

УДК 532.59:534.1

© 2002 г. М.Г. Жучкова, Д.П. Коузов

ПРОХОЖДЕНИЕ ИЗГИБНО-ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ЖЕСТКИЙ ЗАДЕЛ В ПЛАВАЮЩЕЙ ПЛАСТИНЕ

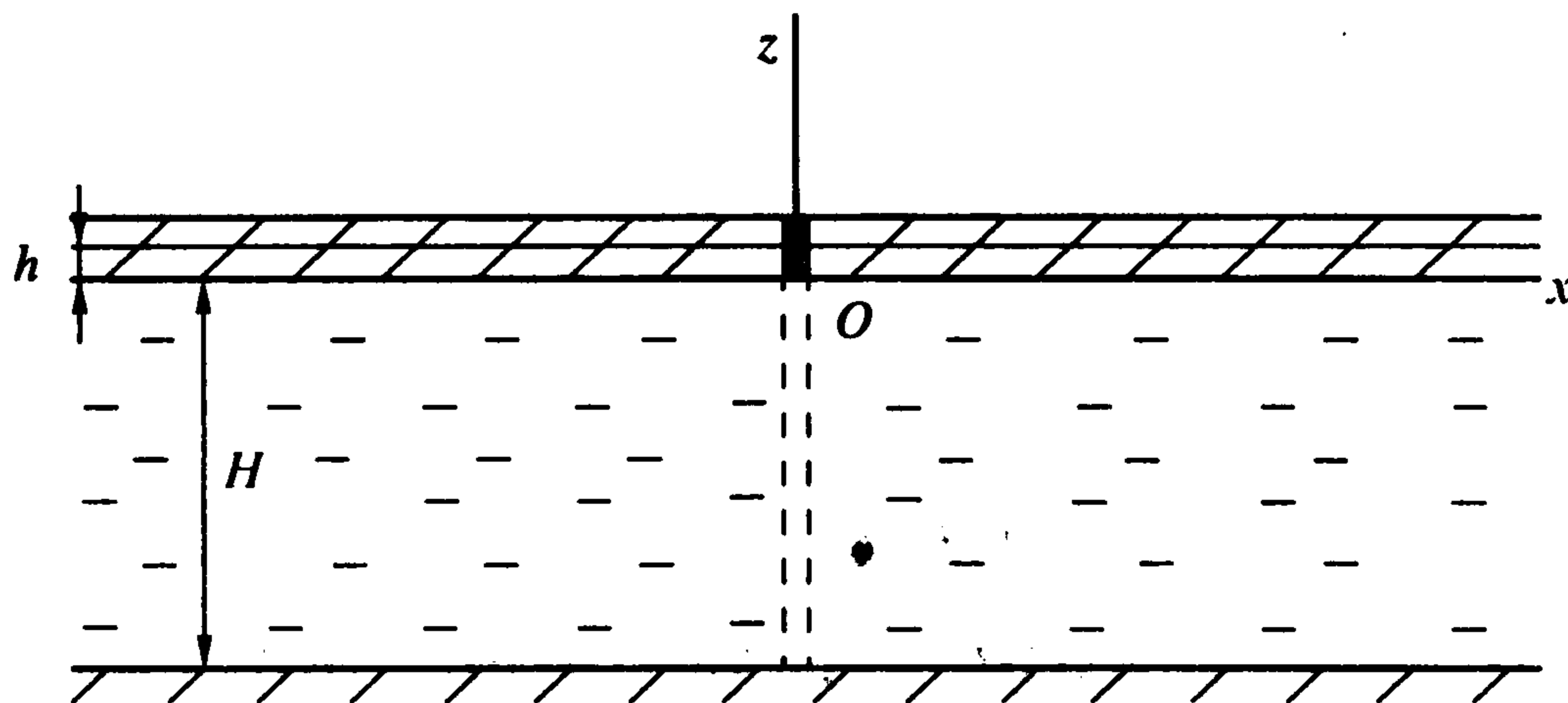
Упругая пластина расположена на поверхности жидкости, в неразрывном контакте с ней, и жестко закреплена в опоре вдоль некоторой прямой. Рассматривается ортогональное падение изгибно-гравитационной волны малой амплитуды на опору. Получены точные выражения для волнового поля в жидкости и изгибного поля в пластине. Определены коэффициенты прохождения через опору и отражения от нее падающей изгибно-гравитационной волны. Найдены усилия, возникающие в опоре. Исследование проводится для жидкости конечной и бесконечной глубин. Показано влияние глубины жидкости на волновые процессы. Жидкость предполагается невязкой, поэтому ее трение о дно и нижнюю поверхность пластины в окрестности опоры не учитывается.

