

УДК 539.3

© 2002 г. Е.В. Диденко, Ю.А. Устинов

**КРИТИЧЕСКИЕ МОДЫ КОЛЕБАНИЙ  
ПОПЕРЕЧНО-НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ  
ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ**

На основе трехмерных уравнений теории упругости рассматривается задача о гармонических колебаниях поперечно-неоднородной пластины, физико-механические свойства которой описываются произвольными кусочно-непрерывными функциями. Получено общее представление решения, и на его основе разделением переменных исходная задача при однородных граничных условиях на лицевых поверхностях пластины сведена к двум спектральным задачам с парой спектральных параметров, роль которых выполняет круговая частота и волновое число. Особое внимание уделяется критическим частотам, при которых в спектре волновых чисел существуют кратные собственные значения. Дается их классификация, и получены дифференциальные уравнения, описывающие распределение критических мод в области, занятой пластиной. Построенная общая теория совместно с теорией Флоке–Ляпунова применяется к пластинам с периодической поперечной неоднородностью. Расчеты проведены для мелкослойной пластины с чередующимися жесткими (стальными) и мягкими (резиновыми) слоями.

Исследование распространения гармонических волн в полуограниченных телах и колебания пластин сводится к спектральным задачам относительно пары параметров  $(k, \omega)$ , где  $k$  – волновое число,  $\omega$  – круговая частота. В большинстве работ, посвященных этой проблеме, как правило, оставался в стороне вопрос математического описания множества мод, соответствующих кратному волновому числу. Для значения частоты в таких случаях используются различные термины: критическая частота, частота запирания, частота отсечки, резонансная частота. На примере анизотропной поперечно-неоднородной полосы было показано [1, 2], что критические моды могут иметь степенной рост; этот результат был обобщен [3–6] на произвольные твердые волноводы с одной осью распространения нормальных волн. В связи с исследованием взаимодействия дисперсионного и диссипативного затухания нормальных волн была дана [7, 8] полная классификация критических частот однородной пластины, а для описания распределения критических мод получены двумерные уравнения. Аналогичный результат был анонсирован для поперечно-неоднородных пластин из упругих [9] и пьезоактивных материалов [10]. Ниже излагаются результаты исследования проблемы для мелкослойной пластины периодической структуры.

**1. Общее представление решения.** Обозначим через  $V = S \times [z^-, z^+]$  область, занимаемую пластиной, где  $x_1, x_2 \in S, x_3 = z \in \infty [z^-, z^+]$ . В области  $V$  рассмотрим уравнения стационарных колебаний одномерно-неоднородной трансверсально-изотропной среды. Имеем

$$\begin{aligned} \partial(c_{44}\partial_1 u_1 + c_{44}\partial_1 u_3) + c_{13}\partial\partial_1 u_3 + (c_{11}\partial_1^2 + c_{66}\partial_2^2)u_1 + (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2 u_2 + \rho\omega^2 u_1 &= 0 \\ \partial(c_{44}\partial_2 u_2 + c_{44}\partial_2 u_3) + c_{13}\partial\partial_2 u_3 + (c_{12} + c_{66})\partial_1\partial_2 u_1 + (c_{66}\partial_1^2 + c_{11}\partial_2^2)u_2 + \rho\omega^2 u_2 &= 0 \\ \partial(c_{33}\partial_3 u_3 + c_{13}\partial_1 u_1 + c_{13}\partial_2 u_2) + c_{44}\partial\partial_1 u_1 + c_{44}\partial\partial_2 u_2 + c_{44}\Delta u_3 + \rho\omega^2 u_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\partial_\alpha = \partial / \partial x_\alpha, \quad \partial = \partial / \partial z, \quad \Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 \quad (\alpha = 1, 2), \quad 2c_{66} = c_{11} - c_{12}$$

Здесь  $u_j$  – амплитуды смещений ( $j = 1, 2, 3$ );  $c_{ij} = c_{ij}(z)$ ,  $\rho = \rho(z)$  – модули упругости и плотность соответственно, о которых предполагается, что они являются кусочно-непрерывными функциями  $z$ ;  $\omega$  – круговая частота гармонических колебаний. В случае изотропного материала

$$c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu, \quad c_{44} = c_{66} = \mu, \quad c_{12} = c_{13} = \lambda$$

где  $\lambda, \mu$  – упругие параметры Ламе.

Представим плоское поле  $\mathbf{u}^0 = \{u_1, u_2\}$  в виде потенциальной и вихревой частей, положив

$$u_1 = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2, \quad u_2 = \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2 \quad (1.2)$$

После подстановки выражений (1.2) в систему (1.1) и преобразований первых двух уравнений получаем

$$\begin{aligned} \partial_1 L_1(v_1, u_3) + \partial_2 L(v_2) &= 0, & \partial_2 L_1(v_1, u_3) - \partial_1 L(v_2) &= 0 \\ L_1(v_1, u_3) &= \partial(c_{44} \partial v_1 + c_{44} u_3) + c_{13} \partial u_3 + c_{11} \Delta v_1 + \rho \omega^2 v_1 \\ L(v_2) &= \partial(c_{44} \partial v_2) + c_{66} \Delta v_2 + \rho \omega^2 v_2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

а третье уравнение (1.1) дает

$$L_2(v_1, u_3) = \partial(c_{33} \Delta u_3 + c_{13} \Delta v_1) + c_{44} (\partial \Delta v_1 + \Delta u_3) + \rho \omega^2 u_3 = 0$$

