УДК: 533.72

© 2002 г. В.С. Галкин, В.А. Жаров

О ПЕРЕНОСНЫХ СВОЙСТВАХ ГАЗОВ В ПРИБЛИЖЕНИИ БАРНЕТТА

Приведены соотношения, необходимые для вычисления барнеттовых поправок к функциям распределения молекул многокомпонентных смесей многоатомных газов. Получены эффективные выражения для переносных свойств и "рабочие" формулы для коэффициентов переноса бинарной смеси одноатомных газов и многоатомного газа в приближении Барнетта без учета внешних сил. Рассмотрены нестационарные уравнения термострессовой конвекции многоатомного газа и даны оценки влияния вращательных степеней свободы молекул на коэффициенты этих уравнений.

В дополнение к предыдущей публикации [1] ниже представлены результаты, имеющие самостоятельный интерес (для одноатомного газа аналогичные данные см. [2, 3]), а также более полно рассмотрены важнейшие случаи бинарной смеси одноатомных газов и многоатомного газа. В последнем случае общие уравнения термо- и концентрационно-стрессовой конвекции [1] преобразуются к гораздо более простому виду. Получающееся в итоге уравнение импульса термострессовой конвекции содержит слагаемые, обусловленные барнеттовыми температурными напряжениями. Результаты проведенных оценок влияния вращательных степеней свободы молекул на коэффициенты перед этими слагаемыми необходимы, в частности, для анализа экспериментальных данных [4]. Ранее [5] были решены линейные задачи о распространении звука и структуре слабой ударной волны в многоатомном газе при помощи уравнений Барнетта. Без оговорок применяются принятые ранее обозначения [1].

1. Уравнения для барнеттовых поправок к функциям распределения. Система уравнений для барнеттовых поправок к функциям распределения $f_\Omega^{(2)} = f_\Omega^{(0)}\varphi_\Omega^{(2)}$ была записана [1] в виде

$$M_\Omega = n^2 R_\Omega(\varphi^{(2)}), \quad M_\Omega \equiv \frac{\partial_1 f_\Omega^{(0)}}{\partial t} + H_\Omega - L_\Omega(f^{(1)} f^{(1)}) \tag{1.1}$$

Первые два члена неоднородной части M_Ω уравнения (1.1) обусловлены конвективными слагаемыми кинетического уравнения, причем H_Ω – группа слагаемых, выраженных через собственные скорости молекул $\mathbf{c}_i$ и содержащих производные от $f_\Omega^{(1)}$. Аналогично изложенному ранее [2, 3] эти два члена представляются тремя группами слагаемых.

Первая группа зависит только от скаляра c_i

$$f_\Omega^{(0)}\left\{-\frac{1}{n_i}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot\mathbf{J}_i^{(1)} + \frac{2}{3pc_v^*}\left(\frac{3}{2} - w_i^2 - \Delta\varepsilon_\Omega\right)\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot\mathbf{q}^{(1)} + \boldsymbol{\tau}^{(1)} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{u} - \right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{j=1}^{S}\left(\mathbf{J}_j\cdot\mathbf{F}_j + E_j^*\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot\mathbf{J}_j\right)\right]\right\} - \frac{2T}{3c_v^*}\frac{\partial \Gamma'_\Omega}{\partial T}(\nabla\mathbf{u})^2 + \Gamma'_\Omega\frac{D_0\nabla\mathbf{u}}{Dt} +$$

$$+\mathbf{Z}_i\left(A'_\Omega\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{S} D_\Omega'^j\mathbf{d}_j\right), \quad \nabla\mathbf{u} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\cdot\mathbf{u} \tag{1.2}$$

Вторая группа состоит из членов нечетной степени относительно вектора $\mathbf{c}_i$

$$-\frac{m_i}{kT\rho} f_\Omega^{(0)} \mathbf{c}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} : \boldsymbol{\tau}^{(1)} - \frac{2}{3}\left(\mathbf{c}_i \cdot \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}\right)\left(\frac{T}{c_v^*}\frac{\partial A'_\Omega}{\partial T} + c_i^2 \frac{\partial A'_\Omega}{\partial c_i^2}\right)\nabla\mathbf{u} +$$

$$+A'_\Omega \mathbf{c}_i \cdot \left[\frac{D_0}{Dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{c}_i\right)\cdot\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}\right] - \frac{2}{3}\mathbf{c}_i \cdot \sum_{j=1}^{S} \mathbf{d}_j \left(\frac{T}{c_v^*}\frac{\partial D_\Omega'^j}{\partial T} + c_i^2 \frac{\partial D_\Omega'^j}{\partial c_i^2}\right)\nabla\mathbf{u} +$$

$$+\sum_{j=1}^{S} D_\Omega'^j \mathbf{c}_i \cdot \left[\frac{D_0 \mathbf{d}_j}{Dt} - \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{u}\right)\cdot \mathbf{d}_j\right] +$$

$$+2\mathbf{Z}_i \cdot \left\{\frac{\partial B'_\Omega}{\partial c_i^2}\mathbf{c}_i(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i : \mathbf{e}) + B'_\Omega \mathbf{e}\cdot\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_i \frac{\partial \Gamma'_\Omega}{\partial c_i^2}\nabla\mathbf{u}\right\} +$$

$$+(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i : \mathbf{e})\mathbf{c}_i \cdot \left\{\left(\frac{\partial B'_\Omega}{\partial T} - 2\frac{\partial A'_\Omega}{\partial c_i^2}\right)\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{S}\left(\frac{\partial B'_\Omega}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial \mathbf{r}} - 2\frac{\partial D_\Omega'^j}{\partial c_i^2}\mathbf{d}_j\right)\right\} +$$

$$+B'_\Omega \mathbf{c}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i : \mathbf{e}) + \mathbf{c}_i \cdot \left(\frac{\partial \Gamma'_\Omega}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{S}\frac{\partial \Gamma'_\Omega}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial \mathbf{r}}\right)\nabla\mathbf{u} + \Gamma'_\Omega \mathbf{c}_i \cdot \frac{\partial \nabla\mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \tag{1.3}$$