В отечественной литературе проблема взаимодействия гравитационных волн с плавающей пластиной широко освещалась применительно к волновым процессам, происходящим в море, покрытом льдом. Например, изучались изгибно-гравитационные волны в жидкости с однородным ледяным покровом [1], решена задача о нормальном падении поверхностных волн на кромку сплошного льда для бассейна конечной глубины [2], рассматривалась дифракция плоских волн на одной и нескольких трещинах в ледяном покрове [3]. Интерес, проявляемый в последнее время за рубежом к изучению гидроупругого поведения плавающих пластин, вызван прежде всего проектированием и строительством водных аэродромов в ряде зарубежных государств, например в США и Японии. В этой связи были рассмотрены задачи о нормальном и наклонном падении гравитационной волны на кромку плавающей пластины [4–8]. Представляет интерес исследовать влияние, которое оказывают на волновые процессы различные конструктивные элементы водных аэродромов, в частности способы их закрепления.

Ниже рассматривается модель водного аэродрома с простейшим видом закрепления – жестким заделом вдоль некоторой прямой. При этом предполагается возможность свободного перемещения жидких частиц через опору. Источник волнового поля в воде и изгибного поля в пластине – изгибно-гравитационная волна, ортогонально падающая на прямую линию, вдоль которой осуществлено закрепление пластины. Если пластина изолирована, то волна изгиба полностью отразится от жесткого задела. В рассматриваемом случае в общем движении участвуют пластина и массы воды, находящиеся под ней. Наличие двух каналов передачи энергии приводит к частичному прохождению изгибно-гравитационной волны. Изучению такого прохождения посвящена данная работа.

1. Постановка задачи. Рассмотрим пластину, расположенную на поверхности жидкости и закрепленную в опоре. Плоскость Oxy совпадает с нижней поверхностью пластины в ее невозмущенном состоянии. Ось z направлена вертикально вверх. Начало координат располагается на прямой линии закрепления пластины. Изгибно-гравитационная волна распространяется вдоль оси x . При таком выборе системы координат отсутствует зависимость поля от координаты y и, следовательно, возможно рассмотрение двумерной задачи. Схема модели показана на фиг. 1. Здесь h – глубина погружения пластины (осадка). H – расстояние между ее нижней поверхностью и дном.

Ограничимся рассмотрением гармонических процессов. Множитель $e^{-i\omega t}$ (ω – круговая частота), задающий зависимость процессов от времени, всюду опускается.



Фиг. 1

Жидкость предполагается идеальной и несжимаемой, волновой процесс в ней считается потенциальным. Искомый потенциал во всем объеме жидкости должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, z)}{\partial z^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -H \leq z \leq 0 \quad (1.1)$$

Уравнение равновесия пластины под действием сил инерции, внутренних сил упругости и гидродинамического давления $P(x, z)$ на нижнюю поверхность пластины записывается так:

$$D\zeta''''(x) - \rho h \omega^2 \zeta(x) - P(x, 0) = 0 \quad (1.2)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины, ζ – вертикальное смещение пластины, ρ – плотность жидкости, ρh – поверхностная плотность пластины, определенная на основании закона Архимеда. Уравнение (1.2) справедливо всюду, за исключением линии закрепления пластины ($x = 0$), на которой должны выполняться условия жесткого задела

$$\zeta(0) = 0, \quad \zeta'(0) = 0 \quad (1.3)$$

Следовательно, в левой части уравнения (1.2) стоит функция, носитель которой сосредоточен в одной точке $x = 0$. Такая функция является линейной комбинацией дельта-функции и ее производных. А именно

$$D\zeta''''(x) - \rho h \omega^2 \zeta(x) - P(x, 0) = A\delta(x) + B\delta'(x) \quad (1.4)$$

Здесь ограничиваемся двумя слагаемыми линейной комбинации, содержащими нулевую и первую производные дельта-функции. Производные более высоких порядков соответствуют нарушению целостности пластины. Физический смысл коэффициентов A и B будет показан ниже (разд. 5).

В случае волн малой амплитуды гидродинамическое давление на нижнюю поверхность пластины определяется по формуле

$$P(x, 0) = -\rho g \zeta(x) + i\omega \rho \Phi(x, 0) \quad (1.5)$$

Нормальная составляющая скорости жидкости на ее поверхности должна совпадать со скоростью перемещения поверхности пластины, т.е.

$$\frac{\partial \Phi(x, 0)}{\partial z} = -i\omega \zeta(x) \quad (1.6)$$

Подставляя выражение (1.5) в уравнение равновесия пластины (1.4) и учитывая

линеаризованное кинематическое условие (1.6), получаем граничное условие на нижней поверхности пластины

$$\left(D \frac{\partial^5 \Phi}{\partial x^4 \partial z} - \rho h \omega^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \rho g \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \rho \omega^2 \Phi \right) \Big|_{z=0} = -i\omega(A\delta(x) + B\delta'(x)) \quad (1.7)$$

В случае жидкости конечной глубины дно будет предполагаться жестким:

$$\frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z} = 0, \quad z = -H \quad (1.8)$$

Завершает постановку задачи условие на бесконечности, согласно которому искомое поле, за вычетом падающей волны, должно состоять из волн, уходящих на бесконечность и затухающих на бесконечности.

