УДК 532.546,532.685

© 2002 г. Э.В. Теодорович

МЕТОД УЛУЧШЕННОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ОПИСАНИИ ЭФФЕКТИВНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ

В предположении логнормальной статистики поля коэффициента проницаемости случайно-неоднородной среды получено уравнение для интегрального ядра, определяющего нелокальную связь между усредненными по ансамблю реализаций коэффициента проницаемости значениями градиента термодинамического потенциала и потока. Решение этого уравнения в крупномасштабном пределе воспроизводит известную формулу Ландау–Лифшица–Матерона, а в общем случае позволяет найти связь между парной корреляционной функцией флуктуаций коэффициентов проницаемости и формой интегрального ядра.

1. Постановка задачи. При описании явлений переноса в слабонеоднородных системах обычно принимается линейная связь между характеризующим степень неоднородности системы градиентом некоторого термодинамического потенциала и возникающим потоком, в изотропной системе имеющая вид

$$J_i(\mathbf{r}) = -\varkappa\nabla_i\varphi(\mathbf{r}) \tag{1.1}$$

где множитель пропорциональности $\varkappa$ будем называть коэффициентом проницаемости среды. В случайно-неоднородной среде коэффициент проницаемости – случайная функция координат, в результате чего потенциалы и потоки также оказываются случайными функциями координат.

В практических задачах непосредственный интерес представляет связь между усредненными по ансамблю реализаций коэффициента проницаемости градиентами и потоками, которая в общем случае является нелокальной и имеет вид

$$\langle J_i(\mathbf{r})\rangle = -\int K(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\langle\nabla_i\varphi(\mathbf{r}')\rangle d\mathbf{r}' \tag{1.2}$$

где интегральное ядро $K(\mathbf{r})$ отлично от нуля в некоторой конечной области с размерами порядка l. Если характерные размеры, на которых $\langle\nabla_i\varphi(\mathbf{r})\rangle$ меняется существенным образом, велики по сравнению с l (крупномасштабный предел), то можно принять

$$K(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = K_{\text{eff}}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \qquad K_{\text{eff}} = \int K(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \tilde{K}(\mathbf{q})|_{q=0}$$

$$K(\mathbf{r}) = \int \tilde{K}(\mathbf{q})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}, \qquad \tilde{K}(\mathbf{q}) = \int K(\mathbf{r})e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}d\mathbf{r} \tag{1.3}$$

$\tilde{K}(\mathbf{q})$ – Фурье-образ интегрального ядра $K(\mathbf{r})$, d – размерность пространства.

Задача заключается в вычислении эффективного коэффициента проницаемости K_{eff}, а также интегрального ядра $K(\mathbf{r})$ (или его Фурье-образа $\tilde{K}(\mathbf{q})$) при заданной статистике реализаций случайного поля $\varkappa(\mathbf{r})$.

Ниже проведем исследование на примере фильтрационных течений в пористых средах, при этом роль термодинамического потенциала будет играть давление p, потоку будет соответствовать скорость фильтрации v_i, а основному уравнению теории необратимых процессов (1.1) будет соответствовать закон Дарси

$$v_i(\mathbf{r}) = -\varkappa(\mathbf{r})\nabla_i p(\mathbf{r}) \tag{1.4}$$

Будем рассматривать безграничную среду с заданным регулярным источником жидкости с плотностью $\rho(\mathbf{r})$. Из условия несжимаемости следует

$$\nabla_i v_i(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \tag{1.5}$$

Используя закон Дарси, получим уравнение для давления

$$\nabla_i[\varkappa(\mathbf{r})\nabla_i p(\mathbf{r})] = -\rho(\mathbf{r}) \tag{1.6}$$

Основная трудность решения подобных задач заключается в том, что для нахождения усредненных характеристик необходимо предварительно построить решение стохастического дифференциального уравнения в виде функционала от случайного поля реализаций $\varkappa(\mathbf{r})$, а затем провести усреднение этого решения по ансамблю реализаций. В общем случае решение уравнения с переменными (случайными) коэффициентами не удается представить в замкнутой форме, и точное статистическое решение может быть получено только в очень частных случаях.