Поскольку соотношения (1.3) совпадают с тождествами Коши – Римана для сопряженных гармонических функций, то исходная система уравнений (1.1) эквивалентна следующей:

$$L(v_2) = g_2, \quad L_1(v_1, u_3) = g_1, \quad L_2(v_1, u_3) = 0 \quad (1.4)$$

где  $g_1, g_2$  – сопряженные гармонические функции переменных  $x_1, x_2$ , которые вообще говоря, зависят и от  $z$ . В качестве частного решения неоднородной системы уравнений (1.4) можно взять следующее:

$$v_2 = v_2^0, \quad v_1 = v_1^0, \quad u_3 = 0 \quad (1.5)$$

где  $v_1^0, v_2^0$  – решения уравнений

$$\partial(c_{44} \partial v_\alpha^0) + \rho \omega^2 v_\alpha^0 = g_\alpha$$

при произвольных граничных условиях на лицевых поверхностях  $z = z^\pm$ . Пользуясь этим произволом, для любого значения  $\omega$  задачи построения  $v_\alpha^0$  можно всегда сделать обратимыми и представить их решения в виде

$$v_\alpha^0 = \int_{z^-}^{z^+} K(z-y) g_\alpha(x_1, x_2, y) dy \quad (1.6)$$

Из выражений (1.2), (1.3), (1.6) вытекает равенство

$$u_1^0 = \partial_1 v_1^0 + \partial_2 v_2^0 = 0, \quad u_2^0 = \partial_2 v_1^0 - \partial_1 v_2^0 = 0 \quad (1.7)$$

и, следовательно, поля смещений, соответствующие частному решению, тождественно равны нулю. Поэтому можно положить  $g_1 = g_2 = 0$ . Таким образом, исходная система уравнений (1.1) расчленяется на уравнение относительно функции  $v_2$

$$L(v_2) = 0 \quad (1.8)$$

и систему уравнений относительно пары функций  $v_1, u_3$

$$L_\alpha(v_1, u_3) = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.9)$$

Будем полагать, что при  $z = z^\pm$  заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha 3} |_{z=z^\pm} &= (c_{44}\partial u_1 + c_{44}\partial_1 u_3) |_{z=z^\pm} = q_\alpha^\pm(x_1, x_2) \\ \sigma_{33} |_{z=z^\pm} &= (c_{33}\partial u_3 + c_{13}\partial_1 u_1 + c_{13}\partial_2 u_2) |_{z=z^\pm} = q^\pm(x_1, x_2)\end{aligned}\quad (1.10)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений.

Покажем, что приведенные выше граничные условия также можно расчленить и в случае неограниченного слоя получить несвязанные краевые задачи относительно функции  $v_2$  и функций  $v_1, u_3$ .

Действительно, представим функции  $q_1, q_2$  в виде

$$q_1^\pm = \partial_1 \tau_1^\pm + \partial_2 \tau_2^\pm, \quad q_2^\pm = \partial_2 \tau_1^\pm - \partial_1 \tau_2^\pm \quad (1.11)$$

Подставляя выражения (1.2), (1.11) в условия (1.10), после преобразований получаем

$$\begin{aligned}M(v_2) |_{z=z^\pm} &\equiv c_{44}\partial v_2 |_{z=z^\pm} = \tau_2^\pm + f_2^\pm \\ M_1(v_1, u_3) |_{z=z^\pm} &\equiv [c_{44}(\partial v_1 + u_3)] |_{z=z^\pm} = \tau_1^\pm + f_1^\pm \\ M_2(v_1, u_3) |_{z=z^\pm} &\equiv (c_{33}\partial u_3 + c_{13}\Delta v_1) |_{z=z^\pm} = q^\pm\end{aligned}\quad (1.13)$$

Здесь  $f_1^\pm(x_1, x_2), f_2^\pm(x_1, x_2)$  – сопряженные гармонические функции.

Можно показать, что для всех значений  $\omega$  при которых задача

$$\partial[c_{44}\partial\phi(z)] + \rho\omega^2\phi(z) = 0, \quad \partial\phi(\pm h) = 0 \quad (1.14)$$

имеет только тривиальное решение, можно положить  $f_\alpha^\pm(x_1, x_2) = 0$ . Значения  $\omega$ , при которых задача (1.14) имеет нетривиальное решение, относятся к разряду критических, и соответствующие решения будут построены ниже.

**2. Однородные решения.** В граничных условиях (1.13) правые части приравняем к нулю и решения соответствующих однородных краевых задач будем отыскивать в виде

$$v_2 = a(z)m_2(x_1, x_2), \quad v_1 = a_1(z)m_1(x_1, x_2), \quad u_3 = ika_2(z)m_1(x_1, x_2) \quad (2.1)$$

$$\Delta m_\alpha + k^2 m_\alpha = 0$$

После подстановки выражений (2.1) в уравнения (1.8), (1.9) и граничные условия (1.13) и разделения переменных получаем спектральные задачи

$$(c_{44}a')' + (\rho\omega^2 - k^2 c_{44})a = 0, \quad a'(z^\pm) = 0 \quad (2.2)$$

$$(Ca')' + ik[(Ba)' + B^*a'] - k^2 Aa + \rho\omega^2 a = 0 \quad (Ca' + ikBa) |_{z=z^\pm} = 0 \quad (2.3)$$