2. Построение решения. Случай жидкости конечной глубины. Потенциал скорости ищем в виде суммы

$$\Phi(x, z) = \Phi_0(x, z) + \Psi(x, z) \quad (2.1)$$

где Φ_0 – поверхностная волна, падающая на опору, Ψ – совокупность волн, рассеянных на опоре. Каждое из слагаемых в правой части равенства (2.1) должно удовлетворять системе уравнений (1.1), (1.7) и (1.8).

Выражение для падающей волны определяется по формуле

$$\Phi_0(x, z) = C \operatorname{ch}[\lambda_0(H + z)] e^{i\lambda_0 x} \quad (2.2)$$

где C – ее амплитуда, λ_0 – волновое число ($\lambda_0 > 0$).

Для нахождения рассеянного поля последовательно применим прямое и обратное преобразования Фурье по координате x к системе уравнений (1.1), (1.7) и (1.8), записанных для функции ψ . Получим следующее интегральное представление:

$$\Psi(x, z) = -\frac{i\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}[\lambda(H + z)](A + iB\lambda)e^{i\lambda x}}{\Delta(\lambda)} d\lambda \quad (2.3)$$

$$\Delta(\lambda) \equiv D\lambda^5 \operatorname{sh}(\lambda H) - \rho h \omega^2 \lambda \operatorname{sh}(\lambda H) + \rho g \lambda \operatorname{sh}(\lambda H) - \rho \omega^2 \operatorname{ch}(\lambda H)$$

Равенство нулю знаменателя подынтегральной функции в (2.3) представляет собой дисперсионное уравнение, которое имеет два вещественных ($\pm\lambda_0$), счетное множество мнимых и две пары комплексно-сопряженных корней. Вещественные корни $+\lambda_0$ и $-\lambda_0$ соответствуют волновым числам незатухающих прогрессивных волн. Счетное множество мнимых корней характеризует волны, экспоненциально затухающие с удалением от опоры. Две пары комплексно-сопряженных корней определяют затухающие прогрессивные волны, обусловленные изгибной жесткостью пластины.

Интегрирование в (2.3) проводится вдоль вещественной оси с обходом положительного корня знаменателя подынтегральной функции ($+\lambda_0$) снизу, а отрицательного корня ($-\lambda_0$) сверху (принцип предельного поглощения).

Используя теорему о вычетах и учитывая четность функции $\Delta(\lambda)$, можно получить выражение для $\psi(x, z)$ в виде суммы. В результате имеем следующее представление волнового поля в жидкости (всюду далее суммирование ведется от $n = 0$ до $n = \infty$):

$$\Phi(x, z) = C \operatorname{ch}[\lambda_0(H + z)] e^{i\lambda_0 x} - i\omega \sum \frac{\operatorname{ch}[\lambda_n(z + H)](Ai - B\lambda_n \operatorname{sign} x) e^{i\lambda_n |x|}}{\Delta'(\lambda_n)} \quad (2.4)$$

где λ_n ($n > 0$) – корни функции $\Delta(\lambda)$, расположенные в верхней комплексной плоскости.

Используя кинематическое условие (1.6), получим выражение для изгибного поля в пластине

$$\zeta(x) = \frac{i}{\omega} C \lambda_0 \operatorname{sh}(\lambda_0 H) e^{i\lambda_0 x} + \sum \frac{\operatorname{sh}(\lambda_n H) (A i \lambda_n - B \lambda_n^2 \operatorname{sign} x) e^{i\lambda_n |x|}}{\Delta'(\lambda_n)} \quad (2.5)$$

Наконец, на основании условий жесткого задела (1.3), которым должно удовлетворять вертикальное смещение пластины $\zeta(x)$, определяются неизвестные коэффициенты A и B

$$A = -\Lambda_1, \quad B = i\Lambda_2 \quad (2.6)$$

$$\Lambda_k = \frac{1}{\omega} C \lambda_0^k \operatorname{sh}(\lambda_0 H) \left[\sum \frac{\lambda_n^{2k-1} \operatorname{sh}(\lambda_n H)}{\Delta'(\lambda_n)} \right]^{-1}, \quad k = 1, 2 \quad (2.7)$$

