УДК 539.3

© 2002 г. В.А. Кучер, В.А. Пупырев

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧИ СЕН-ВЕНАНА И ЗАДАЧИ ОБ АНТИПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Неклассические интегральные уравнения для уравнения Лапласа, обеспечивающие повышенную точность при численной реализации, применяются для решения задачи Сен-Венана (кручение и изгиб силой цилиндрического стержня) и задачи об антиплоской деформации. Показано, что для однозначного определения решения исходной задачи в случае многосвязных областей уравнения следует решать совместно с дополнительными условиями, число которых определяется связностью области. Для некоторых конкретных областей: бесконечной полосы, круга и кругового кольца интегральные уравнения решены аналитически.

Двумерные задачи теории упругости – кручение и антиплоская деформация исследовались [1–3] методом граничных интегральных уравнений, причем гармонические функции кручения или напряжения разыскивались в виде потенциалов простого или двойного слоя с неизвестной плотностью.

Цель данной работы – применить для решения этих задач, а также задачи об изгибе силой новые интегральные уравнения (ИУ) для уравнения Лапласа, полученные ранее [4] прямым методом, на основе интегрального тождества. В двумерном случае ядра этих уравнений совпадают с ядрами уравнений теории гармонического потенциала. Однако неизвестными в таких ИУ в отличие от рассмотренных ранее [1–3] являются граничные значения напряжений, что увеличивает точность их определения при численной реализации. Правые части ИУ определяются краевыми условиями и значениями дивергенции и ротора вектора касательных напряжений в области, которые известны во всех трех рассматриваемых задачах.

Для многосвязных областей ИУ имеет не единственное решение. Показано, что в этом случае ИУ следует решать совместно с условием однозначности осевого перемещения, выраженного в терминах циркуляции вектора касательных напряжений.

Получены точные решения ИУ для бесконечной полосы, круга и кругового кольца, которые могут служить надежными тестами при использовании метода граничных элементов.

1. Вывод ИУ. Рассматривается многосвязная область – поперечное сечение цилиндрического тела. Приняты следующие обозначения: G – открытая область связности m, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_{m+1}$ – ляпуновская граница области; контур Γ_i – граница i-го отверстия – области G_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, Γ_{m+1} – внешний контур, $\mathbf{i}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ – декартов базис на плоскости; $\mathbf{k} = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2$ – орт оси, проходящей через центры инерции сечений, O – начало системы координат, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{s} = \mathbf{k} \times \mathbf{n}$ – внешняя нормаль и касательная к Γ, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_q$ – радиус-вектор из точки истока q в точку интегрирования p; штрих означает поворот вектора на угол $\pi/2$: $\mathbf{a}' = \mathbf{k} \times \mathbf{a}$.

Для плоского вектора $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}_\alpha \tau_\alpha$ и скаляра θ справедливо тождество

$$\int_G [\boldsymbol{\tau}\Delta\theta + (\nabla \circ \boldsymbol{\tau})\nabla\theta + (\nabla' \circ \boldsymbol{\tau})\nabla'\theta] dG = \int_\Gamma [\tau_n \nabla\theta + \tau_s \nabla'\theta] d\Gamma, \tag{1.1}$$

где $\nabla = \mathbf{i}_\alpha \partial / \partial x_\alpha$ – двумерный оператор Гамильтона, $\Delta = \nabla \circ \nabla$ – оператор Лапласа; $\tau_n = \mathbf{n} \circ \boldsymbol{\tau}$, $\tau_s = \mathbf{s} \circ \boldsymbol{\tau}$ – нормальная и касательная составляющие $\boldsymbol{\tau}$.

Пусть $\theta = (2\pi)^{-1} \ln r$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости, $r = |\mathbf{r}|$. Тогда из тождества (1.1) находится представление для вектора $\boldsymbol{\tau}$ в произвольной точке q области G

$$\boldsymbol{\tau}(q) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\left(\tau_n \frac{\mathbf{r}}{r^2} + \tau_s \frac{\mathbf{r}}{r^2}\right)d\Gamma_p - \frac{1}{2\pi}\int_{G}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^2}\nabla\circ\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{r}'}{r^2}\nabla'\circ\boldsymbol{\tau}\right)dG_p \tag{1.2}$$

В предположении, что составляющая τ_s непрерывна на Γ, а τ_n удовлетворяет условию Липшица [5], предельный переход $q \in G \to p_0 \in \Gamma$ в представлении (1.2), спроектированном на касательную $\mathbf{s}_0$ в точке p_0, приводит к ИУ для τ_s.