Здесь  $\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}$  – вектор-функция, штрих означает производную по  $z$ ,  $\mathbf{C} = \|C_{ij}\|$ ,  $\mathbf{B} = \|B_{ij}\|$ ,  $\mathbf{A} = \|A_{ij}\|$  – матрицы-функции ( $\mathbf{B}^*$  – матрица, транспонированная к матрице  $\mathbf{B}$ ), со следующими отличными от нуля элементами:

$$C_{11} = c_{44}, \quad C_{22} = c_{33}, \quad B_{12} = c_{44}, \quad B_{21} = c_{13}, \quad A_{11} = c_{11}, \quad A_{22} = c_{44}$$

Обозначим через  $\Lambda_1, \Lambda_2$  спектры задач (2.3), (2.4) по параметру  $k$ .

**Утверждение 1.** При любом вещественном значении частоты  $\omega$  спектр  $\Lambda = \Lambda_{\beta r} \cup \cup \Lambda_{\beta k}$  ( $\beta = 1, 2$ ), где подмножество  $\Lambda_{\beta r}$  содержит конечное число  $2R$  собственных значений (СЗ), симметрично расположенных на вещественной оси,  $\Lambda_{1k}$  – неограниченное симметричное множество, состоящее из вещественных СЗ,  $\Lambda_{2k}$  – симметричные неограниченные множества комплексных СЗ (чисто мнимые СЗ также будем относить к категории комплексных).

Если  $k_\nu \in \Lambda_1$ ,  $k_p \in \Lambda_2$  – простые СЗ, то им соответствуют однородные элементарные решения первого (индекс  $\nu$ ) и второго (индекс  $p$ ) рода, которые определяются выражениями

$$u_{1\nu} = a_{2\nu}(z)\partial_2 m_{2\nu}, \quad u_{2\nu} = -a_{1\nu}(z)\partial_1 m_{2\nu}, \quad u_{z\nu} = 0 \quad (2.4)$$

$$\Delta m_{2\nu} + k_\nu^2 m_{2\nu} = 0, \quad m_{2\nu} = m_{2\nu}(x_1, x_2)$$

$$u_{1p} = a_{1p}(z)\partial_1 m_{1p}, \quad u_{2p} = a_{1p}(z)\partial_2 m_{1p}, \quad u_{zp} = ik_p a_{2p}(z)m_{1p} \quad (2.5)$$

$$\Delta m_{1p} + k_p^2 m_{1p} = 0, \quad m_{1p} = m_{1p}(x_1, x_2)$$

**Теорема.** Если спектры  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  состоят только из простых СЗ, то любое однородное решение (решение, удовлетворяющее однородным граничным условиям (1.10)) может быть представлено конечной или бесконечной суммой элементарных решений (2.4) и (2.5); при этом, если  $S$  – неограниченная область, решения уравнений Гельмгольца для вещественных значений  $k_\nu, k_p$  могут быть выбраны из условия энергетического принципа излучения [2, 7, 8], для комплексных значений – из условия затухания.

*Замечание 1.* Доказательство аналогичной теоремы о полноте систем однородных элементарных решений, приведенное ранее [11] для статической задачи, с незначительными изменениями переносится на рассматриваемый случай.

**3. Критические частоты и моды.** Частоту  $\omega_c$  будем называть критической, если среди СЗ  $k_n \in \Lambda_j(\omega)$  существует кратное СЗ  $k_c$ . Пару  $(k_c, \omega_c)$  назовем критической, а элементарные решения, соответствующие критической паре, будем называть критическими модами.

Рассмотрим случай, когда  $k_c = 0$ . Подстановка  $k = 0$  в задачу (2.2) приводит к следующей задаче для определения множества критических частот:

$$(c_{44}a'_0)' + \rho\omega^2 a_0 = 0, \quad a_0(z^\pm) = 0 \quad (3.1)$$

Подстановка  $k = 0$  в (2.3) приводит к двум задачам для определения множества критических частот

$$(c_{44}a'_{01})' + \rho\omega^2 a_{01} = 0, \quad a'_{01}(z^\pm) = 0 \quad (3.2)$$

$$(c_{33}a'_{02})' + \rho\omega^2 a_{02} = 0, \quad a'_{02}(z^\pm) = 0 \quad (3.3)$$

Рассмотрим вначале задачи (3.1), (3.2), которые хотя и совпадают, но являются следствием двух различных задач (2.2), (2.3). Множества значений  $\omega = \omega_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ), при которых эти задачи имеют нетривиальные решения, назовем критическими частотами первого рода. Соответствующие собственные функции  $a_0, a_{01}$  обозначим через  $\varphi_{0r}$ . При этом собственный вектор задачи (2.3) имеет вид  $\mathbf{a}_{0r} = \{\varphi_{0r}, 0\}$ . Поскольку  $k = 0$  – кратное СЗ, то корневые подпространства исходной задачи (2.3) не исчерпываются собственным вектором. Как показывают исследования [6, 7], проведенные для однородной пластины, в зависимости от параметров возможны различные варианты задачи (2.3). Обратимся к их описанию.

