

УДК 539.3:534.1

© 2002 г. А.А. Гусенкова

### МЕТОД ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ С ДЕФЕКТОМ

Предлагается соответствующий классическому методу комплексных потенциалов метод потенциальных функций с использованием преобразования Фурье в классе медленно растущих распределений для решения хорошо известных задач теории упругости для тел с дефектом. Показано, что при использовании преобразования Фурье по всем пространственным переменным решение динамической задачи теории упругости также может быть представлено через скачки напряжений и перемещений на дефекте. Рассматривается корректность преобразованной задачи (в терминах аналога условия Лопатинского). Решение системы уравнений Гельмгольца, к которой сводится система уравнений Ламе в случае двумерной динамической задачи, выражается через скачки напряжений и перемещений на дефекте в результате решения соответствующих сингулярных интегральных уравнений.

**1. Анизотропная трехмерная задача теории упругости.** Рассмотрим гармонические колебания однородного анизотропного упругого полупространства  $\{x_3 > 0\}$  в отсутствие объемных сил. В этом случае динамические уравнения в перемещениях, записанные в неподвижной прямоугольной декартовой системе координат  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , имеют вид (см., например, [1])

$$\sum_{k,l,j=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j} + \rho v^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

где  $u_i$  – компоненты комплексного вектора перемещений  $u(x)$  ( $\tilde{u}(x, t) = \text{Re}\{u(x)e^{-ivt}\}$  – вектор перемещений),  $\rho$  – плотность среды,  $C_{ijkl}$  ( $i, j, k, l = 1, 2, 3$ ) – упругие постоянные, удовлетворяющие соотношениям  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}$ , временной множитель  $e^{-ivt}$  всюду опущен.

Решение  $u = (u_1, u_2, u_3)$  уравнения (1.1) при  $x_3 > 0$  ( $x_3 < 0$ ) будем называть уходящим от плоскости  $\{x_3 = 0\}$  в полупространство  $\{x_3 > 0\}$  ( $\{x_3 < 0\}$ ), если  $u_i(x_1, x_2, x_3)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – распределения медленного роста и при этом

$$\text{supp } u_i(x_1, x_2, x_3) \subset \{x_3 > 0\} (\{x_3 < 0\}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

$$\text{sing supp } U_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cap \{\xi_3 < 0\} (\{\xi_3 > 0\}) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

Здесь и далее большими буквами обозначены образы Фурье соответствующих функций.

Для отыскания решения уравнения (1.1) в полупространстве  $\{x_3 > 0\}$  в классе уходящих от плоскости  $\{x_3 = 0\}$  в полупространство  $\{x_3 > 0\}$  решений, удовлетворяющее условиям

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^i(x_1, x_2) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, 0) = g^i(x_1, x_2) \quad (1.4)$$

$$u_i(x_1, x_2, 0) = h^i(x_1, x_2); \quad x_i \in R, \quad i = 1, 2, 3$$

где  $\alpha_j^i(\cdot, \cdot)$ ,  $g^i(\cdot, \cdot)$ ,  $h^i(\cdot, \cdot)$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) – заданные функции, применим к уравнениям

(1.1) преобразование Фурье по переменным  $x_1, x_2, x_3$ , учитывая условия (1.2) и используя граничные условия (1.4). Тогда образы Фурье распределений  $u_i(x_1, x_2, x_3)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{k,l,j=1}^3 C_{ijkl} \xi_l \xi_j U_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - \rho v^2 U_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = F_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

где

$$F_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^2 (C_{ijk3} + C_{i3kj}) \xi_j U_k^0(\xi_1, \xi_2) + C_{i3k3} (i U_k^1(\xi_1, \xi_2) + \xi_3 U_k^0(\xi_1, \xi_3)) \right], \quad i = 1, 2, 3$$

$U_k^0(\xi_1, \xi_2)$ ,  $U_k^1(\xi_1, \xi_2)$  ( $k = 1, 2, 3$ ) – образы Фурье функций  $u_i(x_1, x_2, 0)$ ,  $\partial u_i / \partial x_3(x_1, x_2, 0)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), определяемые из граничных условий (1.4) после преобразования Фурье по переменным  $x_1, x_2$ .

Для удобства перепишем систему уравнений (1.4) в виде  $AU = F$  и обозначим через

$$\Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \det A, \quad \Delta_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad i = 1, 2, 3$$

определитель матрицы, полученной из  $A$  заменой  $i$ -го столбца на  $(F_1, F_2, F_3)^T$ . Можно показать, что при  $\text{Im } \xi_1 = \text{Im } \xi_2 = \text{Im } v = 0$  уравнение  $\Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$  имеет  $k$  пар комплексно-сопряженных и  $6-2k$  действительных корней  $\xi_3^j$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, \dots, 6$ ). Образы Фурье искомого распределений определяются равенствами

$$U_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{\Delta_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}, \quad i = 1, 2, 3$$

где

$$\Delta_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{при } \xi_3 = \xi_3^j, \quad \text{Im } \xi_3^j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

Поэтому имеем  $3k$  дополнительных условий в случае  $k$  корней  $\xi_3$  с положительной мнимой частью уравнения  $\Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$ , и в граничных условиях (1.4) остается  $15-3k$  независимых коэффициентов.

Таким образом, в зависимости от числа корней  $\xi_3$  уравнения  $\Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$  с положительной мнимой частью количество дополнительных условий в краевых задачах может быть различным.