3. Построение решения. Случай бесконечно глубокой жидкости. Решение строится способом, аналогичным приведенному выше. Вместо условия непротекания на дне (1.8) здесь используется условие, требующее, чтобы жидкость на большой глубине находилась в состоянии покоя: $\Phi(x, z) \rightarrow 0, z \rightarrow -\infty$. Поэтому для падающей волны имеем

$$\Phi_0(x, z) = C e^{i\lambda_0 x} e^{\lambda_0 z} \quad (3.1)$$

где λ_0 – положительный корень дисперсионного уравнения

$$\Delta(\lambda) \equiv D\lambda^5 - \rho h \omega^2 \lambda + \rho g \lambda - \rho \omega^2 = 0 \quad (3.2)$$

Рассеянное поле определяется по формуле

$$\Psi(x, z) = -\frac{i\omega}{2\pi} \int_0^\infty \frac{(A - iB\lambda) e^{-i\lambda x} + (A + iB\lambda) e^{i\lambda x}}{\Delta(\lambda)} e^{\lambda z} d\lambda \quad (3.3)$$

Обход положительного корня знаменателя подынтегральной функции осуществляется, как и в предыдущем случае, снизу.

Удовлетворяя кинематическому граничному условию (1.6), имеем выражение для поля смещений в пластине

$$\zeta(x) = \frac{i}{\omega} C \lambda_0 e^{i\lambda_0 x} + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{(A - iB\lambda) e^{-i\lambda x} + (A + iB\lambda) e^{i\lambda x}}{\Delta(\lambda)} \lambda d\lambda \quad (3.4)$$

Коэффициенты A и B определяются по формулам (2.6), в которых

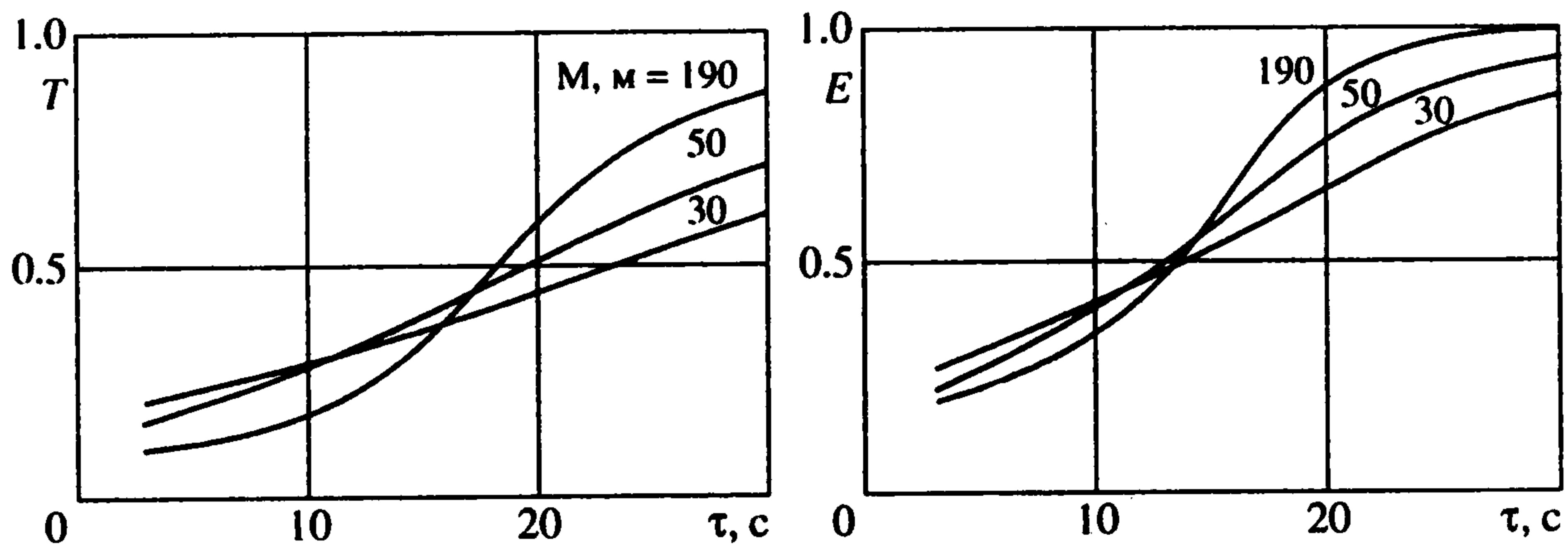
$$\Lambda_k = \frac{\pi i}{\omega} C \lambda_0^k \left[\int_0^\infty \frac{\lambda^{2k-1} d\lambda}{\Delta(\lambda)} \right]^{-1}, \quad k = 1, 2 \quad (3.5)$$