Для этого рассмотрим задачу (2.3) и составим уравнения для определения присоединенных векторов. Имеем

$$Z(0, \omega_r)\mathbf{a}_{mr} = \mathbf{F}_{mr}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

$$\mathbf{F}_{1r} = -\partial_k Z(0, \omega_r)\mathbf{a}_{0r}, \quad \mathbf{F}_{mr} = -\partial_k Z(0, \omega_r)\mathbf{a}_{m-1r} - \frac{1}{2}\partial_k^2 Z(0, \omega_r)\mathbf{a}_{m-2r}$$

$$Z(k, \omega)\mathbf{a} \equiv \{(\mathbf{C}\mathbf{a}) + ik[(\mathbf{B}\mathbf{a})' + \mathbf{B}^*\mathbf{a}'] - k^2\mathbf{A}\mathbf{a} + \rho\omega^2\mathbf{a} = 0, \quad (\mathbf{C}\mathbf{a} + ik\mathbf{B}\mathbf{a})|_{z=z^\pm}\}$$

Здесь  $\partial_k$  – производная по спектральному параметру  $k$ .

Поскольку каждая из задач (3.4) является "задачей на спектре", то существование их решений возможно только при выполнении условий

$$d_{mr} = \int_{z^-}^{z^+} F_{mrj} \bar{a}_{0rj} dz = 0$$

При  $m = 1$  из уравнения (3.4) вытекает, что  $\mathbf{a}_{1r} = \{\varphi_{0r}, ia_{1r2}\}$ , где  $a_{1r2}$  определяются решениями задачи

$$(c_{44}a'_{1r2})' + \rho\omega_r^2 a_{1r2} + (c_{13}\varphi_{0r})' + c_{44}\varphi'_{0r} = 0, \quad (c_{44}a'_{1r2} + c_{13}\varphi_{0r})|_{z=z^\pm} = 0 \quad (3.5)$$

При этом

$$d_{1r} = \int_{z^-}^{z^\pm} [(c_{13}a'_{1r2})\bar{\varphi}_{0r} - (c_{44}a_{12})\bar{\varphi}'_{0r} + c_{11}\varphi_{0r}\bar{\varphi}_{0r}] dz \quad (3.6)$$

Если  $d_{1r} \neq 0$ , то жорданова цепочка исчерпывается двумя векторами  $\mathbf{a}_{0r}$ ,  $\mathbf{a}_{1r}$ , если  $d_{1r} = 0$ , то существует еще по крайней мере пара присоединенных векторов  $\mathbf{a}_{2r}$ ,  $\mathbf{a}_{3r}$ .

Рассмотрим теперь задачу о построении элементарных решений (мод), соответствующих критическим парам  $(0, \omega_r)$ . В этом случае значение  $k_c = 0$  по совокупности элементарных решений первого и второго рода является четырехкратным, если  $d_{1r} \neq 0$ , и имеет более высокую кратность (всегда четную), если  $d_{1r} = 0$ . Для получения системы дифференциальных уравнений, описывающих распределение амплитуд критических мод по переменным  $x_1, x_2$ , можно воспользоваться приемом, использованным ранее [12, 13].

*Утверждение 2.* Пусть  $d_{1r} \neq 0$ . Тогда множество элементарных решений, соответствующих критической паре  $(0, \omega_r)$ , определяется соотношениями

$$u_\alpha = \varphi_{0r} b_\alpha(x_1, x_2) + a_{2r1} \partial_\alpha \theta, \quad u_3 = a_{1r2} \theta, \quad \theta = \partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 \quad (3.7)$$

$$(\lambda_r + \mu_r) \partial_1 \theta + \mu_r \Delta b_1 = 0, \quad (\lambda_r + \mu_r) \partial_2 \theta + \mu_r \Delta b_2 = 0 \quad (3.8)$$

$$\mu_r = \int_{z^-}^{z^+} c_{66} \varphi_{0r} \bar{\varphi}_{0r} dz, \quad \lambda_r = d_{1r} - 2\mu_r$$

Здесь  $a = a_{2r1}$  – решение задачи

$$(c_{44}a')' + \rho\omega_r^2 a + (c_{44}a_{1r2})' + c_{13}a'_{1r2} + (c_{12} - c_{66}\lambda_r / \mu_r)\varphi_{0r} = 0$$

$$(c_{44}a' + c_{44}a_{1r2})|_{z=z^\pm} = 0$$

*Замечание 2.* Уравнения (3.8) по форме совпадают с уравнениями плоской теории упругости.

*Утверждение 3.* Если  $d_{1r} = 0$  (первый особый случай), то существуют по крайней мере еще два присоединенных вектора  $\mathbf{a}_{2r} = \{-a_{2r1}, 0\}$ ,  $\mathbf{a}_{3r} = \{0, -ia_{3r2}\}$ , где  $a_{3r2}$  – решение задачи

$$(c_{44}a'_{3r2})' + \rho\omega_r^2 a_{3r2} + (c_{13}a_{2r1})' + c_{44}a'_{2r1} + c_{44}a_{1r2} = 0$$

$$(c_{44}a'_{3r2} + c_{13}a_{2r1})|_{z=z^\pm} = 0 \quad (3.9)$$

Критические моды в этом случае определяются соотношениями

$$u_\alpha = \varphi_{0r} b_\alpha + a_{2r1} \partial_\alpha \theta, \quad u_3 = a_{1r2} \theta + a_{3r2} C$$

Здесь  $C$  – произвольная постоянная, а функции  $b_1, b_2$  удовлетворяют уравнениям

$$\Delta(\partial_1^2 b_1 + \partial_1 \partial_2 b_2) = 0, \quad \Delta(\partial_1 \partial_2 b_1 + \partial_2^2 b_2) = 0 \quad (3.10)$$

*Замечание 3.* Соотношения (3.7), (3.8) допускают частные решения вида

$$u_\alpha = \varphi_{0r} C_\alpha, \quad u_3 = 0$$

где  $C_\alpha$  – постоянные. Такие решения описывают один из типов резонансов слоя, который естественно назвать продольным.