Самым простым способом вычисления эффективной проницаемости (ЭП) является использование теории возмущений, когда решения для скорости и градиента давления представляются в виде разложения в ряд по степеням величины $\delta\varkappa(\mathbf{r})/\langle\varkappa\rangle$, рассматриваемой как малый параметр. Последующее почленное усреднение полученных рядов при заданной статистике флуктуаций проницаемости (обычно нормальной или логнормальной) позволяет вычислить $\langle\mathbf{v}\rangle$ и $\langle\nabla p\rangle$ и тем самым найти ЭП в том или ином приближении теории возмущений в виде ряда по степеням дисперсии флуктуаций коэффициента проницаемости. Подобный подход будем условно называть "простой теорией возмущений" (см. [1]). В рамках подобного подхода приходится ограничиваться только низшими приближениями теории возмущений и вопрос о том, насколько хорошо низшие приближения теории возмущений описывают поведение ЭП при больших дисперсиях, также как и вопрос о сходимости ряда, остаются открытыми. В связи с оценкой роли высших приближений на основе анализа точных флуктуаций проницаемости в двумерном случае [2] и общих феноменологических соображений [3] было высказано предположение [4], что зависимость ЭП от дисперсии логарифма проницаемости является экспоненциальной и низшие приближения теории возмущений соответствуют тейлоровскому разложению экспоненты. Соответствующая гипотеза получила название формулы Ландау–Лифшица–Матерона. Обоснование этой формулы в течение длительного времени является предметом многочисленных исследований. В частности, эта гипотеза находит подтверждение по крайней мере вплоть до членов второго порядка по величине дисперсии [5] и есть указания на ее нарушение в более высоких приближениях [6, 7].

Для улучшения теории возмущений путем суммирования некоторой бесконечной подпоследовательности полного ряда теории возмущений, используются методы, заимствованные из квантовой теории поля. В частности, вместо собирания членов одного порядка малости, применяемого при построении ряда в рамках простой теории возмущений, осуществляется переход от дифференциального уравнения для функции Грина к интегральному, итерационное решение которого воспроизводит ряд теории возмущений [8]. При таком подходе нетрудно выявить структуру произвольного члена ряда. Элементам этой структуры можно однозначно поставить в соответствие некоторые графические символы – диаграммы Фейнмана и в дальнейшем осуществлять анализ ряда на языке фейнмановских диаграмм [8–10]. В частности, в рамках этого подхода удается осуществить суммирование диаграммного ряда и получить уравнение Дайсона, в которое входит некоторый новый элемент, называемый оператором собственной энергии (в приложении к другим задачам его иногда называют поляризационным оператором). Использование теории возмущений уже для оператора собственной энергии, последующая его подстановка в уравнение Дайсона и решение полученного уравнения соответствует суммированию некоторой бесконечной подпоследовательности полного ряда –

суммирование одночастично-неприводимых диаграмм. Подобный подход представляется естественным называть "частичным суммированием ряда теории возмущений".

Дальнейшее улучшение теории возмущений может быть осуществлено с помощью метода ренормализационной группы (ренормгруппы). Для исследования процессов в случайных средах этот метод, по-видимому, впервые, был использован в работе [10]. Авторы применили метод ренормгруппы для дальнейшего улучшения теории возмущений, когда оператор собственной энергии определяется не в низшем приближении теории возмущений, а является решением некоторого уравнения, соответствующего теории самосогласованного поля. Это направление получило развитие в ряде других работ (см. например, работу [11], содержащую наиболее полный обзор ренормгруппового подхода к проблеме).

Данная работа посвящена исследованию поведения эффективной проницаемости в рамках улучшенной теории возмущений, основывающейся на частичном суммировании полного ряда теории возмущений. В отличие от обычного способа приближенного нахождения коэффициента диффузии на основе теории возмущений, в предлагаемом подходе строится приближенное уравнение для интегрального ядра $K^{-1}(\mathbf{r})$, определенного соотношением

$$\langle \nabla_i p(\mathbf{r}) \rangle = -\int K^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \langle v_i(\mathbf{r}') \rangle d\mathbf{r}' \tag{1.7}$$

Знание $K^{-1}(\mathbf{r})$ позволяет вычислить эффективный коэффициент проницаемости по формуле

$$K_{\text{eff}}^{-1} = \int K^{-1}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \tag{1.8}$$