4. Прохождение падающей волны. Амплитудные коэффициенты прохождения C_T и отражения C_R падающей волны вычисляются по формулам

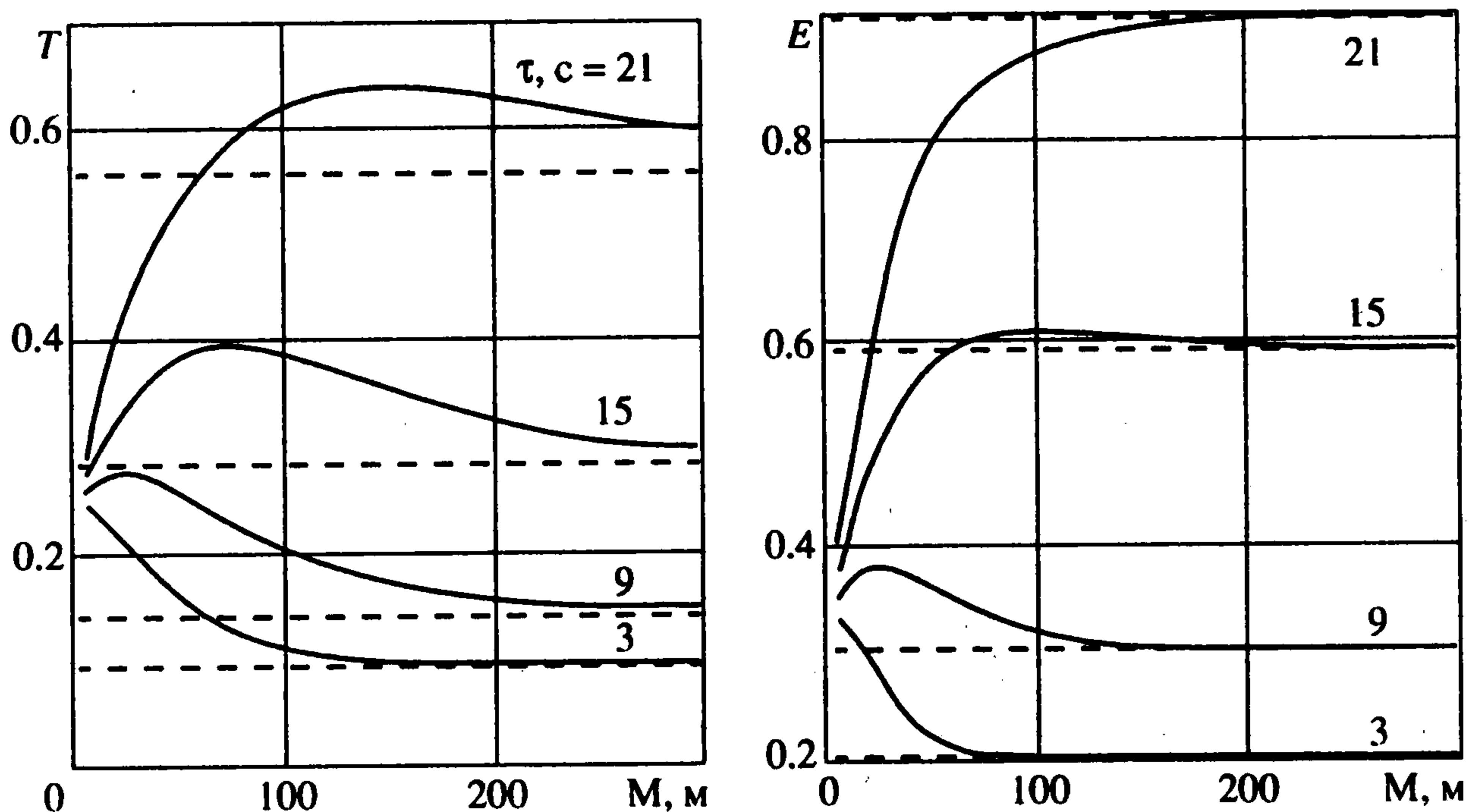
$$C_T = 1 - \frac{i\omega}{C} \frac{A i - B \lambda_0}{\Delta'(\lambda_0)}, \quad C_R = -\frac{i\omega}{C} \frac{A i + B \lambda_0}{\Delta'(\lambda_0)} \quad (4.1)$$

Для количественной оценки влияния на прохождение падающей волны таких факторов, как период волны и глубина водоема, проведена серия численных экспериментов при жесткости пластины $D = 3.33 \cdot 10^{10}$ Н·м, плотности жидкости (воды) $\rho = 1025$ кг/м³ и осадке пластины $h = 3$ м.