В рассмотренном ранее случае [2] при решении краевой задачи

$$P(D)u = f(x), \quad x_n \geq 0, \quad n \geq 3$$

$$B_j(D)u = g_j(x), \quad x_n = 0, \quad j = 1, \dots, \mu$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $P(\xi)$  – однородный эллиптический полином порядка  $m$ , количество граничных условий совпадало с числом корней  $\lambda$  уравнения  $P(\xi', \lambda) = 0$ ,  $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ , у которых мнимая часть положительна; порядок дифференциального оператора  $B_j(D)$  не превосходит  $m-1$ .

Отметим, что отличие предлагаемого подхода от метода, рассмотренного ранее [2], состоит в том, что по переменной  $x_n$  в [2] не выполнено преобразование Фурье. Поэтому количество граничных условий в [2], записанных для искомой функции, соответствует количеству вводимых в настоящей работе дополнительных условий, записанных для образов Фурье искомой функции. Граничные условия (1.4) в переменных  $x_1, x_2, x_3$  можно считать аналогом условия Лопатинского в переменных  $\xi_1, \dots, \xi_n$ . Эти условия в обоих случаях обеспечивают корректность задачи. Например, если в граничных условиях (1.4) будет меньше коэффициентов, то задача может оказаться переопределенной.

Разделение условий на граничные и дополнительные (условие Лопатинского и граничные) сделано исключительно для удобства и упрощения расчетов: их можно естественным образом объединить, перейдя к переменным  $x_1, x_2, x_3$  ( $x_1, \dots, x_n$ ) или к переменным  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  ( $\xi_1, \dots, \xi_n$ ). Эти условия накладывают некоторые ограничения на коэффициенты  $\alpha_j^i(\cdot, \cdot)$ ,  $h^i(\cdot, \cdot)$ ,  $g^i(\cdot, \cdot)$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) (операторы  $B_j(D)$  ( $j = 1, \dots, \mu$ ) в [2]). Поэтому рассмотренные подходы к решению задачи в полупространстве эквивалентны ( $n = 3$  в [2]).

Если известны корни  $\xi_3$  уравнения  $\Delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0$  с положительной мнимой частью, то решение задачи (1.1), (1.3) можно записать в явном виде. Тогда нетрудно получить представления решений задач через скачки напряжений и перемещений на плоскости  $\{x_3 = 0\}$  и удобно исследовать, например, задачи дифракции упругой гармонической волны на впаиваемом жестком экране, расположенном в плоскости  $\{x_3 = 0\}$ , а также задачи распространения трещин в плоскости  $\{x_3 = 0\}$  [1].

**2. Постановки задач для изотропной упругой плоскости с дефектом.** Пусть в однородном изотропном упругом пространстве расположен бесконечно тонкий дефект  $\Gamma = \{z = 0, \alpha < x < \beta\}$ . Рассмотрим двумерные задачи динамической теории упругости, когда  $\partial/\partial y = 0$ . Предположим, что напряжения  $\tau_{xz}(\cdot, \cdot)$ ,  $\sigma_z(\cdot, \cdot)$  и перемещения  $u(\cdot, \cdot)$ ,  $v(\cdot, \cdot)$  гармонически зависят от времени, объемные силы отсутствуют. Будем искать комплексные амплитуды функций, опуская временной множитель  $e^{-ikt}$ .

Как известно, при сделанных предположениях уравнения динамической теории упругости в смещениях имеют вид

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \rho k^2 u &= 0 \\ \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \rho k^2 v &= 0 \quad (x, z) \in R^2 \setminus \bar{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\lambda, \mu$  – постоянные Ламе,  $\rho$  – плотность тела.

Решение  $u(x, z)$ ,  $v(x, z)$  уравнений Ламе (2.1) при  $z > 0$  ( $z < 0$ ) назовем уходящим от прямой  $z = 0$  в полуплоскость  $\{z > 0\}$  ( $\{z < 0\}$ ) [3], если  $u(x, z)$ ,  $v(x, z)$  – распределения медленного роста и при этом

$$\text{supp } u(x, z), \text{ supp } v(x, z) \subset \{z > 0\} (\{z < 0\}) \quad (2.2)$$

$$\text{sing supp } U(\xi, \zeta) \cap \{\zeta < 0\} (\{\zeta > 0\}) = 0$$

$$\text{sing supp } V(\xi, \zeta) \cap \{\zeta < 0\} (\{\zeta > 0\}) = 0 \quad (2.3)$$

Будем искать решения задачи в классе  $H_{loc}^1(R^2) \cap \tilde{S}'$  ( $\tilde{S}'$  – класс уходящих от прямой  $z = 0$  решений). Если значения функции  $f(\cdot) \in \tilde{S}'$ , определенной при  $z > 0$  и  $z < 0$ , совпадают при  $z = 0 - 0$  и  $z = 0 + 0$ , естественным образом доопределим ее при  $z = 0$ , полагая  $f(0) = f(0 - 0) \equiv f(0 + 0)$ . Можно показать, что равенства (2.3) включают в себя условия на бесконечности; функции из класса  $\tilde{S}'$  уносят энергию на бесконечность. Принадлежность смещений классу  $H_{loc}^1(R^2)$  обеспечивает конечность энергии в любой ограниченной области из  $R^2$ . Граничные условия конкретных задач будут рассмотрены в разд. 4.

Как известно, смещения  $u(\cdot, \cdot)$  и  $v(\cdot, \cdot)$  определяются продольным и поперечным потенциалами  $\phi(\cdot, \cdot)$  и  $\psi(\cdot, \cdot)$ :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.4)$$

Вместо уравнений Ламе для функций  $u(\cdot, \cdot)$ ,  $v(\cdot, \cdot)$  имеем уравнения Гельмгольца для потенциалов  $\varphi(\cdot, \cdot)$ ,  $\psi(\cdot, \cdot)$

$$\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0, \quad \Delta\psi + k_2^2\psi = 0 \quad (x, z) \in R^2 \setminus \bar{\Gamma}; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.5)$$

$$k_i = k/c_i, \quad i = 1, 2; \quad c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$$

где  $c_1, c_2$  – скорости распространения продольных и поперечных волн в однородной изотропной упругой среде.