2. Определяющие уравнения. Представим поле скорости в виде суперпозиции потенциальной и соленоидальной частей

$$v_i(\mathbf{r}) = v_i^p(\mathbf{r}) + v_i^s(\mathbf{r}); \qquad \nabla_i v_j^p(\mathbf{r}) = \nabla_j v_i^p 0, \qquad \nabla_i v_i^s(\mathbf{r}) = 0 \tag{2.1}$$

При этом уравнение (1.6) определяет только потенциальную часть

$$v_i^p(\mathbf{r}) = (\nabla)_i^{-1} \rho(\mathbf{r}) = \nabla_i \Delta^{-1} \rho(\mathbf{r}) \tag{2.2}$$

где $\Delta^{-1} = G^{(0)}(\mathbf{r})$ – функция Грина для оператора Лапласа, являющаяся решением уравнения

$$\Delta G^{(0)}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \tag{2.3}$$

С целью нахождения уравнения для соленоидальной части скорости фильтрационного потока v_i^s вычислим величину, которой в трехмерном пространстве соответствует rot rot $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. С учетом соотношений (2.1) и закона Дарси (1.4) найдем

$$\nabla_j[\nabla_i v_j(\mathbf{r}) - \nabla_j v_i(\mathbf{r})] = -\nabla_j \nabla_j v_i^s(\mathbf{r}) = -\nabla_j[\nabla_i \varkappa(\mathbf{r}) \nabla_j p(\mathbf{r}) - \nabla_j \varkappa(\mathbf{r}) \nabla_i p(\mathbf{r})]$$

Вторично воспользовавшись законом Дарси для исключения давления, найдем

$$\nabla_j \nabla_j v_i^s(\mathbf{r}) = -[\nabla_k u_k(\mathbf{r}) \delta_{ij} - \nabla_j u_i(\mathbf{r})] v_j(\mathbf{r}), \qquad u_i(\mathbf{r}) = \nabla_i u(\mathbf{r}) \tag{2.4}$$

где $\varkappa(\mathbf{r}) = \varkappa_0 \exp\{u(\mathbf{r})\}$, $\varkappa_0$ – произвольная постоянная с размерностью проницаемости. Если потребовать $\langle u(\mathbf{r}) \rangle = 0$, то постоянная $\varkappa_0$ окажется равной среднему геометрическому

$$K_G = \lim_{N\to\infty} \left[\prod_n^N \varkappa_n \right]^{1/N}$$

В результате уравнение для компонент скорости фильтрационного потока примет вид

$$v_i(\mathbf{r}) = v_i^p(\mathbf{r}) - \int G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')[\nabla'_k u_k(\mathbf{r}') \delta_{ij} - \nabla'_j u_i(\mathbf{r}') v_j(r') d\mathbf{r}' \tag{2.5}$$

Оно может быть также представлено в виде, соответствующем формализму Мартина–Сиггиа–Роуза [12]

$$v_i(\mathbf{r}) = v_i^p(\mathbf{r}) - \int G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\Gamma_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) u(\mathbf{r}_2) v_j(\mathbf{r}_3) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \tag{2.6}$$

где функция $\Gamma_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ (в диаграммной технике называемая обычно вершиной) имеет вид

$$\Gamma_{ij}^{(0)}(\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \lambda_0[(\nabla^{(2)} \cdot \nabla^{(1)})\delta_{ij} - \nabla_i^{(2)}\nabla_j^{(1)}]\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)$$

λ_0 – равный единице формальный параметр разложения в ряд теории возмущений, индекс в скобках у операторов дифференцирования показывает, на какие из координат действует оператор.

Функция $\Gamma_{ij}^{(0)}$ обладает свойствами

$$\nabla_i^{(1)}\Gamma_{ij}(\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = 0, \qquad \int P_{in}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_1')\Gamma_{nj}(\mathbf{r}_1' \mid \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) d\mathbf{r}_1' = \Gamma_{ij}(\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \tag{2.7}$$

где $P_{ij}(\mathbf{r}) = \delta_{ij}\delta(\mathbf{r}) - \nabla_i\nabla_j\Delta^{-1}(\mathbf{r})$ – оператор поперечного проектирования.

3. Формула для эффективной проницаемости. Использование метода итераций приводит к представлению решения уравнения (2.5) в виде

$$v_i(\mathbf{r}) = \int R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' \mid u(\mathbf{r})) v_j^p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \tag{3.1}$$

где резольвентное ядро R_{ij} является функционалом от реализаций случайного поля $u(\mathbf{r})$.