И, наконец, третья группа содержит члены четной степени относительно вектора $\mathbf{c}_i$

$$-\frac{2}{3}(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i : \mathbf{e})\left(\frac{T}{c_v^*}\frac{\partial B'_\Omega}{\partial T} + c_i^2\frac{\partial B'_\Omega}{\partial c_i^2}\right)\nabla\mathbf{u} + B'_\Omega \mathbf{c}_i\mathbf{c}_i : \left[\frac{D_0 \mathbf{e}}{Dt} - 2\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{u}\right)\cdot\mathbf{e}\right] +$$

$$+\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i : \left[A'_\Omega \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{S} D_\Omega'^j \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{d}_j + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}}\left(\frac{\partial A'_\Omega}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{S}\frac{\partial A'_\Omega}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial \mathbf{r}}\right) +\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{S}\mathbf{d}_j\left(\frac{\partial D_\Omega'^j}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{k=1}^{S}\frac{\partial D_\Omega'^j}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \mathbf{r}}\right) + 2\mathbf{Z}_i\left(\frac{\partial A'_\Omega}{\partial c_i^2}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{S}\frac{\partial D_\Omega'^j}{\partial c_i^2}\mathbf{d}_j\right) -$$

$$\left.-2\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathbf{u}\right)\frac{\partial \Gamma'_\Omega}{\partial c_i^2}\nabla\mathbf{u}\right] - 2\frac{\partial B'_\Omega}{\partial c_i^2}(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i : \mathbf{e})(\mathbf{c}_i\mathbf{c}_i : \mathbf{e}) \tag{1.4}$$

В выражениях (1.2)–(1.4) использованы обозначения [2] для векторных и тензорных операций, что упрощает сравнение со случаем одноатомного газа и применение интегральных теорем [2, 3], однако вместо $\mathbf{p}^{(1)}$, $\mathbf{c}_0$, $\mathring{\mathbf{e}}$, ∇ оставлены соответствующие символы [1] $\boldsymbol{\tau}^{(1)}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{e}$, $\nabla\mathbf{u}$. В первом (навье-стоксовом) приближении для переносных свойств имеем аналогично традиционному подходу [3]

$$\boldsymbol{\tau}^{(1)} = \Pi^{(1)}\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\pi}^{(1)}, \quad \Pi^{(1)} = -\zeta\nabla\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\pi}^{(1)} = -2\eta\mathbf{e}$$

$$\mathbf{V}_i^{(1)} = -\sum_{j=1}^{S} D_{ij}\mathbf{d}_j - D_{Ti}\frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \quad (\zeta, \eta, \lambda') = \sum_{i=1}^{S}(\zeta_i, \eta_i, \lambda'_i) \tag{1.5}$$

$$\mathbf{h}^{(1)} = -\lambda'\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} - p\sum_i D_{Ti}\mathbf{d}_i, \quad \mathbf{q}^{(1)} = \mathbf{h}^{(1)} + kT\sum_{i=1}^{S}\left(\frac{5}{2} + \langle\varepsilon_\Omega\rangle_c\right)n_i\mathbf{V}_i^{(1)}$$

Здесь $\boldsymbol{\delta}$ – единичный тензор. Соотношения (1.5) определяют использованные ранее [1] коэффициенты переноса уравнений Навье–Стокса. Третий член в выражении для M_Ω содержит оператор столкновений L_Ω.

Знание величины $f_\Omega^{(2)}$ необходимо при рассмотрении супербарнеттова приближения и в теории кинетического (кнудсеновского) слоя. Для определения барнеттовых вкладов в переносные свойства можно обойтись без вычислений $f_\Omega^{(2)}$, достаточно вычислить некоторые моменты от оператора M_Ω, который выражается через максвеллиан $f_\Omega^{(0)}$ и

$$f_\Omega^{(1)} = -\frac{1}{n} f_\Omega^{(0)}\left(A_\Omega c_{i\alpha} \frac{\partial \ln T}{\partial r_\alpha} + B_\Omega c_{i\alpha} c_{i\beta} e_{\alpha\beta} + \sum_{j=1}^{S} D_\Omega^j c_{i\alpha} d_{j\alpha} + \Gamma_\Omega \nabla \mathbf{u} \right) \equiv$$

$$\equiv A'_\Omega c_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial r_\alpha} + B'_\Omega c_{i\alpha} c_{i\beta} e_{\alpha\beta} + \sum_{j=1}^{S} D_\Omega'^j c_{i\alpha} d_{j\alpha} + \Gamma'_\Omega \nabla \mathbf{u} \tag{1.6}$$

В выражении (1.6) и ниже в отличие от (1.2)–(1.4) используется [1] покомпонентная запись векторных и тензорных величин и обычное правило суммирования по повторяющимся индексам. Нижними индексами α, β, γ вводятся компоненты радиус-вектора $\mathbf{r}$, операторы

$$\langle N_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{2}(N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} N_{\gamma\gamma}, \quad e_{\alpha\beta} = \left\langle \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} \right\rangle, \quad \nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u_\gamma}{\partial r_\gamma} \tag{1.7}$$

2. Первое приближение для бинарной смеси одноатомных газов. Дадим информацию, необходимую для перехода от общего случая [1] к рассматриваемому, и требуемые в дальнейшем результаты первого приближения. Последнее продиктовано необходимостью выписать в удобном для использования виде выражения для парциальных коэффициентов переноса (в уравнения Навье–Стокса входят суммарные коэффициенты переноса смеси газов) в принятом ранее [1] приближении по полиномам Сонина, связав эти выражения с данными наиболее цитируемой книги [2]. В случае смеси одноатомных газов в формулах [1] нужно положить Y_Ω, c_v^* равными единице, ε_Ω, $\Delta\varepsilon_\Omega$, c_{vi}, Γ_Ω, Π, ζ_i, λ_{vi} – нулю, заменить индекс Ω на i. При этом

$$\tau_{\alpha\beta} = \pi_{\alpha\beta}, \quad E_i^* = \frac{3}{2}kT, \quad U = \frac{1}{2}m_i c_i^2, \quad \lambda'_{ti} = \lambda'_i$$

В случае бинарной смеси $x_1 + x_2 = 1$, $d_{1\alpha} = -d_{2\alpha}$, поэтому, например,

$$\sum_{j=1}^{2} D_i^j d_{j\alpha} = \mathfrak{D}_i d_{1\alpha}, \quad \sum_{j,k=1}^{2} \frac{\partial D_i^j}{\partial x_k} d_{j\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial r_\beta} = 2\frac{\partial \mathfrak{D}_i}{\partial x_1} d_{1\alpha} \frac{\partial x_1}{\partial r_\beta} \tag{2.1}$$

$$\mathfrak{D}_i = D_i^1 - D_i^2, \quad i = 1,2 \tag{2.2}$$

Тогда вместо (1.6) получим

$$f_i^{(1)} = -\frac{1}{n} f_i^{(0)}\left(A_i c_{i\alpha} \frac{\partial \ln T}{\partial r_\alpha} + B_i c_{i\alpha} c_{i\beta} e_{\alpha\beta} + \mathfrak{D}_i c_{i\alpha} d_{1\alpha} \right) \equiv$$

$$\equiv A'_i c_{i\alpha} \frac{\partial T}{\partial r_\alpha} + B'_i c_{i\alpha} c_{i\beta} e_{\alpha\beta} + \mathfrak{D}'_i c_{i\alpha} d_{1\alpha} \tag{2.3}$$