Уравнения для новых искомым функций  $\varphi(\cdot, \cdot)$ ,  $\psi(\cdot, \cdot)$  разделяются. Однако если продольный и поперечный потенциалы являются функциями из класса  $H_{loc}^1(R^2) \cap \tilde{S}'$ , то смещения, согласно соотношениям (2.4), могут оказаться менее гладкими функциями.

Используя соотношения (2.4) и равенство в смысле обобщенных функций из класса  $\tilde{S}'$  смешанных производных  $\partial^2/\partial x \partial z = \partial^2/\partial z \partial x$  для функций  $\varphi(\cdot, \cdot)$ ,  $\psi(\cdot, \cdot)$ ,  $u(\cdot, \cdot)$ ,  $v(\cdot, \cdot)$ , можно показать, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = \Delta\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} = \Delta\psi \quad (x, z) \in R^2 \setminus \Lambda$$

где

$$\Lambda = \{(x, z): x \in R, z = 0\}$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = -k_1^2\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} = -k_2^2\psi \quad (x, z) \in R^2 \setminus \Lambda \quad (2.6)$$

и справедливы равенства

$$\Delta u = -k_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k_2^2 \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \Delta v = k_2^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} - k_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (x, z) \in R^2 \setminus \Lambda \quad (2.7)$$

Отметим, что равенства (2.6), (2.7) справедливы только при  $z > 0$  и при  $z < 0$ , причем функции  $\varphi(\cdot, \cdot)$ ,  $\psi(\cdot, \cdot)$ ,  $u(\cdot, \cdot)$ ,  $v(\cdot, \cdot)$ , и их первые производные понимаются в обычном смысле, т.е. рассматриваются в тех классах, которым они фактически принадлежат.

**3. Представления решений задач через скачки напряжений и перемещений.** Рассмотрим вспомогательную задачу о скачке. Будем искать решения  $\varphi(\cdot, \cdot)$ ,  $\psi(\cdot, \cdot)$  уравнений Гельмгольца (2.5) в области  $R^2 \setminus \Lambda$ . Граничные условия запишем пока в терминах напряжений и смещений

$$[u]|_{\Lambda} = a_u(x), \quad [v]|_{\Lambda} = a_v(x), \quad [\tau_{xz}]|_{\Lambda} = a_{\tau}(x), \quad [\sigma_z]|_{\Lambda} = a_{\sigma}(x); \quad x \in R \quad (3.1)$$

$$[f]|_{\Lambda} = f(x, 0+0) - f(x, 0-0) \equiv f^+(x, 0) - f^-(x, 0)$$

В соотношениях (3.1) функции в правых частях равенств назовем *потенциальными*. Применяя к равенствам (2.4) преобразование Фурье по переменной  $x$ , получим

$$U(\xi, z) = -i\xi\Phi(\xi, z) + \frac{\partial\Phi}{\partial z}(\xi, z), \quad V(\xi, z) = \frac{\partial\Phi}{\partial z}(\xi, z) + i\xi\Psi(\xi, z) \quad (3.2)$$

Поэтому первые два равенства из (3.1) легко записать для образов Фурье функций  $\varphi(\cdot, \cdot)$ ,  $\psi(\cdot, \cdot)$  и их первых производных по  $z$ .

Преобразуем оставшиеся два условия в (3.1). Используя известные формулы

$$\tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \sigma_z = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial z}$$

и равенства (2.6), имеем

$$\tau_{xz} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial x} - \chi_2 \Psi, \quad \sigma_z = -2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \chi_1 \Phi; \quad \chi_1 = k_1^2(\lambda + 2\mu), \quad \chi_2 = k_2^2\mu$$

Применим к этим равенствам преобразование Фурье по  $x$

$$\begin{aligned} T_{xz}(\xi, z) &= -i2\mu\xi \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\xi, z) + (2\mu\xi^2 - \chi_2)\Psi(\xi, z) \\ \Sigma_z(\xi, z) &= (2\mu\xi^2 - \chi_1)\Phi(\xi, z) + i2\mu\xi \frac{\partial \Psi}{\partial z}(\xi, z) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Тогда  $U(\xi, z)$ ,  $V(\xi, z)$ ,  $T_{xz}(\xi, z)$ ,  $\Sigma_z(\xi, z)$  выражаются через функции  $\Phi(\xi, z)$ ,  $\Psi(\xi, z)$  и их первые производные по переменной  $z$ . Обозначим через  $\Phi_0(\xi)$ ,  $\Phi_1(\xi)$ ,  $\Psi_0(\xi)$ ,  $\Psi_1(\xi)$  значения функций  $\Phi(\xi, z)$ ,  $\partial\Phi/\partial z(\xi, z)$ ,  $\Psi(\xi, z)$ ,  $\partial\Psi/\partial z(\xi, z)$  при  $z = 0$ . В результате граничные условия (3.1) в терминах образов Фурье функций принимают вид

$$\begin{aligned} [\Psi_1 - i\xi\Phi_0]|_{\bar{\Lambda}} &= A_u(\xi), \quad [\Phi_1 + i\xi\Psi_0]|_{\bar{\Lambda}} = A_v(\xi) \\ [(2\mu\xi^2 - \chi_2)\Psi_0 - i2\xi\Phi_1]|_{\bar{\Lambda}} &= A_\tau(\xi) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$[(2\mu\xi^2 - \chi_1)\Phi_0 + i2\mu\xi\Psi_1]|_{\bar{\Lambda}} = A_\sigma(\xi); \quad \xi \in R$$

$$\bar{\Lambda} = \{(\xi, z): \xi \in R, z = 0\}, \quad [F]|_{\bar{\Lambda}} = F^+(\xi) - F^-(\xi)$$

Здесь  $F^\pm(\xi)$  – образы Фурье функций  $f^\pm(x, 0)$  из (3.1).