Подставляя выражение (3.1) в уравнение (2.5), получим уравнение для R_{ij}

$$R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' \mid u(\mathbf{r})) = \delta_{ij}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') -$$
$$-\int G^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) u(\mathbf{r}_2) \Gamma_{ik}^{(0)}(\mathbf{r}_1 \mid \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) R_{kj}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}' \mid u(\mathbf{r})) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \tag{3.2}$$

которое может быть переписано в эквивалентном виде

$$R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' \mid u(\mathbf{r})) = \delta_{ij}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') -$$
$$-\int R_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \mid u(\mathbf{r})) G^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) u(\mathbf{r}_2) \Gamma_{kj}^{(0)}(\mathbf{r}_3 \mid \mathbf{r}_2, \mathbf{r}') d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \tag{3.3}$$

Усредняя соотношение (3.1) по ансамблю реализаций с учетом статистической однородности системы, получим

$$\langle v_i(\mathbf{r}) \rangle = \int \overline{R}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') v_j^p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \qquad \overline{R}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' \mid u(\mathbf{r})) \rangle \tag{3.4}$$

Общая структура тензорного интегрального ядра $\overline{R}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ имеет вид

$$\overline{R}_{ij}(\mathbf{r}) = \delta_{ij}\delta(\mathbf{r}) + \int P_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \overline{R}^{(1)}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

Поскольку в выражении (3.4) $\overline{R}_{ij}$ сворачивается с потенциальным вектором, а свертка оператора поперечного проектирования с потенциальным вектором равна нулю, получим

$$\langle v_i(\mathbf{r}) \rangle = v_i^p(r) = \nabla_i \Delta^{-1} \rho(\mathbf{r}) \tag{3.5}$$

и тем самым задача вычисления эффективной проницаемости сводится к нахождению $\langle \nabla_i p(\mathbf{r}) \rangle$.

Для вычисления градиента давления воспользуемся законом Дарси

$$\nabla_i p(\mathbf{r}) = -\varkappa^{-1}(\mathbf{r}) \int R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}' \mid u(\mathbf{r})) v_j^p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \tag{3.6}$$

Усреднение соотношения (3.6) с учетом равенства (3.5) приводит к представлению для интегрального ядра обратной проницаемости

$$K_{ij}^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \langle \varkappa^{-1}(\mathbf{r}) R_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}' \mid u(\mathbf{r}))\rangle = K_G^{-1}\langle e^{-u(\mathbf{r})} R_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}' \mid u(\mathbf{r}))\rangle \tag{3.7}$$

Использование уравнения (3.2) приводит к соотношению

$$K_{ij}^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \langle \varkappa^{-1}\rangle \delta_{ij}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') -$$

$$-K_G^{-1}\int \langle e^{-u(\mathbf{r})} R_{in}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1 \mid u(\mathbf{r}))u(\mathbf{r}_2)\rangle G^{(0)}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)\Gamma_{nj}^{(0)}(\mathbf{r}_3 \mid \mathbf{r}_2,\mathbf{r}')d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \tag{3.8}$$

С целью получения уравнения для K_{ij}^{-1} воспользуемся справедливой для нормального распределения поля $u(\mathbf{r})$ формулой, известной как формула Фурутцу – Новикова [13, 14],

$$\langle F\{u(\mathbf{r})\}u(\mathbf{r}')\rangle = \left\langle \frac{\delta F\{u(\mathbf{r})\}}{\delta u(\mathbf{r})} \right\rangle B(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{3.9}$$

$$B(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \langle u(\mathbf{r})u(\mathbf{r}')\rangle, \qquad \langle u(\mathbf{r})\rangle = 0$$

В применении к случаю (3.8) это дает

$$\langle e^{-u(\mathbf{r})} R_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}' \mid u(\mathbf{r}))u(\mathbf{r}_2)\rangle =$$

$$= -\langle e^{-u(\mathbf{r})} R_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}' \mid u(\mathbf{r}))\rangle B(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) + \int \left\langle e^{-u(\mathbf{r})} \frac{\delta R_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}' \mid u(\mathbf{r}))}{\delta u(\mathbf{r}'')} \right\rangle B(\mathbf{r}''-\mathbf{r}_2)d\mathbf{r}'' \tag{3.10}$$