Метод Чепмена–Энскога дает ряды для напряжений, диффузионных скоростей и теплового потока

$$\pi_{\alpha\beta} = \pi_{\alpha\beta}^{(1)} + \pi_{\alpha\beta}^{(2)} + \ldots, \quad V_{1\alpha} = V_{1\alpha}^{(1)} + V_{1\alpha}^{(2)} + \ldots, \quad V_{2\alpha} = -\frac{\rho_1}{\rho_2} V_{1\alpha}$$

$$q_\alpha = q_\alpha^{(1)} + q_\alpha^{(2)} + \ldots, \quad q_\alpha = h_\alpha + \frac{5}{2} p_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2} \right) V_{1\alpha} \tag{2.4}$$

Первые члены соответствуют приближению Навье–Стокса, вторые – Барнетта. Используются обозначения: m_i, n_i – масса молекулы и числовая плотность i-го компонента смеси, k – постоянная Больцмана, T – температура, $\mathbf{u}$ – среднемассовая скорость. Кроме того,

$$\rho_i = m_i n_i, \quad x_i = \frac{n_i}{n}, \quad p_i = n_i kT \quad (n, \rho, p) = \sum_{i=1}^{2} (n_i, \rho_i, p_i) \tag{2.5}$$

Далее имеем [3]

$$\pi_{\alpha\beta}^{(1)} = -2\eta e_{\alpha\beta} \quad (\eta, \lambda') = \sum_{i=1}^{2} (\eta_i, \lambda_i') \tag{2.6}$$

$$V_{1\alpha}^{(1)} = -\frac{m_2 n}{x_1 \rho} \mathcal{D}_{12} \left(d_{1\alpha} + k_T \frac{\partial \ln T}{\partial r_\alpha} \right), \quad k_T = \frac{\mathcal{D}_T}{\mathcal{D}_{12}} \tag{2.7}$$

$$h_\alpha^{(1)} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r_\alpha} + p \frac{\rho}{\rho_2} k_T V_{1\alpha}^{(1)}, \quad \lambda = \lambda' - \frac{nk}{x_1 x_2} \mathcal{D}_{12} k_T^2 \tag{2.8}$$

По определению [1] парциальные коэффициенты вязкости и теплопроводности даются формулами

$$\eta_i = \frac{1}{2} kT x_i b_{i,0}, \quad \lambda_i' = \frac{5}{4} k x_i a_{i,1}$$

где $b_{i,0}$, $a_{i,1}$ – коэффициенты разложений по полиномам Сонина [3]. Однако ранее было принято [3], что η_i – коэффициент вязкости газа сорта i. Для ликвидации недоразумений обозначим первые приближения по полиномам Сонина коэффициентов вязкости и теплопроводности одноатомного газа сорта i через

$$[\overset{\circ}{\eta}_i]_1 \equiv \eta_i = \frac{5}{16} \frac{(\pi m_i kT)^{1/2}}{\pi \sigma_i^2 \Omega_i^{(2,2)*}}, \quad [\overset{\circ}{\lambda}_i]_1 \equiv \overset{\circ}{\lambda}_i = \frac{15k}{4m_i} \overset{\circ}{\eta}_i \tag{2.9}$$

Здесь и ниже $\Omega_i^{(l,r)*}$, $\Omega_{ij}^{(l,r)*}$ – приведенные Ω-интегралы для газа сорта i и смеси газов соответственно, σ_i – диаметр молекулы, скобка $[\ ]_n$ указывает номер (n) приближения по полиномам Сонина [3]. Для экономии места эти скобки будут по возможности опускаться.

При переходе от соотношений (1.5) к (2.7), (2.8) учтены следующие формулы, выражающие коэффициенты диффузии D_{ij} и термодиффузии D_{Ti} многокомпонентной смеси через коэффициенты диффузии $\mathcal{D}_{12}$ и термодиффузии $\mathcal{D}_T$ бинарной смеси:

$$D_{12} = D_{21} = -\left(\frac{n}{\rho}\right)^2 m_1 m_2 \mathcal{D}_{12}, \quad D_{ii} = \frac{\rho_j}{\rho_i} \left(\frac{n}{\rho}\right)^2 m_1 m_2 \mathcal{D}_{12}$$

$$k n_i D_{Ti} = \omega_i \mathcal{D}_T, \quad \omega_i = (-1)^{i+1} \frac{n^2 k}{\rho m_i} m_1 m_2 \tag{2.10}$$

В формулах (2.10) и далее в (2.11)–(2.14) индексы i, j принимают значения 1, 2, причем $j \neq i$.

Перейдем к приближенным выражениям для коэффициентов переноса. Для B_i ограничиваемся [1] первым приближением по полиномам Сонина

$$B_i \approx \frac{m_i \eta_i}{x_i (kT)^2}, \quad \eta_i \equiv [\eta_i]_1 \tag{2.11}$$

где при учете выражений (2.9)

$$\eta_i = \overset{\circ}{\eta}_i x_i \Delta_\eta^{-1}(l_{jj} - l_{ij}), \quad \Delta_\eta = l_{22}l_{11} - l_{12}l_{21} \tag{2.12}$$

Для величин l с помощью формул (7.3. 80) [3] имеем

$$l_{ii} = x_i + 2x_j \eta_{ij}^* M_1 M_2 \left(\frac{5}{3A^*} + \frac{M_j}{M_i} \right) \tag{2.13}$$

$$l_{ij} = -2x_j \eta_{ji}^* M_1 M_2 \left(\frac{5}{3A^*} - 1 \right); \quad M_i = \frac{m_i}{m_1 + m_2}$$

Через A^*, B^*, C^* обозначаем отношения приведенных Ω-интегралов [3] A_{12}^*, B_{12}^*, C_{12}^* соответственно, равные единице в случае молекул – упругих сфер. Для максвелловских молекул $A^* \approx 1.29, B^* \approx 1.25, \sigma = 0$. Величины

$$\eta_{ij}^* = \frac{\overset{\circ}{\eta}_i}{[\eta_{ij}]_1}, \quad \lambda_{ij}^* = \frac{\overset{\circ}{\lambda}_i}{[\lambda_{ij}]_1} \tag{2.14}$$

$$[\eta_{ij}]_1 = \frac{5nm_i M_j}{3A^*}[\mathcal{D}_{ij}]_1, \quad [\lambda_{ij}]_1 = \frac{15k}{8m_i M_j}[\eta_{ij}]_1 \tag{2.15}$$

где $[\mathcal{D}_{ij}]_1$ – коэффициент диффузии бинарной смеси в первом приближении по полиномам Сонина (формулы (7.3.38) [2]). Приведенные интегралы, величины A_{12}^*, B_{12}^*, C_{12}^*, $\lfloor \eta_{ij} \rfloor_1$, $\lfloor \lambda_{ij} \rfloor_1$, $\mathcal{D}_{ij}$ не зависят от перестановки индексов.