На фиг. 2 представлены зависимости энергетического коэффициента прохождения T падающей волны и относительного потока энергии в воде $E = \Pi_w / (\Pi_w + \Pi_p)$



Фиг. 2



Фиг. 3

(Π_w и Π_p – потоки энергии в воде и пластине) от периода падающей волны τ для разных глубин водоема M ($M = H + h$). Видно, что при увеличении периода волны коэффициент прохождения возрастает. Это можно объяснить следующим образом. С увеличением периода уменьшается механическое сопротивление пластины. Относительная доля потока энергии, переносимой волной изгиба в пластине, сокращается. Основную роль в переносе энергии начинает играть вода, что приводит к увеличению коэффициента прохождения, поскольку опора, по предположению, не препятствует движениям воды. Зависимости $T(\tau)$ и $E(\tau)$ качественно одинаковы, однако количественно они различаются. Жесткая опора, запрещающая вертикальные смещения пластины, одновременно препятствует и вертикальному движению жидких частиц, которые под опорой смещаются в основном в горизонтальном направлении. Такая трансформация движения приводит к дополнительному отражению волны. Таким образом, коэффициент отражения от опоры существенно больше, чем этого следовало бы ожидать на основании простого сопоставления интенсивности обоих каналов передачи энергии.

Графики на фиг. 3 иллюстрируют зависимости энергетического коэффициента прохождения и относительного потока энергии в воде от глубины водоема для разных периодов падающей волны. Штриховые линии отвечают случаю бесконечно глубокой воды. Видно, что коэффициент прохождения волны меняется с ростом глубины водоема немонотонно, и при некоторой глубине наблюдается максимум коэф-

<i>M, м</i>	$\tau, c = 3$	5	7	9	11	13	15	17	21
5	98.3	117.0	131.5	143.6	154.2	163.8	172.6	180.9	196.2
10	120.2	144.1	162.9	179.0	193.5	206.9	219.7	231.9	255.7
20	136.0	165.3	188.8	209.6	228.9	247.4	265.7	284.0	321.4
30	142.4	175.2	202.0	226.3	249.5	272.4	295.5	319.3	369.4
50	146.7	183.3	214.6	244.0	273.4	303.7	335.7	369.6	443.4
90	147.7	186.3	220.8	255.0	291.4	331.8	377.5	428.7	543.0
190	147.7	186.6	221.6	257.1	296.3	342.8	400.5	472.4	652.5
300	147.7	186.6	221.6	257.1	296.4	343.2	401.8	476.9	680.4

коэффициента прохождения. Глубина водоема, соответствующая этому максимуму, с возрастанием периода увеличивается. Аналогично меняется относительный поток энергии в воде. При увеличении глубины водоема сначала происходит расширение "жидкостного" канала передачи энергии, вследствие чего коэффициент прохождения возрастает. При этом влияние дна сводится к усилению горизонтальных смещений жидких частиц, для которых опора не является препятствием. При больших глубинах водоема эта роль дна ослабевает, и коэффициент прохождения несколько уменьшается.

При выполнении расчетов использовалась традиционная [1–8] модель идеальной жидкости. В рамках этой модели трением жидкости о ее неподвижные границы, и в частности о дно водоема, пренебрегают. Трение о дно, особенно с учетом неровностей его рельефа, препятствует горизонтальным движениям придонного слоя жидкости. Поэтому реальные значения коэффициента прохождения волны в случае малых глубин водоема могут оказаться несколько меньше расчетных.

В таблице даны значения длин волн разных периодов для разных значений глубины водоема.

5. Внутренние усилия в опоре. Известно, что изгибающий момент и перерезывающая сила характеризуются скачками второй и третьей производных функции $\zeta(x)$ в нуле. Воспользуемся уравнением равновесия пластины (1.4). Получим

$$D\zeta'''(x) = I(x) + \frac{A}{2} \operatorname{sign} x + B\delta(x) + C_1$$

$$D\zeta''(x) = \int I(x)dx + \frac{A}{2} |x| + \frac{B}{2} \operatorname{sign} x + C_1x + C_2$$