Подынтегральное выражение содержит статистическое среднее, для нахождения которого следует вычислить $\delta R/\delta u$ с помощью уравнения для резольвенты (3.3)

$$\frac{\delta R_{ij}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\delta u(\mathbf{r}'')} = -\int R_{in}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)G^{(0)}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1')\Gamma_{nj}(\mathbf{r}_1' \mid \mathbf{r}'',\mathbf{r}')d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_1' -$$

$$-\int \frac{\delta R_{in}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1)}{\delta u(\mathbf{r}'')} G^{(0)}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_1')\Gamma_{nj}(\mathbf{r}_1' \mid \mathbf{r}_2,\mathbf{r}')u(\mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_1' d\mathbf{r}_2 \tag{3.11}$$

Умножение этого выражения на $\exp\{-u(\mathbf{r}_1)\}$ и последующее усреднение по ансамблю реализации случайного поля $u(\mathbf{r})$ с помощью формулы Фурутцу–Новикова приводит к уравнению для $\langle \exp\{-u\}\delta R/\delta u\rangle$, содержащему кроме K^{-1} также выражение вида $\langle \exp\{-u\}\delta^2 R/(\delta u)^2\rangle$, в котором вторая вариационная производная может быть найдена с помощью вычисления вариационной производной от $\delta R/\delta u$ с последующим умножением на $\exp\{-u\}$ и использованием формулы Фурутцу–Новикова. Многократное повторение этой процедуры приводит к цепочке уравнений, содержащих вариационные производные все более высоких порядков. Получающаяся бесконечная система уравнений аналогична цепочке уравнений для многочастичных функций распределения Боголюбова–Борна–Грина–Ивона–Кирквуда в статистической физике или цепочке уравнений Фридмана–Келлера в теории турбулентности. Обрыв цепочки обычно осуществляется с помощью какой-либо схемы замыкания.

В рассматриваемом здесь случае прямой анализ этой бесконечной цепочки показывает, что влияние содержащего $\delta R/\delta u$ члена в уравнении для K^{-1} сводится к замене во втором слагаемом правой части уравнения (3.8) функции Грина $G^{(0)}$ и вершины $\Gamma^{(0)}$ на некоторые новые величины, которые соответственно будем называть полной (перенормированной) функцией Грина и полной (перенормированной) вершиной. Учет эффектов перенормировки функции Грина и вершины в рамках метода ренормализационной группы показывает, что эти эффекты дают компенсирующие друг друга вклады. Наличие указанной компенсации было обнаружено ранее [10] при исследовании близкой по характеру задачи нахождения коэффициента эффективной диффузии в случайном поле скоростей, а в применении к данной задаче в рамках ренорм-группового подхода этот результат был получен в работе [15].

При вычислении ЭП в рамках теории возмущений было сделано предположение [16], что вклады членов, учитывающих перенормировку функции Грина и учитывающих перенормировку вершины, малы. Однако учет этих вкладов в низших приближениях теории возмущений показывает, что это предположение не оправдывается, т.е. отдельные вклады не малы, а мала их сумма. В предположении о компенсации двух указанных эффектов можно отбросить последний член правой части уравнения (3.10) и получить замкнутое уравнение для интегрального ядра K_{ij}^{-1}

$$K_{ij}^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \langle \varkappa^{-1} \rangle \delta_{ij} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') +$$
$$+ \int K_{in}^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) G^{(0)}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3) B(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2) \Gamma_{nj}^{(0)}(\mathbf{r}_3 \mid \mathbf{r}_2, \mathbf{r}') d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \qquad (3.12)$$

С учетом соотношения $K_{ij}^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta_{ij} K^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ и используя явный вид оператора $\Gamma_{ij}^{(0)}$, при $\mathbf{r}' = 0$ найдем

$$K^{-1}(\mathbf{r}) = \langle \varkappa^{-1} \rangle \delta(\mathbf{r}) + \frac{d-1}{d} \nabla_i B(\mathbf{r}) \cdot \nabla_i \int G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) K^{-1}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \qquad (3.13)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$K^{-1}(\mathbf{r}) = \langle \varkappa^{-1} \rangle \left\{ \delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{S_d r^{d-1}} \frac{d}{dr} \exp\left[\frac{d-1}{d} [B(r) - B(0)] \right] \right\} \qquad (3.14)$$

$S_d = 2\pi^{d/2} / \Gamma(d/2)$ – площадь поверхности d-мерной сферы единичного радиуса.