Для решения поставленной задачи выполним теперь преобразование Фурье по переменным  $x, z$  в уравнениях Гельмгольца (2.5)

$$\begin{aligned} (k_1^2 - \xi^2 - \zeta^2)\Phi^\pm(\xi, \zeta) &= \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\Phi_1^\pm(\xi) - i\zeta\Phi_0^\pm(\xi)] \\ (k_2^2 - \xi^2 - \zeta^2)\Psi^\pm(\xi, \zeta) &= \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\Psi_1^\pm(\xi) - i\zeta\Psi_0^\pm(\xi)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Распределения  $\Phi^+(\xi, \zeta)$  ( $\Psi^+(\xi, \zeta)$ ) и  $\Phi^-(\xi, \zeta)$  ( $\Psi^-(\xi, \zeta)$ ) являются образами Фурье функции  $\phi(x, z)$  ( $\psi(x, z)$ ) при  $z > 0$  и  $z < 0$ .

Условия (2.2) для искомым функций выполняются тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$\Phi_1^\pm(\xi) \mp i\gamma_1(\xi)\Phi_0^\pm(\xi) = 0, \quad |\xi| > k_1 \quad (3.6)$$

$$\Psi_1^\pm(\xi) \mp i\gamma_2(\xi)\Psi_0^\pm(\xi) = 0, \quad |\xi| > k_2 \quad (3.7)$$

где

$$\gamma_j(\xi) = \{|\xi| \geq k_j: +i\sqrt{\xi^2 - k_j^2}; \quad |\xi| < k_j: -\sqrt{k_j^2 - \xi^2}\}, \quad j = 1, 2$$

Это означает, что распределения  $\Phi^\pm(\xi, \zeta)$ ,  $\Psi^\pm(\xi, \zeta)$  по переменной  $\zeta$  являются предельными значениями функций, аналитических в верхней полуплоскости. Можно показать, что условия (2.3) равносильны равенствам (3.6) при  $|\xi| < k_1$  и (3.7) при  $|\xi| < k_2$ .

Поэтому принадлежность смещений классу  $\tilde{S}'$  равносильна выполнению равенств (3.6), (3.7) для всех  $\xi$ . Тогда для определения функций  $\Phi_0^\pm(\xi)$ ,  $\Phi_1^\pm(\xi)$ ,  $\Psi_0^\pm(\xi)$ ,  $\Psi_1^\pm(\xi)$  имеем систему линейных алгебраических уравнений (3.4) и (3.6), (3.7) при  $\xi \in R$ . Эти

функции можно выразить через образы Фурье известных скачков напряжений и перемещений

$$\begin{aligned}\Phi_0^\pm(\xi) &= \frac{1}{\chi\gamma_1(\xi)} (\mp i2\mu\xi p_{12}(\xi)A_u(\xi) + iq_1(\xi)A_v(\xi) - \chi_1\xi A_\tau(\xi) \pm p_{12}(\xi)A_\sigma(\xi)) \\ \Phi_1^\pm(\xi) &= \frac{1}{\chi} (2\mu\xi p_{12}(\xi)A_u(\xi) \mp q_1(\xi)A_v(\xi) \mp i\chi_1\xi A_\tau(\xi) + ip_{12}(\xi)A_\sigma(\xi)) \\ \Psi_0^\pm(\xi) &= \frac{1}{\chi\gamma_2(\xi)} (iq_2(\xi)A_u(\xi) \pm i2\mu\xi p_{21}(\xi)A_v(\xi) \pm p_{21}(\xi)A_\tau(\xi) + \chi_2\xi A_\sigma(\xi)) \\ \Psi_1^\pm(\xi) &= \frac{1}{\chi} (\mp q_2(\xi)A_u(\xi) - 2\mu\xi p_{21}(\xi)A_v(\xi) + ip_{21}(\xi)A_\tau(\xi) \pm i\chi_2\xi A_\sigma(\xi))\end{aligned}\tag{3.8}$$

Здесь

$$\chi = -2\chi_1\chi_2, \quad p_{ij}(\xi) = \chi_j\gamma_i(\xi), \quad q_j(\xi) = \chi_j(\chi_2 - 2\mu\xi^2); \quad i, j = 1, 2$$

Теперь можно корректно определить функции  $\Phi^\pm(\xi, \zeta)$ ,  $\Psi^\pm(\xi, \zeta)$ , используя равенства (3.5) и (3.8). Удобно выполнить обратное преобразование Фурье по переменной  $\zeta$  для этих функций. Легко проверить, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\zeta z}}{\gamma_1(\xi) \pm \zeta} d\zeta = -ie^{\pm iz\gamma_1(\xi)}$$

Тогда

$$\Phi^\pm(\xi, z) = \Phi_0^\pm(\xi)e^{\pm iz\gamma_1(\xi)}, \quad \Psi^\pm(\xi, z) = \Psi_0^\pm(\xi)e^{\pm iz\gamma_2(\xi)}\tag{3.9}$$

После обратного преобразования Фурье по переменной  $\xi$  найдем функции  $\varphi(\cdot, \cdot)$  и  $\psi(\cdot, \cdot)$ . Искомые функции  $u(\cdot, \cdot)$ ,  $v(\cdot, \cdot)$  можно получить, используя равенства (2.4). Таким образом, решение исходной задачи выражено через скачки напряжений и перемещений или потенциальные функции.

