\operatorname{Re} Z$  и  $\operatorname{Im} Z$ , полученные по формулам (5.1) одномерной стержневой теории. Визуальное различие сплошных и штриховых кривых объясняется малым шагом по частоте. Между тем процентное расхождение между ними крайне мало. Так, первая частота антирезонанса, вблизи которой наблюдается максимум  $\operatorname{Re} Z$ , при расчетах на ACELAN получается равной 25039 Гц, а по стержневой модели – 25 000 Гц, т.е. меньше всего на 0.16%. Таким образом, можно заключить, что в окрестности первой антирезонансной частоты стержневая теория позволяет достаточно точно определить импеданс  $Z$  рассматриваемого пьезопреобразователя.

Отметим также, что в трехмерной или в осесимметричной постановках для модели (1.7), (1.8), (2.1) коэффициенты демпфирования  $\alpha_d$  и  $\zeta_d$  логично было задать такими же, как и в одномерном приближении. Это позволило получить практически одинаковые амплитудные значения  $\operatorname{Re} Z$  и  $\operatorname{Im} Z$  как при расчетах по МКЭ осесимметричной задачи, так и при расчетах по формулам стержневой теории. Между тем для модели (1.7), (1.8), (2.1) при  $\zeta_d = 0$ , т.е. для модели, принятой в ANSYS, проблема определения констант демпфирования для сравнения с одномерными задачами является значительно более сложной. Предлагались [3] некоторые довольно громоздкие формулы для вычисления  $\alpha_d$  и  $\beta_d$  (при этом в формуле (5.2) для  $\beta_d$  в [3] допущена ошибка, и для ее устранения следует поменять местами добротности  $Q_1$  и  $Q_2$ ).

Рассмотрим теперь ту же задачу для стержня, но в нестационарной постановке. Пусть на электроды стержня подается разность потенциалов  $V(t)$  в виде следующего импульса:  $V = V_0[H(t) - H(t - t_0)]$ , где  $H(t)$  – функция Хевисайда,  $V_0 = 10^3 \text{ В}$ ,  $t_0 = 0.25 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ . Начальные условия (2.4) примем нулевыми.



Фиг. 1



Фиг. 2

В отсутствии затухания данная нестационарная задача для стержня в одномерном приближении имеет точное решение, которое может быть построено, например, методом отраженно-преломленных волн и с учетом первых трех отражений дается формулами, содержащими характерные экспоненциальные слагаемые

$$u_3(x_3, t) = \chi l u(z, t), \quad \sigma_{33}(x_3, t) = \chi (s_{33}^D)^{-1} \sigma(z, t)$$

$$\chi = V_0 \sqrt{s_{33}^D \epsilon_{33}^S} / l, \quad z = x_3 / l, \quad \tau = t / T_0, \quad \tau_0 = t_0 / T_0, \quad T_0 = l / v_3^D$$

$$\begin{aligned}
u(z, \tau) &= k_{33}(F(z, \tau) - F(z, \tau - \tau_0)), \quad \tau < 4 \\
\sigma(z, \tau) &= u_{,z}(z, \tau) - \alpha u(1, \tau) - k_{33}H(\tau), \quad \alpha = k_{33}^2 \\
F(z, \tau) &= \sum_{\pm} \pm H(\tau - 1 \pm z)(e^{\alpha(\tau - 1 \pm z)} - 1) + \\
&+ \sum_{\pm} \pm H(\tau - 3 \pm z)\{[1 - 2\alpha(\tau - 3 \pm z)]e^{\alpha(\tau - 3 \pm z)} - 1\}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Из структуры формул (5.3) видно, что пьезоэффект значительно усложняет волновую картину в стержне по сравнению с чисто упругим случаем.

Нестационарная задача также была рассчитана в осесимметричной постановке на ACELAN. Шаг по времени принимался равным  $\Delta t = 0.25 \cdot 10^{-6}$  с, а КЭ-сетка была взята такой же, что и в задаче об установившихся колебаниях.

На фиг. 2. приведены графики осевых перемещений  $u_3$  в центре верхнего торца и осевых напряжений  $\sigma_{33}$  в центре нижнего торца. Графики на фиг. 2, а, в были получены без учета демпфирования, т.е. при  $\alpha_d = \beta_d = \zeta_d = 0$ . Сплошными линиями на фиг. 2, а, в показаны результаты расчетов для осесимметричной задачи, а штриховыми линиями – решение одномерной задачи, построенное по формулам (5.3). Поскольку в осесимметричной задаче учитываются как стержневые волновые движения вдоль оси, так и волны, отраженные от боковых граней, различие между сплошными и штриховыми линиями вполне понятно. Тем не менее можно отметить, что и для нестационарного случая решения, полученные по МКЭ на ACELAN и по стержневой теории, оказываются достаточно близкими.

На фиг. 2, б, г приведены результаты ACELAN, полученные с учетом демпфирования по модели (1.7), (1.8), (2.1). Сплошные кривые на фиг. 2, б, г соответствуют результатам расчетов при реальных для пьезокерамики PZT-4 значениях коэффициентов демпфирования  $\alpha_d = 190 \text{ с}^{-1}$ ,  $\zeta_d = 0.345 \cdot 10^{-8}$  с, вычисленных по соотношениям (5.2).