Приближенные значения барнеттовых коэффициентов переноса ранее [1] получены во втором приближении по полиномам Сонина для A_Ω, D_Ω^j. В этом приближении с учетом соотношений (2.3), (2.10), опуская в дальнейшем скобку $[\ ]_2$, имеем

$$A_i \approx \frac{2m_i}{5k^2 T x_i}\left[\frac{5}{2}\omega_i \mathcal{D}_T - \lambda_i' S_{3/2}^{(1)}(w_i^2) \right] \tag{2.16}$$

$$\mathcal{D}_i \approx \frac{m_i}{kT}\left[n(D_{i1} - D_{i2}) + \delta\gamma_i S_{3/2}^{(1)}(w_i^2) \right]$$

$$D_{i1} - D_{i2} \approx \frac{\omega_i}{kn_i}\mathcal{D}_{12}, \quad \delta\gamma_i = \gamma_i^1 - \gamma_i^2 \tag{2.17}$$

Для входящих в (2.16), (2.17) коэффициентов при помощи известных результатов [3] получаем

$$\mathcal{D}_{12} = \frac{[\mathcal{D}_{12}]_1}{1 - \Delta}, \quad \Delta = \frac{\sigma^2 P_3}{10 Q_3}, \quad \sigma = 6C^* - 5 \tag{2.18}$$

$$\mathcal{D}_T = k_T \mathcal{D}_{12}, \quad k_T = x_1 x_2 \sigma k_T^*, \quad k_T^* = \frac{1}{Q_3}(S_1 x_1 - S_2 x_2) \tag{2.19}$$

$$\lambda = [\lambda_{12}]_1 \frac{P_3}{Q_3}, \quad \lambda' = \lambda + \frac{nk}{x_1 x_2} k_T^2 \mathcal{D}_{12} \tag{2.20}$$

В соотношениях (2.18)–(2.20), (2.22) функции P_3, Q_3, R_3 являются трехчленами вида $R_3 = R_1 x_1^2 + R_2 x_2^2 + R_{12} x_1 x_2$. Коэффициенты

$$R_1 = Q_1 \lambda_1^*, \quad R_2 = Q_2 \lambda_2^*, \quad R_{12} = \frac{4A^*}{5M_1 M_2}\left(\frac{1}{\lambda_1^*} + \frac{1}{\lambda_2^*} \right) + 11 - \frac{12}{5}B^* - \frac{16}{5}A^* \tag{2.21}$$

Коэффициенты S_1, S_2, P_1, P_2, P_{12}, Q_1, Q_2, Q_{12} даются формулами (7.3.70), (7.3.43), (7.3.44) из [2] соответственно.

Для λ'_i и $\delta\gamma_i$ удобно применять формулы (см., например, [6]), выраженные через величины (2.9), (2.14), (2.15), (2.18)–(2.21),

$$\lambda'_i = \frac{\rho_i}{\rho}\lambda' + (-1)^i 5\frac{n^2}{\rho}(m_1+m_2)kx_1x_2k_T^*\mathcal{D}_{12} \tag{2.22}$$

$$\delta\gamma_i = -\frac{n^2}{5\rho}m_i\sigma\mathcal{D}_{12}\left[2k_T^* + (-1)^i\frac{P_3M_i}{x_iM_1M_2Q_3}\right]$$

(исправлены допущенные ранее описки [6]).

В первом приближении (точном для максвелловских молекул) имеем $k_T = 0$, $\delta\gamma_i = 0$. В линейном по k_T случае $\lambda' = \lambda$.

Ниже внешние силы не учитываются. Тогда

$$d_{1\alpha} = \frac{\partial x_1}{\partial r_\alpha} + x_1x_2(m_2-m_1)\frac{n}{\rho}\frac{\partial \ln p}{\partial r_\alpha} \tag{2.23}$$

$$\frac{D_0 d_{1\alpha}}{Dt} = -\frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha}d_{1\beta} - \frac{5}{3}x_1x_2(m_2-m_1)\frac{n}{\rho}\frac{\partial \nabla\mathbf{u}}{\partial r_\alpha}$$

3. Вклады приближения Барнетта в переносные свойства бинарной смеси одноатомных газов. Формулы, приведенные ранее ([1], разд. 4), получены из общих формул в пренебрежении термо- и бародиффузией ($\sigma = 0$, $\mathbf{d}_1 = \nabla x_1$). Приведем как точные, так и более полные приближенные выражения. Исключим ∇x_2 и $\mathbf{d}_2$ и учтем соотношения (2.1)–(2.5), (2.10), (2.16), (2.17), (2.22), (2.23).

Для вклада в напряжения найдем

$$\begin{aligned}\pi^{(2)}_{\alpha\beta} &= \xi_1 e_{\alpha\beta}\nabla\mathbf{u} - \xi_2\left\langle \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r_\beta}\right) + 2\frac{\partial u_\gamma}{\partial r_\alpha}e_{\gamma\beta} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial r_\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\gamma}\right\rangle + \xi_3\left\langle e_{\alpha\gamma}e_{\gamma\beta}\right\rangle + \\ &+\xi_4\left\langle\frac{\partial^2 T}{\partial r_\alpha \partial r_\beta}\right\rangle + \xi_5\left\langle\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\frac{\partial T}{\partial r_\beta}\right\rangle + \xi_6\left\langle\frac{\partial p}{\partial r_\alpha}\frac{\partial T}{\partial r_\beta}\right\rangle + \xi_7\left\langle\frac{\partial d_{1\beta}}{\partial r_\alpha}\right\rangle + \\ &+\left\langle\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\left(\xi_8\frac{\partial x_1}{\partial r_\beta} + \xi_9 d_{1\beta}\right)\right\rangle + \left\langle d_{1\alpha}\left(\xi_{10}\frac{\partial p}{\partial r_\beta} + \xi_{11}\frac{\partial x_1}{\partial r_\beta} + \delta\xi^*_{12}d_{1\beta}\right)\right\rangle\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь и ниже учтены лишь те из коэффициентов со звездочкой [1], являющихся моментами от $L_i(f^{(1)}f^{(1)})$, которые отличны от нуля в случае максвелловских молекул. Приближенное выражение для $\delta\xi^*_{12}$ дается формулой (4.4) в [1]. Остальные коэффициенты обусловлены конвективной частью уравнения (1.1)

$$\xi_1 = -\frac{2}{3}\left\{T\frac{\partial B'_i}{\partial T} + c_i^2\frac{\partial B'_i}{\partial c_i^2}\right\}_\eta \approx \sum \frac{4}{3}\frac{\eta_i^2}{p_i}\left(\frac{7}{2} - \partial_T\eta_i\right)$$

$$\xi_2 = \{B'_i\}_\eta \approx \sum\frac{2\eta_i^2}{p_i},\quad \xi_3 = -\frac{8}{7}\left\{c_i^2\frac{\partial B'_i}{\partial c_i^2}\right\}_\eta \approx 4\xi_2$$