$$I(x) = \int (\rho h \omega^2 \zeta(x) + P(x, 0)) dx$$

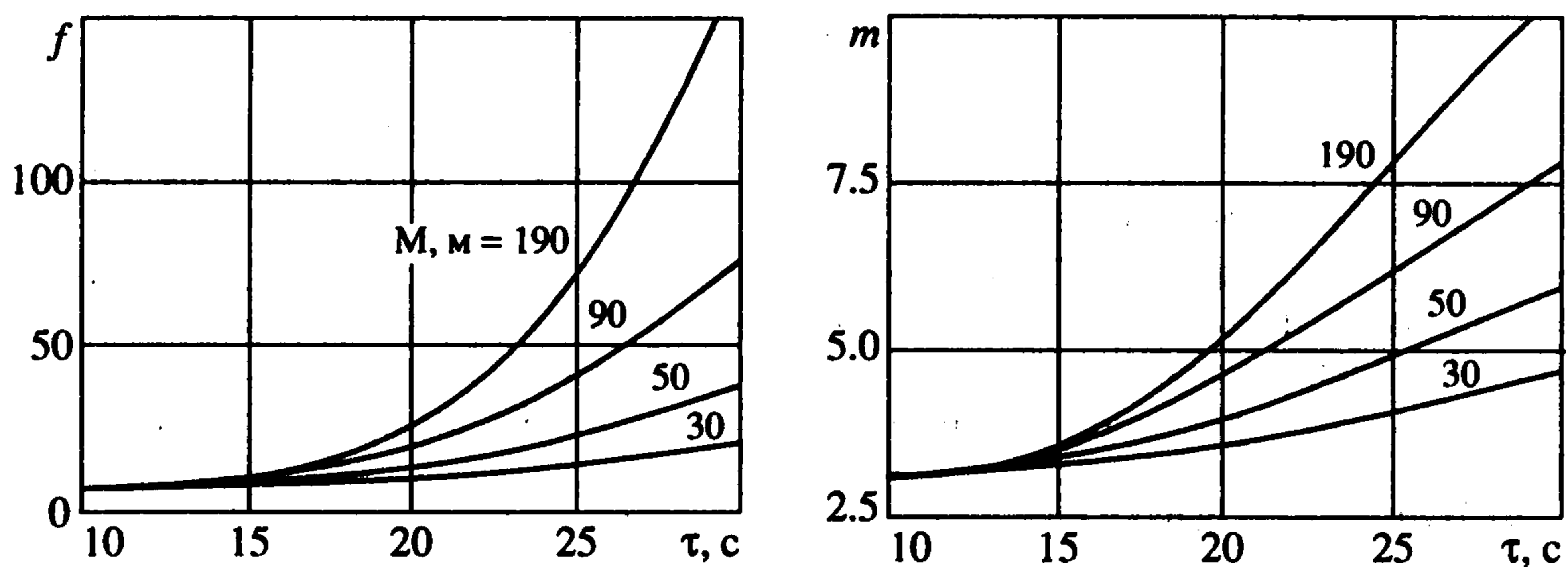
Из непрерывности функций $\zeta(x)$ и $P(x, 0)$ и свойства сосредоточенности носителя $\delta(x)$ в нуле следуют соотношения для скачков третьей и второй производных функции $\zeta(x)$ в нуле

$$D[\zeta'''(x)]|_{x=0} = A, \quad D[\zeta''(x)]|_{x=0} = B$$

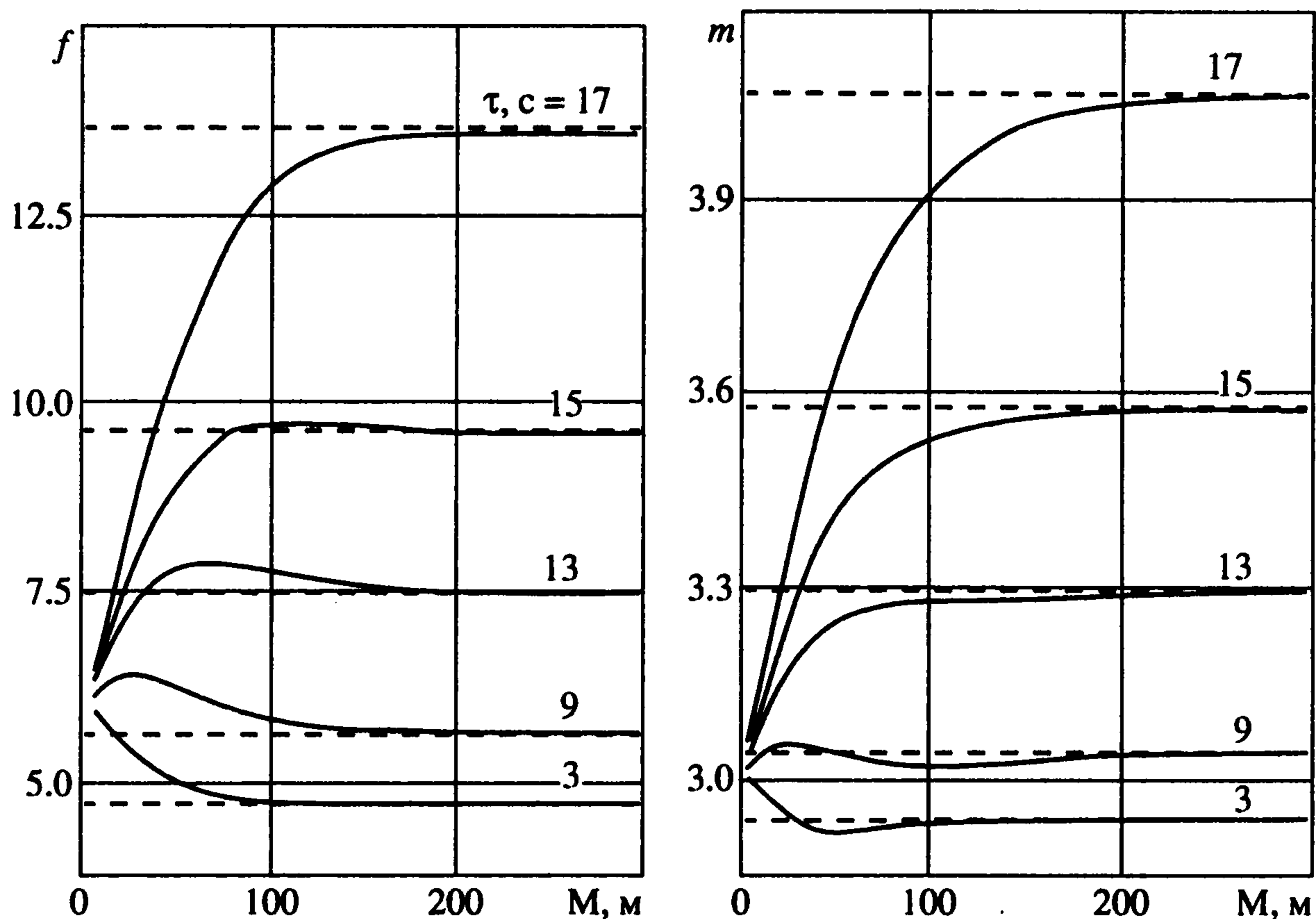
Таким образом, коэффициенты A и B с точностью до знака представляют собой перерезывающую силу и изгибающий момент в опоре.