Однако, чтобы проверить справедливость соотношения (3.14) необходимо учесть, что в силу сингулярного характера решений все операции проводятся в пространстве обобщенных функций и следует аккуратно дифференцировать сингулярные выражения.

Проиллюстрируем это на примере функции Грина d-мерного уравнения Лапласа, которая имеет вид

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{(d-2) S_d r^{d-2}}$$

Формальное применение к этой функции оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{d}{dr} r^{d-1} \frac{d}{dr}$$

дает нуль, а не $\delta(\mathbf{r}) = (S_d r^{d-1})^{-1} \delta(r)$, как это следует из уравнения для функции Грина. Чтобы доопределить действие оператора Лапласа на функцию Грина, будем ее рассматривать как предел некоторой регулярной функции

$$G(\mathbf{r}) = -\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{(d-2-\varepsilon) S_d r^{d-2-\varepsilon}}$$

приняв при этом

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{S_d r^{d-1}} \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varepsilon}{r^{1-\varepsilon}}$$

Определенная согласно этому равенству δ-функция имеет Фурье-образ

$$\frac{2\pi^{d/2} \Gamma(\varepsilon/2+1)}{S_d \Gamma(d/2-\varepsilon/2)} \left(\frac{q^2}{4} \right)^{\varepsilon/2}$$

в пределе $\varepsilon \to +0$ равный единице, т.е. Фурье-образу δ-функции.

Используя представление решения для $K^{-1}(\mathbf{r})$ в виде

$$K^{-1}(\mathbf{r})=\frac{\langle\varkappa^{-1}\rangle}{S_d}\lim_{\varepsilon\to\infty}\Delta\int_{r_0}^{r}\exp\left\{\frac{d-1}{d}[B(\eta)-B(0)]\right\}\frac{d\eta}{\eta^{d-1-\varepsilon}} \tag{3.15}$$

нетрудно убедиться, что оно удовлетворяет уравнению (3.13).

Из выражений (3.14), (3.15) при учете условия $B(\infty)=0$ и равенства величины $B(0)$ дисперсии логарифма проницаемости σ^2 можно найти

$$\frac{1}{K_{\text{eff}}}=\int K^{-1}(\mathbf{r})d\mathbf{r}=\langle\varkappa^{-1}\rangle\exp\left\{-\frac{d-1}{d}\sigma^2\right\} \tag{3.16}$$

В случае логнормального распределения проницаемости $\langle\varkappa^{-1}\rangle=\exp\{\sigma^2/2\}/K_G$, что приводит к результату

$$K_{\text{eff}}=K_G\exp\left\{\frac{d-2}{2d}\sigma^2\right\} \tag{3.17}$$

воспроизводящему формулу Ландау–Лифшица–Матерона.

Результат (3.14), (3.15) позволяет не только определить K_{eff} на основе знания дисперсии логарифма проницаемости, но также определить структуру интегрального ядра $K^{-1}(\mathbf{r})$ исходя из вида корреляционной функции флуктуаций коэффициента проницаемости. Для этого следует воспользоваться справедливой для логнормального распределения формулой

$$\exp\{B(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)-B(0)\}=\frac{\langle\varkappa(\mathbf{r})\varkappa(\mathbf{r}')\rangle}{\langle\varkappa\rangle^3\langle\varkappa^{-1}\rangle}=C(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \tag{3.18}$$

В результате формула (3.15) примет вид

$$K^{-1}(\mathbf{r})=\frac{\langle\varkappa^{-1}\rangle^{1/d}}{\langle\varkappa\rangle^{1-1/d}}\lim_{\varepsilon\to 0}\Delta\int_{r_0}^{r}[C(\eta)]^{(d-1)/d}\frac{d\eta}{\eta^{d-1-\varepsilon}} \tag{3.19}$$