Приведем теперь основные результаты для случая, когда нетривиальное решение имеет задача (3.5). Соответствующие значения  $\omega = \omega_q$  ( $q = 0, 1, \dots$ ) будем называть критическими частотами второго рода. Каждой критической частоте второго рода соответствует собственный вектор  $\mathbf{a}_{0q} = \{0, a_{0q2}\}$  и один присоединенный  $\mathbf{a}_{1q} = \{ia_{1q1}, 0\}$ , если

$$d_{2q} \neq 0 \tag{3.11}$$

$$d_{2q} = \int_{z^-}^{z^+} [a_{1q1}(c_{13}a'_{0q2}) - a'_{1q1}(c_{44}a_{0q2}) - c_{44}a_{0q2}^2] dz$$

где  $a_{1q1}$  – решение задачи

$$(c_{44}a'_{1q1})' + \rho\omega_q^2 a_{1q1} + c_{44}a_{0q} + c_{13}a'_{0q2} = 0$$

$$(c_{44}a'_{1q1} + c_{44}a_{0q2})|_{z=z^\pm} = 0$$

*Утверждение 4.* Если выполняется условие (3.11), то множество критических мод, соответствующих критической паре  $(0, \omega_q)$ , описывается соотношениями

$$u_\alpha = a_{1q1} \partial_\alpha m, \quad u_3 = a_{0q2} m, \quad \Delta m = 0 \tag{3.12}$$

*Замечание 4.* Соотношения (3.12) допускают решение вида

$$u_\alpha = 0, \quad u_3 = a_{0q2} C$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Эти решение естественно интерпретировать как поперечные резонансы неограниченного слоя.

*Утверждение 5.* Если  $d_{2q} = 0$  (второй особый случай), то существуют по крайней мере еще два присоединенных вектора  $\mathbf{a}_{2q} = \{0, -a_{2q2}\}$ ,  $\mathbf{a}_{3q} = \{-ia_{3q1}, 0\}$ , компоненты которых определяются решениями задач

$$(c_{33}a'_{2q2})' + \rho\omega_q^2 a_{2q2} + (c_{13}a_{1q1})' + c_{44}a'_{1q1} + c_{44}a_{0q2} = 0$$

$$(c_{33}a'_{2q2} + c_{13}a_{1q1})|_{z=z^\pm} = 0$$

$$(c_{44}a'_{3q1})' + \rho\omega_q^2 a_{3q1} + (c_{44}a_{2q2})' + c_{13}a'_{2q2} + c_{11}a_{3q1} = 0$$

$$(c_{44}a'_{3q1} + c_{44}a_{2q2})|_{z=z^\pm} = 0$$

а критические моды определяются соотношениями

$$u_\alpha = a_{1q1} \partial_\alpha m + a_{3q1} \partial_\alpha \Delta m, \quad u_3 = a_{0q2} m + a_{2q2} \Delta m, \quad \Delta^2 m = 0$$

*Утверждение 6.* Если в спектрах  $\Lambda_1, \Lambda_2$  есть одинаковые по величине критические частоты первого и второго рода ( $\omega_c = \omega_r = \omega_q$ , третий особый случай), то спектральной паре  $(0, \omega_c)$  соответствуют продольная и поперечная критические моды вида

$$u_\alpha = a_{0r1} b_\alpha, \quad u_3 = 0, \quad \partial_1 b_1 + \partial_2 b_2 = 0, \quad \partial_2 b_1 - \partial_1 b_2 = 0$$

$$u_\alpha = 0, \quad u_3 = a_{0q2}$$

*Замечание 5.* Одним из признаков существования такой пары решений является обращение в бесконечность инвариантов жордановых цепочек  $d_{1r}, d_{2q}$ .

Описанные случаи критических частот и мод не исчерпывают всех возможных. В частности, можно показать, что если  $d_{1r} < 0$  ( $d_{2q} < 0$ ), то дисперсионная кривая  $\omega = \omega(k)$ , выходящая из точки  $(0, \omega_r)$  ( $(0, \omega_q)$ ), всегда имеет локальный минимум со значением  $k_c \neq 0$ , которое является кратным.

**4. Спектры критических частот поперечно-неоднородных пластин периодической структуры.** Положим

$$z^- = 0, \quad z^+ = H = Nh + \varepsilon, \quad 0 \leq \varepsilon < h, \quad z_s = hs, \quad s = 0, 1, \dots, N$$

где  $N$  – натуральное число, и рассмотрим задачу

$$(ca') + (\rho\omega^2 - ck^2)a = 0 \quad (4.1)$$

$$a'(0) = a'(H) = 0 \quad (4.2)$$

где  $c = c(z)$ ,  $\rho = \rho(z)$  – периодические функции с периодом  $h$ . Очевидно, что задачи (2.2), (3.2), (3.3) – частные случаи задачи (4.1), (4.2).