Заметим, что можно сразу найти образы Фурье искомых функций  $\tau_{xz}(\cdot, \cdot)$ ,  $\sigma_z(\cdot, \cdot)$ ,  $u(\cdot, \cdot)$ ,  $v(\cdot, \cdot)$  по формулам (3.2), (3.3), если известны образы Фурье функций  $\varphi(\cdot, \cdot)$ ,  $\psi(\cdot, \cdot)$ . Тогда динамические задачи можно рассматривать в терминах напряжений и перемещений.

**4. Интегральные уравнения двумерных граничных задач.** 1°. Рассмотрим плоскую задачу дифракции, когда дефект представляет собой впаянный жесткий экран. В этом случае вектор перемещения непрерывен при переходе через прямую  $z = 0$  и граничные условия задачи имеют вид

$$u|_\Gamma = -u_0(x), \quad v|_\Gamma = -v_0(x); \quad x \in (\alpha, \beta)\tag{4.1}$$

$$[u]|_{\Lambda \setminus \bar{\Gamma}} = 0, \quad [v]|_{\Lambda \setminus \bar{\Gamma}} = 0, \quad [\tau_{xz}]|_{\Lambda \setminus \bar{\Gamma}} = 0, \quad [\sigma_z]|_{\Lambda \setminus \bar{\Gamma}} = 0\tag{4.2}$$

где  $u_0(\cdot)$ ,  $v_0(\cdot)$  – заданные на интервале  $(\alpha, \beta)$  функции. С помощью представлений решений двумерных задач через скачки напряжений и перемещений (см. разд. 3) можно показать, что функции  $a_u(\cdot)$  и  $a_v(\cdot)$  тождественно равны нулю, а функции  $a_\tau(\cdot)$  и  $a_\sigma(\cdot)$  равны нулю на множестве  $\Lambda \setminus \bar{\Gamma}$ . Поэтому для решения задачи дифракции необходимо найти функции  $a_\tau(\cdot)$  и  $a_\sigma(\cdot)$  на дефекте. Используя граничные условия (4.1)

и равенства (3.2), (3.9), получим интегральные уравнения (ИУ) для определения этих функций

$$L_1 a_\tau = \frac{i}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \int_\alpha^\beta a_\tau(t) \int_{-\infty}^{+\infty} F_{12}(\xi) e^{i(t-x)\xi} d\xi dt = u_0(x); \quad x \in (\alpha, \beta) \quad (4.3)$$

$$\frac{i}{4\pi\mu} \int_\alpha^\beta a_\sigma(t) \int_{-\infty}^{+\infty} F_{21}(\xi) e^{i(t-x)\xi} d\xi dt = v_0(x); \quad x \in (\alpha, \beta) \quad (4.4)$$

Здесь

$$F_{ij}(\xi) = \frac{1}{\gamma_i(\xi)} + \frac{1}{k_i^2} (\gamma_j(\xi) - \gamma_i(\xi)) = F_{ij}^1 |\xi|^{-1} + O(|\xi|^{-2}) \quad (\text{при } |\xi| \rightarrow \infty), \quad i, j = 1, 2$$

$$F_{12}^1 = -i \frac{\lambda + 3\mu}{2\mu}, \quad F_{21}^1 = -i \frac{\lambda + 3\mu}{2(\lambda + 2\mu)}$$

Заметим, что ранее [4, 5] были получены ИУ статических задач плоской теории упругости для изотропных тел с дефектами; при этом логарифмические особенности ИУ содержатся в интегралах с ядром Коши с переменным пределом. При решении динамических задач ИУ (4.3), (4.4) содержат логарифмические особенности в интегралах с бесконечными пределами, поэтому их удобно рассматривать как псевдодифференциальные.

2°. Рассмотрим двумерную динамическую задачу, когда дефект является трещиной. Тогда при переходе через прямую  $z = 0$  остается непрерывным вектор напряжения и кроме условий (4.2) заданы функции

$$\sigma_z |_\Gamma = -\sigma_z^0(x), \quad \tau_{xz} |_\Gamma = -\tau_{xz}^0(x); \quad x \in (\alpha, \beta)$$

В задаче о скачке, рассмотренной в разд. 3, отличны от нуля только функции  $a_u(\cdot)$ ,  $a_v(\cdot)$  на  $\bar{\Gamma}$  и ИУ, эквивалентные краевой задаче, имеют вид

$$L_2 a_u = \frac{i\mu}{4\pi} \int_\alpha^\beta a_u(t) \int_{-\infty}^{+\infty} G_{12}(\xi) e^{i(t-x)\xi} d\xi dt = -\tau_{xz}^0(x); \quad x \in (\alpha, \beta) \quad (4.5)$$

$$\frac{i\mu}{4\pi} \int_\alpha^\beta a_v(t) \int_{-\infty}^{+\infty} G_{21}(\xi) e^{i(t-x)\xi} d\xi dt = -\sigma_z^0(x); \quad x \in (\alpha, \beta) \quad (4.6)$$

Здесь

$$G_{ij}(\xi) = \frac{k_2^2}{\gamma_j(\xi)} + \frac{4}{k_2^2} \xi^2 \left( \gamma_i(\xi) - \gamma_j(\xi) + \frac{k_1^2 - k_i^2}{\gamma_1(\xi)} \right) =$$

$$= G_{ij}^1 |\xi| + O(1) \quad (\text{при } |\xi| \rightarrow \infty), \quad i, j = 1, 2$$

$$G_{12}^1 = G_{21}^1 = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}$$

**5. Численные решения интегральных уравнений.** Согласно одному из подходов к решению ИУ первого рода будем аналитически выделять главные части операторов левой части ИУ и в численном методе действие главной части учитывать в явном виде.