4. Обсуждение. В крупномасштабном пределе выше получены соотношения (3.16), (3.17), соответствующие формуле Ландау–Лифшица–Матерона. Однако результат (3.15) дает также возможность найти форму интегрального ядра для обратной эффективной проницаемости на основе знания формы парной корреляционной функции логарифма проницаемости. В связи с этим возникает вопрос о том, насколько корректен вывод представления для интегрального ядра (3.15). Отметим, что переход от тензорного уравнения (3.12) к скалярному уравнению (3.13) подразумевает, что тензор $K_{ij}^{-1}(\mathbf{r})$ – диагональный, т.е. $K_{ij}^{-1}(\mathbf{r})=\delta_{ij}C(\mathbf{r})$. В действительности, в изотропной среде наиболее общая форма для тензора второго ранга имеет вид

$$K_{ij}^{-1}(\mathbf{r})=\delta_{ij}C(\mathbf{r})+\nabla_i\nabla_j\Delta^{-1}C^{(1)}(\mathbf{r}) \tag{4.1}$$

в результате чего уравнение (3.13) окажется представленным в виде

$$C(\mathbf{r})+\frac{1}{d}C^{(1)}(r)=\langle\varkappa^{-1}\rangle\delta(\mathbf{r})+\frac{d-1}{d}\nabla_i B(\mathbf{r})\nabla_i\int G^{(0)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)C(\mathbf{r}_1)d\mathbf{r}_1 \tag{4.2}$$

что совпадает с уравнением (3.13) только в случае $C^{(1)}(\mathbf{r})=0$.

Чтобы получить уравнение только для $C(\mathbf{r})$, следует выполнить свертку обеих частей равенства (3.13) с оператором поперечного проектирования, что после вычисления следа тензорного выражения дает

$$C(\mathbf{r})=\langle\varkappa^{-1}\rangle\delta(\mathbf{r})+\int C(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_1|)G^{(0)}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_3)\overline{\Gamma}(\mathbf{r}_3\,|\,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}')d\mathbf{r}_1d\mathbf{r}_2d\mathbf{r}_3$$

$$\overline{\Gamma}(\mathbf{r}_3\,|\,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}')=\frac{1}{d-1}\int\Gamma_{in}^{(0)}(\mathbf{r}_3\,|\,\mathbf{r}_2,\mathbf{r})P_{ni}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\mathbf{r}\neq\frac{1}{d}\Gamma_{ii}^{(0)}(\mathbf{r}_3\,|\,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}') \tag{4.3}$$

и, только если принять $C^{(1)}(\mathbf{r}) = 0$, получается уравнение (3.13), решение которого дается соотношениями (3.14), (3.15). Отметим, что при свертке (4.1) с потенциальным вектором $v_i^p = \nabla_i \varphi$ вклад величины $C^{(1)}$ оказывается ненулевым:

$$-\nabla_i p = K_{ij}^{-1} v_j^p = (C + C^{(1)}) v_i^p \tag{4.4}$$

$$K_{ij}^{-1} = (C + C^{(1)}) \delta_{ij}$$

Вследствие этого, при более аккуратном решении тензорного уравнения (3.12) следовало бы сначала определить $C(r)$ с помощью решения уравнения (4.3), а затем искать $C^{(1)}(\mathbf{r})$ путем подстановки выражения для $C(\mathbf{r})$ в уравнение (4.2), но для этого случая получить решение в замкнутом виде не удается.

Другое приближение, использованное выше при замыкании цепочки уравнений с фунциональными производными для резольвентного ядра, основано на предположении о возможности пренебречь $\delta R/\delta u$ в уравнении (3.10). Основанием для такого предположения являются расчеты, выполненные в рамках ренормгруппового подхода, когда вычисления по теории возмущений проводятся для некоторой модели, содержащей логарифмические расходимости. Полученные таким образом результаты после перенормировки суммируются с помощью требования ренормгрупповой инвариантности полного ряда теории возмущений, и затем эти результаты аналитически продолжаются по некоторому параметру к значению, соответствующему реальной модели. При таком подходе действительно оказывается, что Фурье-образ $C^{(1)}$ не содержит логарифмических расходимостей, а содержащие такие расходимости вклады членов, учитывающих перенормировки функции Грина и вершины, взаимно сокращаются.