$$\tau_s(p_0) - \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\tau_s(p)\frac{\mathbf{n}_0\circ\mathbf{r}}{r^2}d\Gamma_p = \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\tau_n(p)\frac{\mathbf{s}_0\circ\mathbf{r}}{r^2}d\Gamma_p -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{G}\left(\frac{\mathbf{s}_0\circ\mathbf{r}}{r^2}\nabla\circ\boldsymbol{\tau} + \frac{\mathbf{n}_0\circ\mathbf{n}}{r^2}\nabla'\circ\boldsymbol{\tau}\right)dG_p = f(p_0), \tag{1.3}$$

где $\mathbf{n}_0$ – нормаль в точке p_0, а $f(p_0)$ – обозначение правой части уравнения. Контурный интеграл в правой части ИУ (1.3) следует понимать в смысле главного значения по Коши [5].

2. Определение правой части ИУ для задач теории упругости. ИУ (1.3) может быть использовано для решения задачи кручения (задача 1), изгиба силой (задача 2) и второй краевой задачи об антиплоской деформации (задача 3), если под вектором $\boldsymbol{\tau}$ понимать вектор результирующего касательного напряжения.

Нормальная составляющая, фигурирующая в правой части ИУ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\tau_n|_{\Gamma} = T(s) \tag{2.1}$$

где $T(s) \equiv 0$ в задачах 1 и 2; $T(s)$ – известная функция дуговой координаты – заданная внешняя нагрузка в задаче 3.

Далее с использованием известных представлений для вектора касательных напряжений $\boldsymbol{\tau}$ в области G [6, 7] вычисляется его дивергенция и ротор

$$\nabla\circ\boldsymbol{\tau}(p) = -\mathbf{r}_p\circ\mathbf{I}^{-1}\circ\mathbf{Q}, \qquad \nabla'\circ\boldsymbol{\tau}(p) = 2\mu\alpha + \frac{\nu}{1+\nu}\mathbf{r}'_p\circ\mathbf{I}^{-1}\circ\mathbf{Q} \tag{2.2}$$

Здесь α – угол закручивания на единицу длины оси тела в задаче 1 (средний по сечению в задаче 2), $\alpha \equiv 0$ в задаче 3, $\mathbf{Q}$ – поперечная сила ($\mathbf{Q} \equiv 0$ в задачах 1 и 3) $\mathbf{I} = \int_G \mathbf{r}_p\mathbf{r}_p dG_p$ – тензор моментов инерции сечения; μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона.

Таким образом, правая часть в ИУ (1.3) известна во всех трех задачах. Для задачи 1 она была получена ранее[1] и может быть представлена в виде контурного интеграла, удобного для конкретных вычислений

$$f(p_0) = -\frac{2\mu\alpha}{\pi}\int_G\frac{\mathbf{n}_0\circ\mathbf{r}}{r^2}dG_p = -\frac{2\mu\alpha}{\pi}\mathbf{n}_0\circ\int_{\Gamma}\mathbf{n}\ln r d\Gamma_p = \frac{2\mu\alpha}{\pi}\int_{\Gamma}\frac{\mathbf{s}_0\circ\mathbf{r}\mathbf{s}\circ\mathbf{r}}{r^2}d\Gamma_p$$

По найденной в результате решения ИУ (1.3) проекции τ_s и известным из (2.1–2.3) значениям τ_n, $\nabla\circ\boldsymbol{\tau}$, $\nabla'\circ\boldsymbol{\tau}$ касательное напряжение $\mathbf{T}$ в любой точке области G определяется интегрированием в соотношении (1.2).

[1] *Никитин Ф.Н.* Граничные интегральные уравнения в напряжениях для задач статики плоских упругих систем. Автореф. дис. ...канд. тех. н.; 05.23.17. Л., 1990. 15 с.

3. ИУ в многосвязной области; дополнительные условия, обеспечивающие однозначную разрешимость исходных задач теории упругости. Известно [5], что однородное ИУ (1.3) сопряжено однородному ИУ внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\omega(p_0)+\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\omega(p)\frac{\mathbf{n}\circ\mathbf{r}}{r^2}d\Gamma_p=0 \tag{3.1}$$

В случае односвязной области уравнение (3.1) имеет только тривиальное решение, а в случае многосвязной – m линейно независимых решений [8]

$$\omega_i(p)=\begin{cases}C_i, & p\in\Gamma_i\\ 0, & p\notin\Gamma_i\end{cases}$$

Здесь и всюду далее $i = 1, 2,\ldots m$; C_i – произвольные постоянные. Значит однородное ИУ (1.3) также имеет m линейно независимых решений. В задачах 1–3 это связано с возможной неоднозначностью осевого перемещения w в многосвязной области.