$$\xi_4 = \{A_i'\}_\eta \approx \sum \frac{4}{5}\frac{\eta_i}{p_i}\psi_i, \quad \psi_i = \lambda_i' + \frac{5}{2}\omega_i \mathcal{D}_T \tag{3.2}$$

$$\xi_5 = \left\{\frac{\partial A_i'}{\partial T}\right\}_\eta \approx \sum \frac{4}{5}\frac{\eta_i}{p_i}\frac{\partial \psi_i}{\partial T}, \quad \xi_6 = \frac{2}{\rho}\left\{\frac{\partial A_i'}{\partial c_i^2}\right\}_\eta \approx -\sum \frac{2\rho_i\eta_i}{\rho p_i^2}\omega_i\mathcal{D}_T$$

$$\xi_7 = \{\mathcal{D}_i'\}_\eta \approx \sum 2\eta_i\chi_i, \quad \chi_i = \frac{\omega_i}{kn_i}\mathcal{D}_{12} - \frac{\delta\gamma_i}{n}$$

$$\xi_8 = \left\{\frac{\partial A_i'}{\partial x_1}\right\}_\eta \approx \sum \frac{8\eta_i}{p_i}\frac{\partial \psi_i}{\partial x_1}, \quad \xi_9 = \left\{\frac{\partial \mathcal{D}_i'}{\partial T}\right\}_\eta \approx \sum \frac{2\eta_i}{T}\frac{\partial (T\chi_i)}{\partial T}$$

$$\xi_{10} = \frac{2}{\rho}\left\{\frac{\partial \mathcal{D}_i'}{\partial c_i^2}\right\}_\eta \approx -\sum \frac{2m_i\eta_i}{\rho k p_i}\omega_i\mathcal{D}_{12}, \quad \xi_{11} = 2\left\{\frac{\partial \mathcal{D}_i'}{\partial x_1}\right\}_\eta \approx \sum \frac{4\eta_i}{n_i}\frac{\partial (n_i\chi_i)}{\partial x_1}$$

В соотношениях (3.2) и ниже первые выражения для коэффициентов ξ, γ, δ являются точными, вторые – приближенными; последние получаются в рамках приближения (2.11), (2.16). Суммирование ведется от $i = 1$ до $i = 2$, введено обозначение $\partial_T N \equiv \partial \ln N / \partial \ln T$.

В определенных ранее [1] операторах $\{\ \}_\eta$, $\{\ \}_\gamma$ нужно заменить Ω на i.

Выражения для вкладов в векторные переносные свойства можно объединить следующим образом. Обозначим эти вклады через

$$\Lambda_\alpha^{(2)} = \varphi_1\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\nabla\mathbf{u} + \varphi_2\left[\frac{1}{3}\frac{\partial (T\nabla\mathbf{u})}{\partial r_\alpha} + \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha}\frac{\partial T}{\partial r_\beta}\right] + \left(\varphi_3\frac{\partial p}{\partial r_\beta} + \varphi_4\frac{\partial T}{\partial r_\beta}\right)e_{\beta\alpha} + \varphi_5\frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} +$$

$$+\varphi_6 d_{1\alpha}\nabla\mathbf{u} - \varphi_7\left[2\frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha}d_{1\beta} + \frac{5}{3}x_1x_2(m_2 - m_1)\frac{n}{\rho}\frac{\partial \nabla\mathbf{u}}{\partial r_\alpha}\right] + \left[\varphi_8\frac{\partial x_1}{\partial r_\beta} + (\varphi_9 + \delta\varphi_9^*)d_{1\beta}\right]e_{\alpha\beta} \tag{3.3}$$

Коэффициенты φ_m $(m = 1, 2, \ldots, 9)$ даются выражениями

$$\varphi_1 = -\frac{2}{3}\left\{T\frac{\partial A_i'}{\partial T} + c_i^2\frac{\partial A_i'}{c_i^2}\right\}_\varphi \approx \sum\frac{14m_i}{15kp_i}\left[b_i^{(1)}\lambda_i'\left(1 - \frac{2}{7}\partial_T\lambda_i'\right) - b_i^{(0)}\omega_i\mathcal{D}_T(1 - \partial_T\mathcal{D}_T)\right]$$

$$\varphi_2 = -2\{A_i'\}_\varphi \approx -\sum\frac{4m_i}{5kp_i}(b_i^{(1)}\lambda_i' - b_i^{(0)}\omega_i\mathcal{D}_T) \tag{3.4}$$

$$\varphi_3 = \frac{2}{\rho}\left\{B_i' + \frac{2}{5}c_i^2\frac{\partial B_i'}{\partial c_i^2}\right\}_\varphi \approx -\sum\frac{4m_i\eta_i}{5\rho k p_i}b_i^{(1)}$$

$$\varphi_4 = \frac{2}{5}\left\{c_i^2\left(\frac{\partial B_i'}{\partial T} + \frac{\partial A_i'}{\partial c_i^2}\right)\right\}_\varphi \approx$$

$$\approx \sum\frac{4\eta_i}{5p_i}\left\{b_i^{(1)}\partial_T(T^{7/2}\eta_i) - b_i^{(0)}\partial_T\eta_i + \frac{m_i}{k\eta_i}\left[\frac{7}{5}b_i^{(1)}\lambda_i' - (b_i^{(0)} - b_i^{(1)})\omega_i\mathcal{D}_T\right]\right\}$$

$$\varphi_5 = \frac{2}{5}\{c_i^2 B_i'\}_\varphi \approx \sum\frac{4\eta_i}{5kn_i}(b_i^{(1)} - b_i^{(0)})$$

$$\varphi_6 = -\frac{2}{3}\left\{T\frac{\partial \mathcal{D}_i'}{\partial T} + c_i^2\frac{\partial \mathcal{D}_i'}{\partial c_i^2}\right\}_\varphi \approx$$

$$\approx \sum \frac{2m_i}{3k}\left\{b_i^{(0)}\frac{\omega_i}{kn_i}\mathcal{D}_{12}\left(-1+\frac{2}{5}\partial_T\mathcal{D}_{12}\right) + b_i^{(1)}\frac{\delta\gamma_i}{n}\left(-\frac{5}{2}+\partial_T\delta\gamma_i\right)\right\}$$

$$\varphi_7 = \{\mathcal{D}_i'\}_\varphi \approx -\sum\frac{m_i}{k}\left(\frac{2}{5}b_i^{(0)}\frac{\omega_i}{kn_i}\mathcal{D}_{12} + b_i^{(1)}\frac{1}{n}\delta\gamma_i\right)$$

$$\varphi_8 = \frac{4}{5}\left\{c_i^2\frac{\partial B_i'}{\partial x_1}\right\}_\varphi \approx \sum\frac{8}{5kn_i}\frac{\partial\eta_i}{\partial x_1}(b_i^{(1)} - b_i^{(0)})$$

$$\varphi_9 = -\frac{4}{5}\left\{c_i^2\frac{\partial \mathcal{D}_i'}{\partial c_i^2}\right\}_\varphi \approx \sum\frac{4m_i}{5k}\left(\frac{\omega_i}{kn_i}\mathcal{D}_{12}(b_i^{(1)} - b_i^{(0)}) - \frac{7}{2n}b_i^{(1)}\delta\gamma_i\right)$$

Множитель ω_i определен последним выражением (2.10).