Для выяснения того, в какой мере результаты ренормгруппового подхода обосновывают законность перечисленных выше приближений, были проведены вычисления эффективной проницаемости во втором приближении теории возмущений для модельного случая $B(r) = B_0 \exp\{-r^2/(4m)\}$. Расчет дает

$$K_{\text{eff}}^{-1} = K_G^{-1}\left[1 + \frac{d-1}{d}\sigma^2 + \frac{d-1}{2d}\sigma^4 (a_1 + a_2 + a_3)\right]$$

$$a_1 = 1 - \beta\left(\frac{d}{2}\right), \quad a_2 = -1 + (d-1)\beta\left(\frac{d}{2}\right), \quad a_3 = \frac{d-1}{d} - (d-2)\beta\left(\frac{d}{2}\right),$$

$$\beta\left(\frac{d}{2}\right) = \int_0^1 \frac{t^{d/2-1}}{1+t}\,dt \tag{4.5}$$

где a_1 – вклад второй итерации при решении тензорного уравнения (3.12), a_2 и a_3 учитывают соответственно вклады от эффектов перенормировки функции Грина и вершины. Из выражения (4.5) следует, что перечисленные выше предположения оказываются некорректными по крайней мере при $d = 2$, хотя и получается соответствующий формуле Ландау–Лифшица–Матерона суммарный результат. Однако при учете того, что с ростом d функция $\beta(d/2) \to 1/d$, находим $a_1 \to (d-1)/d$, $a_2 \to -1/d$, $a_3 \to 1/d$, и в пределе больших d использованные предположения оказываются справедливыми. Численные оценки показывают, что уже при $d = 3$ ошибка за счет использования указанных приближений не превышает 15%, а для гипотетического случая $d = 4$ не превышает 8%. Эти оценки дают основание надеяться, что использование формул (3.14), (3.15) для нахождения формы интегрального ядра $K_{ij}^{-1}(\mathbf{r})$ не приведет к большим погрешностям при построении статистического решения задачи переноса в случайно-неоднородной среде.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00957, 99-01-01083).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Швидлер М.И.* Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра. 1985. 288 с.
2. *Matheron G.* Elements pour une Theorie des Milieux Poreux. Paris: Masson. 1967. 166 p.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1957. 532 с.
4. *Gelhar L.W., Axness C.L.* Three-dimensional stochastic analysis of macrodispersion in aquifers // Water Resour. Res. 1983. V. 19. № 1. P. 161–180.
5. *Dagan G.* Higher-order correction of effective permeability of heterogeneous isotropic formations of lognormal conductivity distribution // Transport in Porous Media. 1993. V. 12. № 3. P. 279–290.
6. *De Wit A.* Correlation structure dependence of the effective permeability of heterogeneous porous media // Phys. Fluids. 1995. V. 7. № 11. P. 2553–2562.
7. *Abramovich B., Indelman P.* Effective permittivity of log-normal isotropic random media // J. Phys. A: Math. Gen. 1995. V. 28. № 3. P. 693–700.
8. *King P.R.* The use of field theoretic methods for the study of flow in a heterogeneous porous media // J. Phys. A: Math. Gen. 1987. V. 20. № 12. P. 3935–3947.
9. *Christakos G., Hristopulos D.T., Miller C.T.* Stochastic diagrammatic analysis of groundwater flow in heterogeneus porous media // Water Resour. Res. 1995. V. 31. № 7. P. 1687–1703.
10. *Dean D.S., Drummond I.T., Horgan R.R.* Perturbation schemes for flow in random media // J. Phys. A: Math. Gen. 1994. V. 27. № 15. P. 5135–5144.
11. *Hristopulos D.T., Christakos G.* Renormalization group analysis of permeability upscaling // Stochastic Enviromental Research and Risk Assessment. 1999. V. 13. № 1/2. P. 131–160.
12. *Martin P.C., Siggia E.D., Rose H.A.* Statistical dynamics of classical systems // Phys. Rev. 1973. V. 8A. № 1. P. 423–437.
13. *Новиков Е.А.* Метод случайных сил в теории турбулентности // ЖЭТФ. 1963. Т. 44. № 6. С. 2159–2168.
14. *Furutsu K.* On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium // J. Res. Nat. Bur. Standarts. 1963. V. 67D. № 3. P. 303–323.
15. *Теодорович Э.В.* Метод ренормализационной группы в задаче об эффективной проводимости случайно-неоднородной пористой среды // ЖЭТФ. 2002. Т. 122. № 1(7).
16. *Noettinger B.* The effective permeability of a heterogeneous porous medium // Transport in Porous Media. 1994. V. 15. C. 99–127.

Москва
e-mail: teodor@ipmnet.ru

Поступила в редакцию
30.X.2001