Решение  $a_\tau(\cdot)$  ИУ (4.3) будем искать в пространстве распределений  $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$  [7]

$$\tilde{H}^s(\Gamma) = \{u : (1 + |\xi|)^s U(\xi) \in L_2(R^1), \quad \text{supp } u \subset \bar{\Gamma}\}$$

Можно показать [7, 2], что левая часть ИУ (4.3) определяет ограниченный псевдодифференциальный оператор (ПДО)  $L_1: \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ ,  $H^s(\Gamma)$  – сужение  $H^s(R^1)$  на  $\Gamma$ . Кроме того [8, 7],  $L_1$  – фредгольмовый ПДО порядка  $-1$  индекса  $0$ . Главную часть оператора  $L_1$  выделим аналитически. После этого левую часть ИУ (4.3) разделим на два слагаемых: сингулярное с  $F_{12}^1 |\xi|^{-1}$  вместо  $F_{12}(\xi)$  и регулярное с  $F_{12}^r(\xi) = F_{12}(\xi) - F_{12}^1 |\xi|^{-1}$  вместо  $F_{12}(\xi)$ . Применяя обобщенные равенства Парсевала и выполняя обратные преобразования Фурье функций  $F_{12}^1 |\xi|^{-1}$  и  $F_{12}^r(\xi)$  [9], получим ИУ, эквивалентное ИУ (4.3), в котором для удобства от интервала  $(\alpha, \beta)$  перейдем к интервалу  $(-1, 1)$

$$\tilde{L}_1 \varphi_1 = \int_{-1}^1 \left( \ln \frac{1}{|t-x|} + K_1(t, x) \right) \varphi_1(t) dt = f_1(x); \quad x \in (-1, 1) \quad (5.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= a_\tau(\gamma_+ - \gamma_- t), \quad K_1(t, x) = \mu b \tilde{f}_{12}(\gamma_-(x-t)) - \ln \frac{1}{|t-x|} \\ \tilde{f}_{ij}(t) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{k_i^2 |t|} (k_i H_1^{(2)}(k_i |t|) - k_j H_1^{(2)}(k_j |t|)) - H_0^{(2)}(k_i |t|) \right), \quad i = 1, 2 \\ f_1(x) &= -\frac{c}{\gamma_-} u_0(\gamma_+ - \gamma_- x), \quad \gamma_\pm = \frac{\alpha \pm \beta}{2} \\ b &= -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\lambda + 3\mu}, \quad c = -\frac{2\pi\mu(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu} \end{aligned} \quad (5.2)$$

$H_n^{(2)}(\cdot)$  – функция Ганкеля второго рода порядка  $n$ .

Для численного решения полученного ИУ использован метод Бубнова–Галеркина с многочленами Чебышева первого рода в качестве базисных и пробных функций. Численный метод является устойчивым и эффективным при "малых" размерах экрана [7] (экран считается малым, если длина  $\Gamma$  мала по сравнению с длинами волн в пространстве, т.е. когда  $k_i(\beta - \alpha) \ll 1$  ( $i = 1, 2$ )). Как правило, достаточно нескольких многочленов Чебышева (примерно 5–10, в зависимости от требуемой точности) для хорошего приближения функции  $\varphi_1(\cdot)$ . Это обусловлено тем, что многочлены Чебышева являются собственными функциями главной части оператора  $\tilde{L}_1$ . Кроме того, введение весовых множителей в случае малых экранов позволяет учитывать поведение решения в окрестности концевых точек, которые в целом определяют решение на экране. Данный метод, как показывают численные эксперименты, эффективен до значений  $k_i(\beta - \alpha) \sim 1$  ( $i = 1, 2$ ).

На фигуре кривыми 1 показано приближенное решение ИУ (5.1) в случае, когда на экран падает плоская волна под углом  $\pi/4$  при  $\alpha = 0.01$ ,  $\beta = 0.02$ ,  $k = 0.01$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\mu = 0.25$ ,  $\rho = 2700$ ,  $M = N = 10$ ;  $N$  – количество многочленов Чебышева в разложении искомой функции,  $M$  – число узлов квадратурной формулы Эрмита, используемой для вспомогательных вычислений [4]. В связи с симметрией показана только область  $t \geq 0$ .

Решение  $a_\sigma(\cdot)$  ИУ (4.4) ищем в пространстве распределений  $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$ . Как и в случае ИУ (4.3), левая часть ИУ (4.4) представляет собой ограниченный фредгольмовый ПДО порядка  $-1$  индекса  $0$ , действующий из  $\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$  в  $H^{1/2}(\Gamma)$ . Тогда можно показать

[7], что функции  $u(\cdot, \cdot), v(\cdot, \cdot) \in H_{loc}^1(R^2)$  при любых  $a_\tau(\cdot), a_\sigma(\cdot) \in \tilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$ . Поэтому функции  $u(\cdot, \cdot), v(\cdot, \cdot)$  удовлетворяют "условию на ребре", и задача дифракции на впаянном жестком экране однозначно разрешима [6].

Для регуляризации ИУ первого рода аналитически выделим главную часть оператора левой части. Можно получить эквивалентное (4.4) ИУ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \ln |t-x| a_\sigma(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} ((\lambda+2\mu) b \tilde{f}_{21}(t-x) - \ln |t-x|) a_\sigma(t) dt = c v_0(x); \quad x \in (\alpha, \beta) \quad (5.3)$$

Функция  $\tilde{f}_{21}(\cdot)$  и постоянные  $b, c$  определены третьей и двумя последними формулами (5.2).