Из сравнения фиг. 2, б, г и фиг. 2, а, в видно, что в рассматриваемой задаче реальное затухание при малых временах лишь незначительно изменяет волновые картины. Искусственно увеличив коэффициенты  $\alpha_d$  и  $\zeta_d$  в 100 раз, получаем значительно более сглаженные графики перемещений и напряжений с меньшими амплитудами, показанные на фиг. 2, б, г штриховыми линиями.

Приведенный пример был выбран также с целью сравнения результатов численных расчетов, полученных в комплексе ACELAN, с аналитическим решением. Отметим, что при одинаковых коэффициентах затухания  $\alpha_d$  и  $\beta_d$  ( $\zeta_d = 0$ ) различные результаты ACELAN сравнивались с аналогичными результатами программы ANSYS и были получены практически идентичные результаты.

Авторы благодарят коллег по разработке пакета ACELAN О.Н. Акопова, К.А. Надолина и А.С. Скалиуха, результаты которых использовались при проведении расчетов.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01001) и программы "Университеты России" (015.03.01.16).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. ANSYS. Theory Reference. Rel. 5.5. / Ed. P. Kothnke. ANSYS Inc. Canonsburg, 1998.
2. COSMOS/M. V. 2.0. Advanced Modules Manuals ASTAR. Structural Research and Analysis Corp., 1997.
3. Белоконь А.В., Еремеев В.А., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. Блочные схемы метода конечных элементов для динамических задач акустоэлектроупругости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 381–393.

4. *Белоконь А.В., Еремеев В.А., Наседкин А.В., Соловьев А.Н.* О некоторых методах гармонического конечно-элементного анализа пьезоэлектрических устройств // Современные проблемы механики сплошной среды. Тр. 5-й Междунар. конф. Ростов-на-Дону, 1999. Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ, 2000. Т. 2. С. 26–30.
5. *Наседкин А.В.* Особенности учета демпфирования в конечно-элементном пьезоэлектрическом анализе // Пьезотехника-2000. Материалы Междунар. научно-практич. конф. "Фундамент. проблемы пьезоэлектрического приборостроения". Москва, 2000. М.: МИРЭА, 2000. С. 154–158.
6. *Наседкин А.В.* Новая модель учета демпфирования для конечно-элементного пьезоэлектрического анализа // Современные проблемы механики и прикладной математики. Материалы Школы-семинара, Воронеж. Воронеж: ВГУ, 2000. Ч. 2. С. 319–323.
7. *Yi S., Ling S.F., Ying M., Hilton H.H., Vinson J.R.* Finite element formulation for anisotropic coupled piezoelectro-hygro-thermo-viscoelastodynamic problems // Intern. J. Num. Meth. Eng. 1999. V. 45. № 11. P. 1531–1546.
8. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. Киев: Наук. думка, 1989. 280 с. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5.
9. *Акопов О.Н., Белоконь А.В., Надолин К.А., Наседкин А.В., Скалиух А.С., Соловьев А.Н.* Симметричные седловые алгоритмы конечно-элементного анализа составных пьезоэлектрических устройств // Мат. моделирование. 2001. Т. 13. № 2. С. 51–60.
10. *Еремеев В.А., Курбатова Н.В., Наседкин А.В., Соловьев А.Н.* К расчету по МКЭ собственных колебаний упругих и пьезоэлектрических тел с граничными условиями контактного типа // Современные проблемы математического моделирования. Тр. 8-й Всерос. школы-семинара. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1999. С. 80–89.
11. *Bathe K.-J., Wilson E.L.* Numerical Methods in Finite Element Analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall; 1976. = *Bate K., Вильсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 446 с.
12. *Кажис Р.-И.Ю., Мажейка Л.Ю.* Исследование переходных процессов в плоских пьезоизлучателях методом конечных элементов // Дефектоскопия. 1986. № 12. С. 3–11.
13. *Кажис Р.-И.Ю., Мажейка Л.Ю.* Анализ нестационарного режима пьезопреобразователей конечных размеров методом конечных элементов // Акуст. журн. 1987. Т. 33, № 5. С. 895–902.
14. *Акопов О.Н., Белоконь А.В., Еремеев В.А., Надолин К.А., Наседкин А.В., Скалиух А.С., Соловьев А.Н.* Об опыте разработки конечноэлементного пакета ACELAN для расчета пьезоэлектрических устройств // Тр. Междунар. научно-практич. конф. "Фунд. пробл. пьезоэлектрического приборостроения" ("Пьезотехника-99"), Ростов-на-Дону, Азов, 1999. Ростов н/Д, 1999. Т. 2. С. 241–251.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
24.VII.2001

e-mail: [nasedkin@math.rsu.ru](mailto:nasedkin@math.rsu.ru),  
[soloviev@math.rsu.ru](mailto:soloviev@math.rsu.ru)