Опираясь на теорию Флоке–Ляпунова [14], общее решение уравнения (4.1) можно представить в виде

$$a = A_1 r_1^s y_1(z - z_s) + A_2 r_2^s y_2(z - z_s), \quad z_s \leq z \leq z_{s+1} \quad (4.3)$$

где  $A_1, A_2$  – произвольные постоянные,  $z_s = sh$  ( $s = 0, 1, \dots, N-1$ ),  $y_1(z), y_2(z)$  – пара линейно независимых решений уравнения (4.1) на отрезке  $z \in [0, h]$ ,  $r_1, r_2 = r_1^{-1}$  – корни (мультипликаторы) возвратного уравнения

$$r^2 - 2b(k, \omega)r + 1 = 0; \quad r_1 = b + (b^2 - 1)^{1/2} \quad (4.4)$$

*Замечание 6.* Если в уравнении (4.4) положить  $k = 0$ ,  $r = e^{i\beta h}$ , получим дисперсионное уравнение  $\cos \beta = b(\omega)$  нормальных волн в неограниченной слоистой среде, которые в соответствии с теорией Флоке могут быть представлены в виде  $u = e^{i\beta z} y(z)$ , где  $y(z)$  –  $h$ -периодическая функция. При этом условие  $b(\omega) < 1$  определяет полосы пропускания, условие  $b(\omega) > 1$  – полосы запираания [15]. Случай  $c = c_{33}$  соответствует продольно-поляризованным волнам, случай  $c = c_{44}$  – поперечно-поляризованным волнам.

Подставляя выражение (4.3) в граничные условия (4.2), получаем

$$y_1'(0)A_1 + y_2'(0)A_2 = 0, \quad r_1^N y_1'(\varepsilon)A_1 + r_1^{-N} y_2'(\varepsilon)A_2 = 0 \quad (4.5)$$

Из условия существования нетривиального решения системы (4.5) вытекает, что

$$y_2'(0)y_1'(\varepsilon)r_1^N - y_1'(0)y_2'(\varepsilon)r_1^{-N} = 0 \quad (4.6)$$

В исследуемой проблеме интерес представляет случай, когда  $b(k, \omega) < 1$ . В этом случае  $A_2 = \bar{A}_1, y_2 = \bar{y}_1$ . При этом уравнение (4.6) в результате подстановки  $r_1 = e^{i\beta h}$  преобразуется в следующее:

$$\sin(N\beta h + \tau) = 0, \quad \operatorname{tg} \tau = \operatorname{Im} w / \operatorname{Re} w, \quad w = y_1'(\varepsilon)\bar{y}_1'(0) \quad (4.7)$$

Обозначим  $\beta_m = (m\pi - \tau)/hN$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) корни уравнения (4.7). Обращаясь к уравнению (4.4) и учитывая, что

$$r + r^{-1} = 2 \cos(h\beta), \quad \cos(h\beta_{2N+m}) = \cos(h\beta_m)$$

получаем  $2N$  дисперсионных уравнений

$$F_j(k, \omega) = b(k, \omega) - \cos(h\beta_j) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 2N - 1 \quad (4.8)$$

В случае  $k = 0$ ,  $c = c_{44}$  ( $F_j(0, \omega) = F_{1j}(0, \omega)$ ) соотношения (4.8) определяют спектр  $S_1$  критических частот первого рода, в случае  $k = 0$ ,  $c = c_{33}$  ( $F_j(0, \omega) = F_{2j}(0, \omega)$ ) – спектр  $S_2$  критических частот второго рода. Из соотношений (4.8) также вытекает, что при произвольных кусочно-непрерывных функциях  $c(z)$ ,  $\rho(z)$  имеем

$$S_\alpha = \bigcup_{j=0}^{2N-1} S_{\alpha j}, \quad \alpha = 1, 2$$

где  $S_{\alpha j}$  – множество корней функций  $F_{\alpha j}(0, \omega)$ . Если  $H = Nh$ , то  $\tau = 0$ . В этом случае  $\cos(h\beta_{2N-n}) = \cos(h\beta_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$

**5. Некоторые результаты численного анализа для мелкослойной пластины.** Рассмотрим случай, когда

$$c = c^{(1)}, \rho = \rho^{(1)} \text{ при } z_s \leq z \leq z_s + h_1$$

$$c = c^{(2)}, \rho = \rho^{(2)} \text{ при } z_s + h_1 \leq z \leq z_{s+1}$$

Здесь  $c^{(1)}$ ,  $\rho^{(1)}$ ,  $c^{(2)}$ ,  $\rho^{(2)}$  – постоянные. Структуру, удовлетворяющую этим условиям, будем называть [16, 17] мелкослойной. В этом случае

$$b(k, \omega) = \cos \gamma_1 h_1 \cos \gamma_2 h_2 - \frac{1}{2}(p + p^{-1}) \sin \gamma_1 h_1 \sin \gamma_2 h_2$$

$$\gamma_1 = \sqrt{k_1^2 - k^2}, \quad \gamma_2 = \sqrt{k_2^2 - k^2}, \quad k_\alpha = \omega / v^{(\alpha)}, \quad v^{(\alpha)} = (c^{(\alpha)} / \rho^{(\alpha)})^{1/2}$$

$$p = c_2 \gamma_2 / (c_1 \gamma_1), \quad h_2 = h - h_1$$

Выражения для собственных и присоединенных функций не приводятся ввиду их громоздкости.