Чтобы получить соотношения для вклада в компоненту приведенного теплового потока $h_\alpha^{(2)}$, нужно произвести замену

$$\Lambda_\alpha^{(2)} \to h_\alpha^{(2)},\quad \{\ \}_\varphi \to \{\ \}_\gamma,\quad \varphi_m \to \gamma_m,\quad \delta\varphi_9^* \to \delta\gamma_9^* \tag{3.5}$$

(величина $\delta\gamma_9^*$ дана формулой (4.4) работы [1]) и положить

$$b_i^{(0)} = -\frac{5}{2}\omega_i\mathcal{D}_T,\quad b_i^{(1)} = \lambda_i' \tag{3.6}$$

Для определения вклада в компоненту диффузионной скорости $V_{1\alpha}^{(2)}$ аналогично (3.5) необходимо заменить

$$\Lambda_\alpha^{(2)} \to V_{1\alpha}^{(2)},\quad \{\ \}_\varphi \to \{\ \}_\delta,\quad \varphi_m \to \delta_m,\quad \delta\varphi_9^* \to 0 \tag{3.7}$$

При вычислении коэффициентов переноса в выражении для $V_{1\alpha}^{(2)}$ удобнее с помощью формулы (1.24) из [1] получить соответствующую формулу для разности диффузионных скоростей, а затем воспользоваться их связью. В результате получаем

$$V_{1\alpha}^{(2)} = \frac{\rho_2}{\rho}(V_{1\alpha}^{(2)} - V_{2\alpha}^{(2)}) = -\frac{\rho_2}{\rho n^2}\sum\int \mathcal{D}_i c_{i\alpha}M_i d\mathbf{c}_i \tag{3.8}$$

Поэтому оператор имеет вид

$$\{N\}_\delta = -\frac{2kT}{3n^2}\sum\int\frac{N\rho_2}{m_i\rho}\mathcal{D}_i w_i^2 d\mathbf{c}_i \tag{3.9}$$

вместо (2.16) из [1] (где допущена описка: под интеграл включен лишний множитель N).

Наконец, вместо (3.6) при вычислении $V_{1\alpha}^{(2)}$ с учетом (3.8), (3.9) нужно положить

$$b_i^{(0)} = -\frac{5\rho_2\omega_i}{2\rho p}\mathcal{D}_{12},\quad b_i^{(1)} = -\frac{5\rho_2 x_i}{2nT\rho}\delta\gamma_i \tag{3.10}$$

Таким образом, приближенные значения барнеттовых коэффициентов в компонентах диффузионной скорости $V_{1\alpha}^{(2)}$ вычисляются при помощи формул (3.4), (3.7) и (3.10).

Подчеркнем, что несмотря на различия здесь сохранены обозначения [1] для коэффициентов переноса ξ_m, γ_m и δ_m. В выражении (4.5) работы [1] для α_3 должно быть $\rho_2/\rho_1 + 1$ вместо $\rho_2/\rho_1 - 1$.

Формулы [1] для бинарной смеси следуют из (3.1)–(3.10), если в них положить $\mathcal{D}_T = 0$, $\delta\gamma_i = 0$, $\mathbf{d}_i = \nabla x_i$.

4. Вклады приближения Барнетта в переносные свойства многоатомного газа. Вклады в скалярную часть тензора напряжений, в бездивергентные напряжения и тепловой поток приобретают здесь вид

$$\Pi^{(2)} = (\omega_1 + \omega_1^*) e_{\alpha\beta} e_{\beta\alpha} + \omega_2 \nabla^2 T + (\omega_3 + \omega_3^*)(\nabla T)^2 + (\omega_4 + \omega_4^*)(\nabla \mathbf{u})^2 -$$

$$-\omega_5 \left[\frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_\alpha} \right) + \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} \right] + \omega_6 \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_\alpha} \frac{\partial T}{\partial r_\alpha} \tag{4.1}$$

$$\pi_{\alpha\beta}^{(2)} = (\xi_1 + \xi_1^*) e_{\alpha\beta} \nabla \mathbf{u} - \xi_2 \left\langle \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_\beta} \right) + 2 \frac{\partial u_\gamma}{\partial r_\alpha} e_{\gamma\beta} + \frac{\partial u_\gamma}{\partial r_\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\gamma} \right\rangle + (\xi_3 + \xi_3^*) e_{\alpha\gamma} e_{\gamma\beta} +$$

$$+\xi_4 \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \right\rangle + (\xi_5 + \xi_5^*) \left\langle \frac{\partial T}{\partial r_\alpha} \frac{\partial T}{\partial r_\beta} \right\rangle + \frac{\xi_6}{\rho} \left\langle \frac{\partial p}{\partial r_\alpha} \frac{\partial T}{\partial r_\beta} \right\rangle \tag{4.2}$$

$$q_\alpha^{(2)} = (\gamma_1 + \gamma_1^*) \frac{\partial T}{\partial r_\alpha} \nabla \mathbf{u} + 2\gamma_2 \left[\frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left(\frac{T}{3c_v^*} \nabla \mathbf{u} \right) + \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha} \frac{\partial T}{\partial r_\beta} \right] + \frac{\gamma_3}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_\beta} e_{\beta\alpha} +$$

$$+(\gamma_4 + \gamma_4^*) \frac{\partial T}{\partial r_\beta} e_{\beta\alpha} + \gamma_5 \frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta} + \gamma_{10} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r_\alpha} \nabla \mathbf{u} + \gamma_{12} \frac{\partial \nabla \mathbf{u}}{\partial r_\alpha} \tag{4.3}$$

Входящие в выражения (4.1)–(4.3) коэффициенты со звездочкой в верхнем индексе в случае одноатомного газа малы и ими пренебрегают [2]; как утверждается [7], они пренебрежимо малы и для классических моделей молекул с вращательными степенями свободы (шероховатые и нагруженные сферы). В общем случае этот вывод нуждается, конечно, в проверке.