Пусть b_i – приращение функции w при обходе вокруг i-го отверстия

$$b_i=\int_{\Gamma_i}\mathbf{s}\circ\nabla w d\Gamma \tag{3.2}$$

Условие $b_i = 0$ обеспечивает однозначность w. При учете выражений для ∇w [6, 7] после вычислений из соотношения (3.2) получаем обобщенную формулу для циркуляции касательных напряжений

$$\int_{\Gamma_i}r_s d\Gamma=\mu b_i-2\mu\alpha S_i-\frac{\nu}{1+\nu}\mathbf{Q}\circ\mathbf{I}^{-1}\circ\int_{G_i}\mathbf{r}_p' dG_p \tag{3.3}$$

где S_i – площадь i-го отверстия (области G_i).

Итак, для многосвязной области ИУ (1.3) следует решать совместно с условиями (3.3).

4. Точные решения ИУ для ряда простейших задач.

Кручение бесконечной полосы $\{|x|<h/2,\quad |y|<\infty\}$. Интегралы по неограниченным области G и границе $\Gamma=\Gamma_+\cup\Gamma_-$ рассматриваются в смысле главного значения. Тогда из ИУ (1.3) следует система ИУ

$$\tau_s^{\pm}(y_0)+\frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\tau_s^{\mp}(y)}{(y-y_0)^2+h^2}dy=2\mu\alpha h\quad(\tau_s^{\pm}(y)-\tau_s\mid\Gamma_{\pm}) \tag{4.1}$$

Решение системы ИУ (4.1) – постоянное на $\Gamma_{\pm}$ значение $\tau_s^{\pm}(y)=\mu\alpha h$. С помощью выражения (1.2) определяется известное [6] касательное напряжение в полосе $\boldsymbol{\tau} = 2\mu\alpha x\mathbf{i}_2$.

Задачи 1–3 для круга. В полярных координатах ИУ (1.3) принимает форму

$$\tau_s(\varphi_0)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tau_s(\varphi)d\varphi=f(\varphi_0) \tag{4.2}$$

З а д а ч и 1 и 2. Правая часть ИУ (4.2) имеет вид

$$f(\varphi_0)=2\mu\alpha a+\frac{1+2\nu}{4(1+\nu)I}a^2\mathbf{Q}\circ\mathbf{s}_0$$

где a – радиус, $I = \pi a^4/4$ – момент инерции круга. Тогда решение ИУ (4.2) таково:

$$\tau_s(\varphi_0)=\mu\alpha a+\frac{1+2\nu}{4(1+\nu)I}a^2\mathbf{Q}\circ\mathbf{s}_0$$

По формуле (1.2) определяется касательное напряжение в круге

$$\mathbf{\tau}(p) = \mu\alpha\mathbf{r}'_p + (8(1+\nu)I)^{-1}[((3+2\nu)a^2 - (1-2\nu)r_p^2)\mathbf{E} - 2(1+\nu)\mathbf{r}_p\mathbf{r}_p]\circ\mathbf{Q} \qquad (4.3)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_\alpha$ – единичный тензор на плоскости.

Задача 3. Пусть внешняя нагрузка имеет следующий вид: $T(\varphi) = \exp(in\varphi)$, $n \geqslant 1$. На основании известных свойств сингулярного оператора Гильберта имеем

$$f(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp(in\varphi)\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\varphi_0}{2}d\varphi = i\exp(in\varphi_0)$$

Решение ИУ (4.2) имеет вид $\tau_s(\varphi_0) = f(\varphi_0)$ и касательное напряжение в круге равно

$$\mathbf{\tau}(p) = \exp(in\varphi_p)r_p^{n-2}a^{1-n}(\mathbf{r}_p + i\mathbf{r}'_p)$$