На фиг. 4 и 5 приведены графики, отражающие влияние периода падающей волны и глубины водоема на внутренние усилия, развиваемые в опоре. Здесь f и m – модули нормализованных внутренних усилий – перерезывающей силы и изгибающего момента. Нормировка осуществлена по вкладу падающей волны в соответствующее внутреннее усилие. Нормировочные коэффициенты для перерезывающей силы и изгибающего момента вычислены по формулам

$$C_f = \frac{Di}{\omega} \frac{\partial^4 \Phi_0}{\partial x^3 \partial z} \Big|_{x=0, z=0}, \quad C_m = \frac{Di}{\omega} \frac{\partial^3 \Phi_0}{\partial x^2 \partial z} \Big|_{x=0, z=0}$$



Фиг. 4



Фиг. 5

Сопоставление приведенных графиков показывает сходство в характере поведения нормализованных внутренних усилий, энергетического коэффициента прохождения волны и относительного потока энергии в воде при изменении периода падающей волны и глубины водоема.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского конкурсного центра фундаментального естествознания (97-0-4.1-159, "Гранично-контактные задачи гидродинамики").

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
2. Марченко А.В., Прохоров И.В. О линейных волнах в потоке жидкости с постоянной завихренностью, находящейся под ледяным покровом // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 242-249.

3. *Марченко А.В.* Дифракция поверхностных волн на трещине в ледяном покрове // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 2. С. 93–102.
4. *Ohkusu M., Nanba Y.* Some problems of hydroelastic behavior of a floating thin plate in shallow water waves // Proc. 13th Intern. Workshop on Water Waves and Floating Bodies. The Netherlands, Delft: Delft Univ. of Technol., 1998. P. 119–122.
5. *Takagi K.* Water wave beneath a floating elastic plate // Proc. 13th Intern. Workshop on Water Waves and Floating Bodies. The Netherlands. Delft: Delft Univ. of Technol., 1998. P. 143–146.
6. *Ohkusu M.* Hydroelastic interaction of a large floating platform with head seas // Proc. 14th Intern. Workshop on Water Waves and Floating Bodies. Port Huron, Michigan: Univ. of Michigan, 1999. P. 119–122.
7. *Takagi K.* Hydroelastic behavior of a very large floating structure in waves // Proc. 14th Intern. Workshop on Water Waves and Floating Bodies. Port Huron, Michigan. USA: Univ of Michigan, 1999. P. 137–140.
8. *Ohkusu M.* Analysis of wave force on a large and thin floating platform // Proc. 15th Intern. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Tel-Aviv University, Tel-Aviv: 2000. P. 138–141.

Санкт-Петербург
e-mail: kouzov @ ipme.ru

Поступила в редакцию
10.V.2001