На фигуре кривыми 2 показано приближенное решение ИУ, к которому сводится ИУ (5.3) при переходе от интервала  $(\alpha, \beta)$  к интервалу  $(-1, 1)$ . Искомая функция обозначена через  $\varphi_1(\cdot)$ .

Таким образом, рассмотрены ИУ с логарифмической особенностью в ядре, эквивалентные двумерной задаче дифракции упругой гармонической волны на впаянном жестком экране.

Рассмотрим ИУ (4.5). Можно показать [7, 8], что оператор  $L_2: \tilde{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$  левой части ИУ (4.5) представляет собой ограниченный фредгольмовый ПДО порядка +1 индекса 0. Как и в случае ИУ (4.3), (4.4), выделим главную часть оператора  $L_2$ . Для удобства разделим ядро оператора на регулярную и сингулярную части. При вычислении обратного преобразования Фурье функции  $G_{12}(\cdot)$  используем равенство

$$G_{12}(\xi) = \frac{k_2^2}{\gamma_2(\xi)} + \frac{4}{k_2^2} (k_1^2 \gamma_1(\xi) - k_2^2 \gamma_2(\xi) - \gamma_1^3(\xi) + \gamma_2^3(\xi))$$

Тогда, применяя обобщенные равенства Парсеваля и вычисляя обратное преобразование Фурье для регулярной и сингулярной частей ядра интегрального оператора [9], получим ИУ, в котором с помощью замены переменных перейдем от интервала  $(\alpha, \beta)$  к интервалу  $(-1, 1)$

$$\tilde{L}_2 \varphi_2 = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1}{|t-x|} + K_2(t, x) \right) \varphi_2(t) dt = f_2(x); \quad x \in (-1, 1) \quad (5.4)$$

Здесь

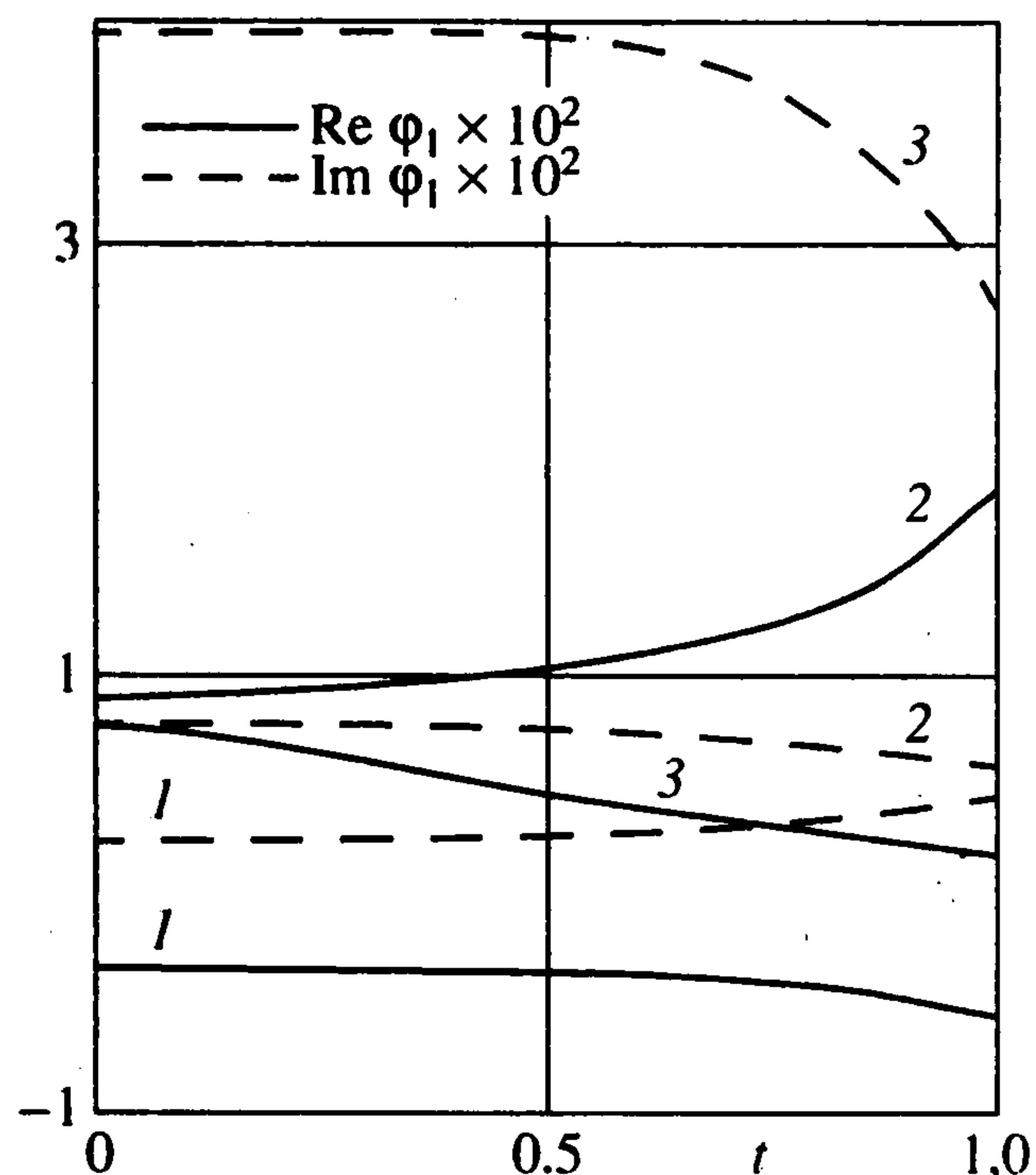
$$\varphi_2(t) = a_u(\gamma_+ - \gamma_- t), \quad K_2(t, x) = \gamma_-^2 b \int_{-1}^x \tilde{g}_{12}(\gamma_-(\xi - t)) d\xi - \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1}{|t-x|}$$