Расчеты проводились для пары сталь–резина:

$$\text{Для стали: } \rho^{(1)} = 7.8 \times 10^{-6} \text{ кг/м}^3; \quad v_l^{(1)} = 3.17 \times 10^5 \text{ м/с}, \quad v_l^{(1)} = 5.82 \times 10^5 \text{ м/с};$$

$$\text{Для резины: } \rho^{(2)} = 1.2 \times 10^{-6} \text{ кг/м}^3, \quad v_l^{(2)} = 1.28 \times 10^5 \text{ м/с}, \quad v_l^{(2)} = 9.13 \times 10^5 \text{ м/с}.$$

Поясним используемые ниже обозначения:  $\Omega = \omega h / v_l^{(1)}$  – приведенная частота;  $\Omega_{1nm}$ ,  $\Omega_{2nm}$  – значения критических приведенных частот, принадлежащих  $S_{1n}$ ,  $S_{2n}$ ;  $a_{1nm}$ ,  $a_{2nm}$  – соответствующие собственные формы;  $\lambda_{im}$ ,  $\mu_{im}$  – псевдоупругие постоянные, которые входят в уравнения (3.8);  $\xi = h_1 / h$  – безразмерная толщина стального слоя;  $\xi_{1kr}$ ,  $\xi_{2pq}$  – значения параметра  $\xi$ , при которых инварианты  $d_{1kr} = 0$ ,  $d_{2pq} = 0$  (см. утверждения 3, 5);  $\eta_{1kr}$ ,  $\eta_{2pq}$  – значения параметра  $\xi$ , при которых  $d_{1kr}$  или соответственно  $d_{2pq}$  обращаются в бесконечность (см. замечание 5).

В табл. 1 приведены значения  $\Omega_{1nm}$  и  $\Omega_{2nm}$ , рассчитанные для  $\xi = 0.5$  при  $N = 8$   $n = 0, 1, 2, \dots, 8$ ; они совпадают со значениями при  $N = 16$ , соответствующими  $n = 0, 2, 4, \dots, 16$ . Строки иллюстрируют распределение частот в пределах полосы пропускания, при этом наименьшая частота является нижней границей полосы. В отдельную строку выделены значения приведенных частот, рассчитанных по формулам

$$\Omega_{1n} = K_1 \frac{n\pi}{N}, \quad \Omega_{2n} = K_2 \frac{n\pi}{N}, \quad K_1 = v_l^{(1)} \frac{\langle \rho \rangle}{\langle c_{44} \rangle}, \quad K_2 = v_l^{(1)} \frac{\langle \rho \rangle}{\langle c_{33} \rangle}$$

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h \rho(z) dz, \quad \langle c_{ss} \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{dz}{c_{ss}}$$

вытекающих из теории усреднения. Они дают некоторое представление об области применимости этой теории при определении собственных частот упругих элементов из сильно неоднородных сред.

Таблица 1

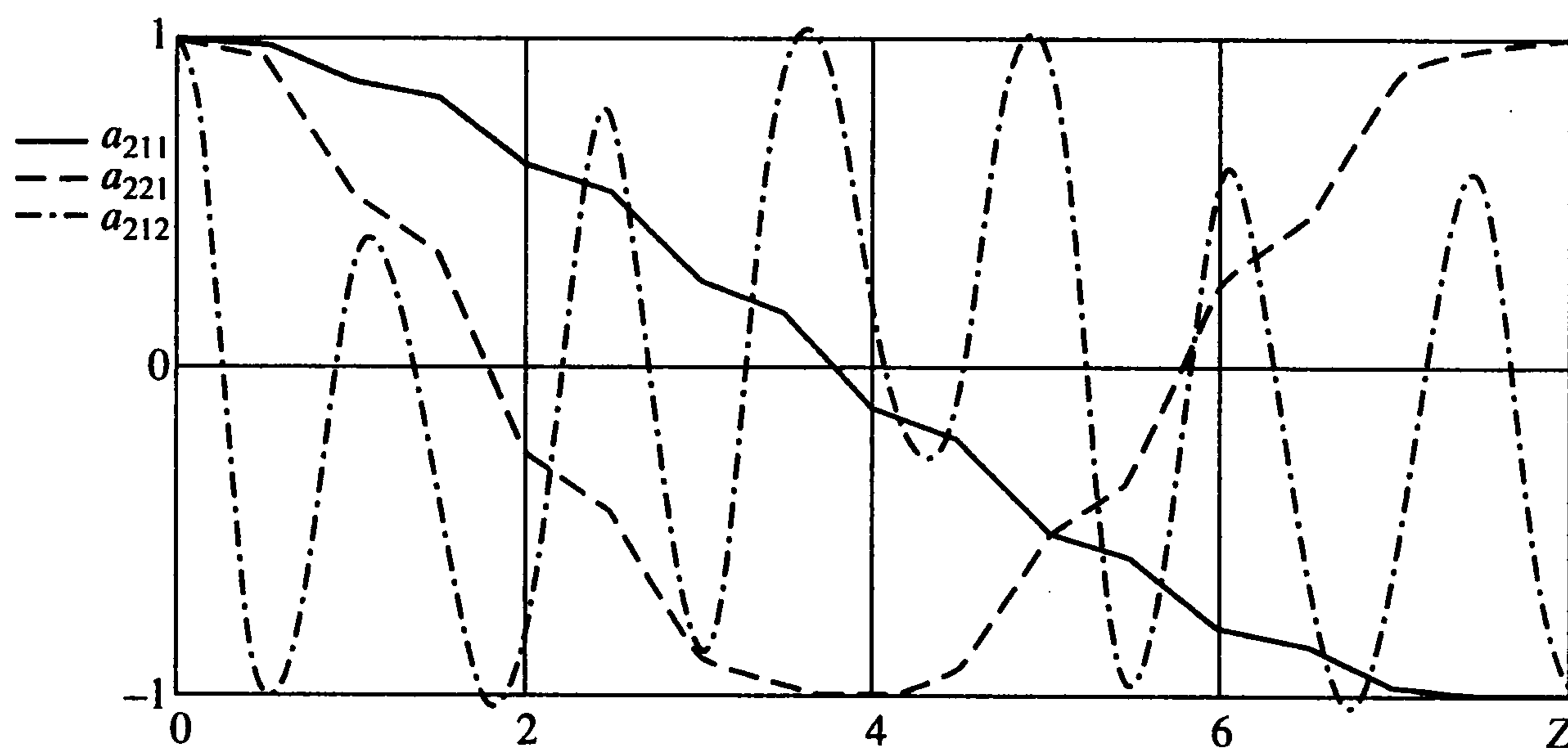
$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Omega_{1n1}$	0	0.1137	0.2242	0.3281	0.4219	0.5015	0.5625	0.6012	0.6144
$\Omega_{1n2}$	2.660	2.653	2.632	2.600	2.563	2.525	2.492	2.470	2.462
$\Omega_{1n3}$	4.809	4.819	4.846	4.889	4.941	4.997	5.047	5.083	5.096
$\Omega_{1n}$	0	0.1142	0.2284	0.3426	0.4568	0.5709	0.6851	0.7993	0.9135
$\Omega_{2n1}$	0	0.3818	0.7581	1.123	1.466	1.776	2.031	2.204	2.266
$\Omega_{2n2}$	6.790	6.714	6.516	6.253	5.968	5.695	5.461	5.298	5.240
$\Omega_{2n3}$	8.768	8.849	9.059	9.345	9.665	9.991	10.29	10.53	10.63
$\Omega_{2n}$	0	0.3826	0.7652	1.148	1.531	1.913	2.296	2.678	3.061