Общие приближенные выражения [1] для коэффициентов без звездочек в верхнем индексе приводятся к виду

$$\omega_1 = \frac{2}{p} \eta \zeta, \quad \omega_2 = \frac{\zeta}{p} (\lambda_t - \sigma \lambda_v)$$

$$\omega_3 = \frac{\zeta}{p} \left[\frac{\partial \lambda_t}{\partial T} - \sigma c_v T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\lambda_v}{c_v} T^{-2} \right) - \lambda_v \frac{\sigma k}{c_v T} \langle (\Delta \varepsilon_\omega)^3 \rangle_c \right]$$

$$\omega_4 = \frac{\zeta^2}{p} \left\{ \frac{5}{2} + \sigma^2 \frac{c_v}{k} - \frac{2}{3c_v^*} \left[\frac{3}{2} \partial_T \zeta + \sigma^2 \frac{c_v}{k} (\partial_T (\zeta \sigma) - 2) + \sigma^2 \langle (\Delta \varepsilon_\omega)^3 \rangle_c \right] \right\}$$

$$\omega_5 = \frac{\zeta^2}{p} \left(\frac{3}{2} + \sigma^2 \frac{c_v}{k} \right), \quad \omega_6 = 0, \quad \xi_1 = \frac{4}{3} \frac{\eta^2}{p} \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{c_v^*} \partial_T \eta + \frac{3}{2} \frac{\zeta}{\eta} \right)$$

$$\xi_2 = \frac{2\eta^2}{p}, \quad \xi_3 = 4\xi_2, \quad \xi_4 = \frac{4}{5} \frac{\eta}{p} \lambda_t, \quad \xi_5 = \frac{4}{5} \frac{\eta}{p} \frac{\partial \lambda_t}{\partial T}, \quad \xi_6 = 0 \tag{4.4}$$

$$\gamma_1 = \frac{4m}{15pkc_v^*}\left\{-\lambda_t^2\partial_T\lambda_t - \frac{5}{2}\lambda_v\left[T^3\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{k\lambda_v}{T^2c_v}\right)+\lambda_v\frac{k^2}{c_v^2}\langle(\Delta\varepsilon_\omega)^3\rangle_c\right]\right\}+$$

$$+\frac{\zeta}{p}\left\{\lambda_t\partial_T(\zeta T^2)+\lambda_v[1-\sigma\partial_T(\zeta\sigma T^{-1})]-\lambda_v\sigma\frac{k}{c_v}\langle(\Delta\varepsilon_\omega)^3\rangle_c\right\}+\frac{2m}{3kp}\left(\frac{7}{5}\lambda_t^2+\frac{5}{2}\frac{k}{c_v}\lambda_v^2\right)$$

$$\gamma_2 = -\frac{2m}{5kp}\left(\lambda_t^2+\frac{5}{2}\frac{k}{c_v}\lambda_v^2\right), \quad \gamma_3 = -\frac{4m\eta}{5kp}\lambda_t$$

$$\gamma_4 = \frac{4\eta}{5p}\left\{\lambda_t\partial_T(T^{7/2}\eta)+\frac{5}{2}\lambda_v+\frac{m}{k\eta}\left(\frac{7}{5}\lambda_t^2+\frac{5}{2}\frac{k}{c_v}\lambda_v^2\right)\right\}$$

$$\gamma_5 = \frac{4\eta\lambda_t}{5kn}, \quad \gamma_{10} = -\frac{m}{kT}\gamma_{12}, \quad \gamma_{12} = \frac{\zeta}{nk}(\lambda_t - \sigma\lambda_v)$$

$$\sigma = \frac{3k}{2c_v}, \quad \zeta = \frac{1}{4}\pi k c_v \eta Z\left(\frac{3}{2}k + c_v\right)^{-2}$$

Здесь c_v – теплоемкость из-за внутренних степеней свободы молекул при постоянном объеме, операция $\langle\ldots\rangle_c$ определена ранее [1], выражения для σ, ζ даны в соответствии с известными результатами [5, 8], Z – характерное отношение времен релаксации внутренних и поступательных степеней свободы молекул. Динамический коэффициент вязкости η во многих случаях несущественно отличается от случая одноатомного газа, поэтому коэффициенты поступательной λ_t, внутренней λ_v и суммарной λ теплопроводности удобно записать так:

$$(\lambda_t, \lambda_v, \lambda) = \frac{15}{4}R\eta(\Lambda_t, \Lambda_v, \Lambda_\Sigma), \quad \Lambda_\Sigma = \Lambda_t + \Lambda_v, \quad R = \frac{k}{m} \tag{4.5}$$

Для одноатомного газа $\Lambda_t = \Lambda_\Sigma = 1$, $\Lambda_v = 0$.

В широко используемом приближении Мэзона–Мончика [3, 5, 8] коэффициент η такой же, как и для соответствующего одноатомного газа, для коэффициентов теплопроводности имеем [5]

$$\Lambda_t = 1 - \frac{A}{\sigma}, \quad \Lambda_v = \frac{2\beta}{5\sigma}(1+A)$$

$$A = \frac{5-2\beta}{\pi Z}\left[1+\frac{2}{\pi Z}\left(\frac{5}{2\sigma}+\beta\right)\right]^{-1}, \quad \beta = \frac{\rho\mathcal{D}}{\eta}\varphi(Z) = 1.328\varphi(Z) \tag{4.6}$$

Здесь $\mathcal{D}$ – коэффициент самодиффузии одноатомного газа.

Остановимся на случае таких двухатомных газов, как азот или кислород, при тех значениях T, когда возбуждены только вращательные степени свободы молекул. Суммирование по вращательным квантовым числам $\omega \equiv J$ в формулах для средних значений $\langle\ldots\rangle_c$ здесь можно заменить на интегрирование по J (квазиклассическое приближение, $J \gg 1$). Следуя, например, известному подходу [8], получим

$$c_v = k, \quad \sigma = \frac{3}{2}, \quad \langle(\Delta\varepsilon_\omega)^3\rangle_c = 2$$

Характерное отношение времен вращательной и поступательной релаксации дается приближенной формулой Паркера [8]

$$Z = Z^\infty\left[1+\frac{\pi^{3/2}}{2}\theta^{1/2}+\left(\frac{\pi^2}{4}+2\right)\theta\right]^{-1}, \quad \theta = \frac{T_*}{T} \tag{4.7}$$

где $T_* = 91.5K$ для азота и $T_* = 88K$ для кислорода. Для азота диапазону экспериментальных данных соответствуют значения $Z^\infty \approx 18\cdots 22$. Входящее в последнюю формулу (4.6) отношение $\varphi(Z)$ коэффициентов самодиффузии двухатомного и одноатомного газов при небольших Z значительно отличается от единицы. Это отличие оценивается при помощи формулы Сандлера [8]

$$\varphi(Z) = 1 + 0.27Z^{-1} - 0.44Z^{-2} - 0.90Z^{-3} \tag{4.8}$$

5. Уравнения термострессовой конвекции многоатомного газа. Следуя изложенному ранее ([1], разд. 5), запишем переменную часть полного тензора напряжений, которая будет фигурировать только в уравнении импульса и в выражении для поверхностной силы, в виде

$$p_0\delta p\,\delta_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} \equiv X\delta_{\alpha\beta} + R\pi_{\alpha\beta} \tag{5.1}$$

$$X = p_0\delta p - \zeta\nabla\mathbf{u} + \omega_2\nabla^2 T + (\omega_3 + \omega_3^*)(\nabla T)^2 + \frac{2}{3}\eta\nabla\mathbf{u} - \frac{1}{3}\xi_4\nabla^2 T - \frac{1}{3}(\xi_5 + \xi_5^*)(\nabla T)^2$$

$$R\pi_{\alpha\beta} = -\eta\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha}\right) + \xi_4\frac{\partial^2 T}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} + (\xi_5 + \xi_5^*)\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\frac{\partial T}{\partial r_\beta}$$