$$\tilde{g}_{ij}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{4}{k_2^2 |t|} (k_j^3 H_1^{(2)}(k_j |t|) - k_i^3 H_1^{(2)}(k_i |t|) + \right. \quad (5.5)$$

$$\left. + (-1)^i \frac{3}{|t|} (k_2^2 H_2^{(1)}(k_2 |t|) - k_1^2 H_2^{(1)}(k_1 |t|)) - k_2^2 H_0^{(2)}(k_j |t|) \right), \quad i, j = 1, 2$$

$$f_2(x) = \gamma - c \tau_{xz}^0 (\gamma_+ - \gamma_- x), \quad b = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)}, \quad c = i \frac{\pi(\lambda + 2\mu)}{\mu(\lambda + \mu)}$$

$H_n^{(1)}(\cdot)$  – функция Ганкеля первого рода порядка  $n$ .



К численному методу решения данного гиперсингулярного ИУ применимы те же замечания, что и в случае сингулярного ИУ (5.1). В методе Бубнова – Галеркина в качестве базисных и пробных функций использованы многочлены Чебышева второго рода.

На фигуре кривыми 3 показано приближенное решение ИУ (5.4). Исходные данные такие же, как и в случае ИУ (5.1). Для удобства искомая функция на фигуре обозначена через  $\varphi_1(\cdot)$ .

Рассмотрим ИУ (4.6). Главная часть оператора левой части ИУ (4.6) такая же, как и в случае ИУ (4.5).

Оператор левой части ИУ (4.6), как и ИУ (4.5), является ограниченным фредгольмовым ПДО порядка +1 индекса 0, действующим из  $\tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$  в  $H^{-1/2}(\Gamma)$ . Тогда можно показать [7], что при любых  $a_u(\cdot), a_v(\cdot) \in \tilde{H}^{1/2}(\Gamma)$  функции  $u(\cdot, \cdot), v(\cdot, \cdot) \in H_{loc}^1(R^2)$ . Поэтому смещения  $u(\cdot, \cdot), v(\cdot, \cdot)$  удовлетворяют "условию на ребре", и динамическая задача для плоскости с трещиной однозначно разрешима [6].

Для обратного преобразования Фурье ядра оператора левой части ИУ (4.6) удобно использовать равенство

$$\frac{\xi^2}{\gamma_1(\xi)} = \frac{k_1^2}{\gamma_1(\xi)} - \gamma_1(\xi)$$

Можно показать, что ИУ (4.6) эквивалентно ИУ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1}{|t-x|} a_v(t) dt + \frac{\partial}{\partial x} \int_{\alpha}^{\beta} \left( b \int_{\alpha}^x \tilde{g}_{21}(t-\xi) d\xi - \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1}{|t-x|} \right) a_u(t) dt = \\ = -c\sigma_z^0(x); \quad x \in (\alpha, \beta) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Функция  $\tilde{g}_{21}(\cdot)$  и постоянные  $b, c$  определены третьей и последними двумя формулами (5.5).

Приближенное решение ИУ, к которому приводится ИУ (5.6) при переходе от интервала  $(\alpha, \beta)$  к интервалу  $(-1, 1)$ , аналогично решению, показанному на фигуре кривыми 3.

Таким образом, рассмотрены гиперсингулярные ИУ, эквивалентные динамической задаче для плоскости с дефектом.

Отметим, что в рассмотренных динамических задачах продольный и поперечный потенциалы являются вспомогательными. Их удобно использовать, поскольку применить преобразование Фурье к независимым уравнениям Гельмгольца значительно легче, чем к связанным уравнениям Ламе. Кроме того, во вспомогательной задаче можно разделить задачи для образов Фурье продольного и поперечного потенциалов. При этом граничные интегральные уравнения получены в терминах смещений и напряжений, а не потенциалов. Поэтому применение функций  $\varphi(\cdot, \cdot), \psi(\cdot, \cdot)$  не понижает гладкости решений задач.

Заметим, что в работе преобразование Фурье при решении задач выполняется по всем переменным. Это позволяет сразу получить алгебраические уравнения для образов Фурье искоемых функций вместо обыкновенных дифференциальных уравнений, которые получаются при общем подходе к решению аналогичных задач.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
2. Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М.: Наука, 1984. 360 с.
3. Gousenkova A.A. Diffraction problems for electromagnetic wave on a strip and for elastic wave on a defect in comparison // Proc. Intern. Conf. Mathematical Methods in Electromagnetic Theory MMET 2000. Kharkov, Ukraine, 2000. V. 2. P. 426–428.

4. Гусенкова А.А., Плещинский Н.Б. Интегральные уравнения с логарифмическими особенностями в ядрах граничных задач плоской теории упругости для областей с дефектом // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 454–461.
5. Плещинский Н.Б., Гусенкова А.А. Комплексные потенциалы с логарифмическими особенностями в ядрах для упругих тел с дефектом вдоль гладкой дуги // Изв. вузов. Математика, 2000. № 10. С. 57–67.
6. Исраилов М.Ш. Динамическая теория упругости и дифракция волн. М.: Изд-во МГУ, 1992. 204 с.
7. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.: Изд. пред. ред. журн. "Радиотехника", 1996. 176 с.
8. Эскин Г.И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
9. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.

Казань  
e-mail: gaa@ksu.ru

Поступила в редакцию  
12.VII.2001