Таблица 2

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\Omega_{1n1}$	0.1137	0.2242	0.3281	0.4219	0.5015	0.5625	0.6012	0.6144
$\lambda_{1n} \times 10^{-3}$	4998	2877	2853	3661	3795	3505	3299	3244
$\mu_{1n} \times 10^{-3}$	2499	1439	1427	1830	1898	1753	1649	1622

В табл. 2 приведены значения псевдоупругих констант  $\lambda_{1n}$ ,  $\mu_{1n}$  для критических частот из первой строки табл. 1. Анализ особых случаев проводился по параметру  $\xi$  для частот  $\Omega_{111}$ ,  $\Omega_{211}$  при  $N = 8$  и показал, что существует по одному значению  $\xi_{111} = 0.9232$ ,  $\eta_{111} = 1.171$  и по два значения  $\xi_{211} = 0.06748, 0.3022$ ,  $\eta_{211} = 0.08868, 0.6704$ .

На фигуре в качестве иллюстрации распределения амплитуд колебаний по толщине приведены зависимости собственных форм  $a_{211}$  (сплошная кривая),  $a_{221}$  (штриховая кривая),  $a_{212}$  (штрихпунктирная кривая) от  $z$ .



Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (01-01-004540).

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И.И.* Резонансные свойства упругой неоднородной полосы Докл. АН СССР. 1979. Т. 245 № 5. С. 1076–1079.
2. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
3. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* О потоке энергии при резонансах полуограниченных тел // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 2. С. 309–312.
4. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* О распространении волн в упругом продольно-неоднородном цилиндре // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 1. С. 103–108.
5. *Устинов Ю.А.* О принципах выбора единственного решения для полуограниченных тел на критических частотах // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 5. С. 87–93.
6. *Гетман И.П., Устинов Ю.А.* Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1993. 142 с.
7. *Ворович И.И., Устинов Ю.А.* О затухании волн Лэмба в окрестности критических частот и локализация колебаний в слое // Докл. РАН. 1998. Т. 363. № 3. С. 330–333.
8. *Карпинский И.Д., Устинов Ю.А.* О критических частотах и модах и их затухании в пластине, лежащей на поверхности сжимаемой жидкости // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 179–187.
9. *Устинов Ю.А.* О критических модах неоднородной пластины // Докл. РАН. 2000. Т. 370. № 4. С. 473–476.
10. *Устинов Ю.А.* О критических частотах и модах неоднородной пьезоактивной пластины // Изв. вузов Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2000. Вып. 3. С. 169–173.
11. *Устинов Ю.А.* О полноте системы однородных решений теории плит // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 3. С. 536–543.
12. *Устинов Ю.А.* Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216. № 4. С. 755–758.
13. *Ворович И.И., Кадомцев И.Г., Устинов Ю.А.* К теории неоднородных по толщине плит // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 119–129.
14. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
15. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
16. *Рытов С.М.* Акустические свойства мелкослоистой среды // Акуст. журн. 1956. Т. 2. Вып. 1. С. 71–83.
17. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
23.03.2001