Задачи 1 и 2 для кругового кольца. Пусть a_k – радиусы окружностей – контуров Γ_k; $\tau_s \mid \Gamma_k = \tau_{sk}$, $f \mid \Gamma_k = f_k$ (k = 1, 2). Для $p_0 \in \Gamma_k$ в полярной системе координат последовательно записываются следующие ИУ:

$$\tau_{s1}(\varphi_0) + \frac{(-1)^k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tau_{s1}(\varphi)d\varphi + \frac{a_{3k}}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a_k - a_{3-k}\cos(\varphi-\varphi_0)}{r^2}\tau_{s,3-k}(\varphi)d\varphi = f_k(\varphi), \qquad (4.4)$$

$$k = 1,2$$

Правые части системы (4.4) имеют вид

$$f_k(p) = (k-1)H + F_k\mathbf{Q}\circ\mathbf{e}'_p, \quad \mathbf{e}_p = \frac{\mathbf{r}_p}{r_p}, \quad H = 2\mu\alpha a_2\left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)$$

$$F_1 = -\frac{a_2^2 - a_1^2}{2(1+\nu)I}, \quad F_2 = \frac{1+2\nu}{4(1+\nu)I}\left(1 - \frac{a_1^4}{a_2^4}\right)a_2^2; \quad I = \frac{\pi}{4}(a_2^4 - a_1^4)$$

(I – момент инерции кругового кольца).

Разыскивая решение ИУ (4.4) в форме

$$\tau_{sk}(\varphi_p) = C_k + A_k\mathbf{Q}\circ\mathbf{e}'_p + B_kQ\circ\mathbf{e}_p, \qquad k = 1,2$$

получаем недоопределенную линейную систему уравнений для искомых постоянных

$$A_2 + \frac{a_1^2}{a_2^2}A_1 = F_2, \quad A_2 + A_1 = F_1, \quad B_2 + \frac{a_1^2}{a_2^2}B_1 = 0$$

$$B_2 + B_1 = 0, \quad C_2 + \frac{a_1}{a_2}C_1 = H \qquad (4.5)$$

Условие однозначности перемещения (3.3) запишется в виде

$$2\pi a_1 C_1 = -2\mu\alpha\pi a_1^2 \qquad (4.6)$$

В результате решение системы (4.5), (4.6) таково:

$$C_1 = -\mu\alpha a_1, \quad C_2 = \mu\alpha a_2, \quad B_1 = B_2 = 0$$

$$A_k = (-1)^k(4(1+\nu)I)^{-1}((1+2\nu)a_k^2 + (3+2\nu)a_{3-k}^2), \quad k = 1,2$$

По формуле (1.2) после громоздких вычислений определяется касательное напряжение, записанное в бескоординатной форме, не обнаруженной в литературе. Оно отличается от решения (4.3) заменой a_2^2 на $a_1^2 + a_2^2 + a_1^2a_2^2r_p^{-2}$. В частном случае $\mathbf{Q} = Q_1\mathbf{i}_1$ оно совпадает с известным [6], при $a_1 \to 0$ вырождается в решение (4.3).

5. ИУ для задачи об антиплоской деформации при заданном на границе перемещении. ИУ имеет вид, подобный (1.3),

$$\tau_n(p_0)-\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \tau_n(p)\frac{\mathbf{n}_0\circ\mathbf{r}}{r^2}d\Gamma_p=-\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \tau_s(p)\frac{\mathbf{s}_0\circ\mathbf{r}}{r^2}d\Gamma_p-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_G\left(\frac{\mathbf{n}_0\circ\mathbf{r}}{r^2}\nabla\circ\boldsymbol{\tau}-\frac{\mathbf{s}_0\circ\mathbf{r}}{r^2}\nabla'\circ\boldsymbol{\tau}\right)dG_p \tag{5.1}$$

Касательная компонента вектора напряжений на Г известна: $\tau_s=\mu\mathbf{s}\cdot\nabla w|_\Gamma$. В случае односвязной области ИК (5.1) однозначно разрешимо, как и ИУ (1.3). Однако для многосвязной области оно решает m-параметрическое семейство краевых задач с заданными на границе перемещениями, так как в правой части фигурирует касательная производная w, не чувствительная к взаимным трансляциям контуров как твердых тел. Поэтому непосредственное практическое использование ИУ (5.1) в этом случае затруднено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
2. *Михлин С.Г.* Интегральные уравнения и их приложения к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 380 с.
3. *Михайлов С.Е.* Решение задач об антиплоской деформации упругих тел с угловыми точками методом интегральных уравнений // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 6. С. 981–987.
4. *Матехин Н.А., Морозов Н.Ф., Паукшто М.В.* Некоторые прямые схемы метода потенциала // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292. № 2. С. 296–298.
5. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4. М.: Физматгиз, 1958. 812 с.
6. *Лурье А.И.* Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
7. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
8. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
19.X.2000