Напомним, что в рассматриваемом случае

$$u \sim V_0,\quad V_0 = \frac{\eta_0}{\rho_0 L},\qquad p = p_0(1+\delta p),\qquad p_0 = \text{const},\qquad \delta p = O(\text{Kn}^2),\quad \text{Kn} = \frac{V_0}{\sqrt{RT_0}}$$

градиенты T порядка единицы, нижним нулевым индексом отмечены характерные значения, δp – относительная переменная часть давления, L – характерный размер, число Кнудсена $\text{Kn} \ll 1$[1]. Не учтенные в соотношениях (5.1) члены разложения Чемпмена–Энскога порядка Kn^2 по сравнению с выписанными.

Специфика задачи такова, что X – новая газодинамическая переменная, структуру которой знать не нужно. В выражениях для ω, ξ положено $p = p_0$, так что они зависят от T и не зависят от p. Поэтому

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial r_\beta}\left(\xi_4\frac{\partial^2 T}{\partial r_\alpha \partial r_\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left[\xi_4\nabla^2 T + \frac{1}{2}\frac{d\xi_4}{dT}(\nabla T)^2\right] - \frac{1}{2}\frac{d^2\xi_4}{dT^2}(\nabla T)^2\frac{\partial T}{\partial r_\alpha} - \frac{d\xi_4}{dT}\nabla^2 T\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\\ \frac{\partial}{\partial r_\beta}\left(\xi\frac{\partial T}{\partial r_\alpha}\frac{\partial T}{\partial r_\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left[\frac{\xi}{2}(\nabla T)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{d\xi}{dT}(\nabla T)^2\frac{\partial T}{\partial r_\alpha} + \xi\nabla^2 T\frac{\partial T}{\partial r_\alpha},\quad \xi = \xi_5 + \xi_5^*\end{gathered} \tag{5.2}$$

Для окончательной формулировки искомых уравнений отнесем величины $u, T, \rho, \eta, X, r, t$ к $V_0, T_0, \rho_0, \eta_0, \rho_0 V_0^2, L, L/V_0$ соответственно, сохраняя за безразмерными величинами прежние обозначения. Пренебрежем слагаемыми $O(\text{Kn}^2)$ по сравнению с единицей и учтем выражения (4.5). Уравнения состояния, неразрывности и энергии примут вид

$$\rho T = 1,\quad \frac{D\ln T}{Dt} = \nabla\mathbf{u} \tag{5.3}$$

$$E\nabla\mathbf{u} = \nabla(\eta\Lambda_\Sigma\nabla T) \equiv \frac{d\eta\Lambda_\Sigma}{dT}(\nabla T)^2 + \eta\Lambda_\Sigma\nabla^2 T,\quad E = \frac{4}{15}\left(\frac{5}{2} + \frac{c_v}{k}\right) \tag{5.4}$$

---

[1] Структура нестационарных уравнений термострессовой конвекции многоатомного газа была рассмотрена в докладе: *Галкин В.С., Коган М.Н., Фридлендер О.Г.* Термо- и диффузионно-стрессовые явления // Тр. IV Всесоюзной конференции по динамике разр. газа и молек. газовой динамике. М., Изд. Отдел ЦАГИ. 1977. С. 321–322; однако было сделано нефизичное предположение, что p_0 – заданная функция t, усложняющее уравнения.

Производная по t в уравнении энергии (5.4) исключена с помощью второго уравнения (5.3).

В безразмерных переменных температурные напряжения запишем в виде

$$\alpha_1 \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} \right\rangle + \alpha_2 \left\langle \frac{\partial T}{\partial r_\alpha} \frac{\partial T}{\partial r_\beta} \right\rangle \tag{5.5}$$

Учитывая соотношения (5.1)–(5.5) (дивергентные слагаемые в (5.2) $\partial/\partial r_\alpha[\ldots]$ объединяются с X, а $\nabla^2 T$ исключается с помощью соотношений (5.4)), преобразуем уравнение импульса

$$\frac{1}{T}\left(\frac{Du_\alpha}{Dt} - F_\alpha\right) + \frac{\partial W}{\partial r_\alpha} = \frac{\partial}{\partial r_\beta}\eta\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha}\right) + Y_T (\nabla T)^2 \frac{\partial T}{\partial r_\alpha} + \frac{E}{\eta \Lambda_\Sigma} U_T \frac{\partial T}{\partial r_\alpha} \nabla \mathbf{u} \tag{5.6}$$

$$W = X + \alpha_1 \frac{E \nabla \mathbf{u}}{\eta \Lambda_\Sigma} + X_T (\nabla T)^2$$

$$X_T = \frac{1}{2}\left(\alpha_2 + \frac{d\alpha_1}{dT} - \frac{2\alpha_1}{\eta\Lambda_\Sigma}\frac{d\eta\Lambda_\Sigma}{dT}\right) \tag{5.7}$$

$$Y_T = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha_1}{dT^2} - \frac{d\alpha_2}{dT} + \frac{2}{\eta\Lambda_\Sigma}\left(\alpha_2 - \frac{d\alpha_1}{dT}\right)\frac{d\eta\Lambda_\Sigma}{dT}\right), \quad U_T = \frac{d\alpha_1}{dT} - \alpha_2$$

Ранее [9] в аналогичном виде получено уравнение импульса для одноатомного газа (здесь попутно исправлены описки), $\mathbf{F}$ – безразмерная внешняя сила [1]. Формально можно предполагать p_0 известной функцией t [10], при этом уравнения термострессовой конвекции имеют более сложный вид.

В уравнении (5.6) W – новая зависимая переменная. Включение некоторых слагаемых дивергенции температурных напряжений в выражение для W приводит к тому, что учет этих напряжений не изменяет порядка уравнения импульса.

Проведем анализ влияния вращательных степеней свободы двухатомных молекул на коэффициенты уравнения (5.6), выражаемые через барнеттовы коэффициенты переноса. В соответствии со сказанным в разд. 4 опустим ξ_5^* (см. (4.2)). Используя выражения (4.4) для ξ_4, ξ_5 и формулу (4.5), найдем

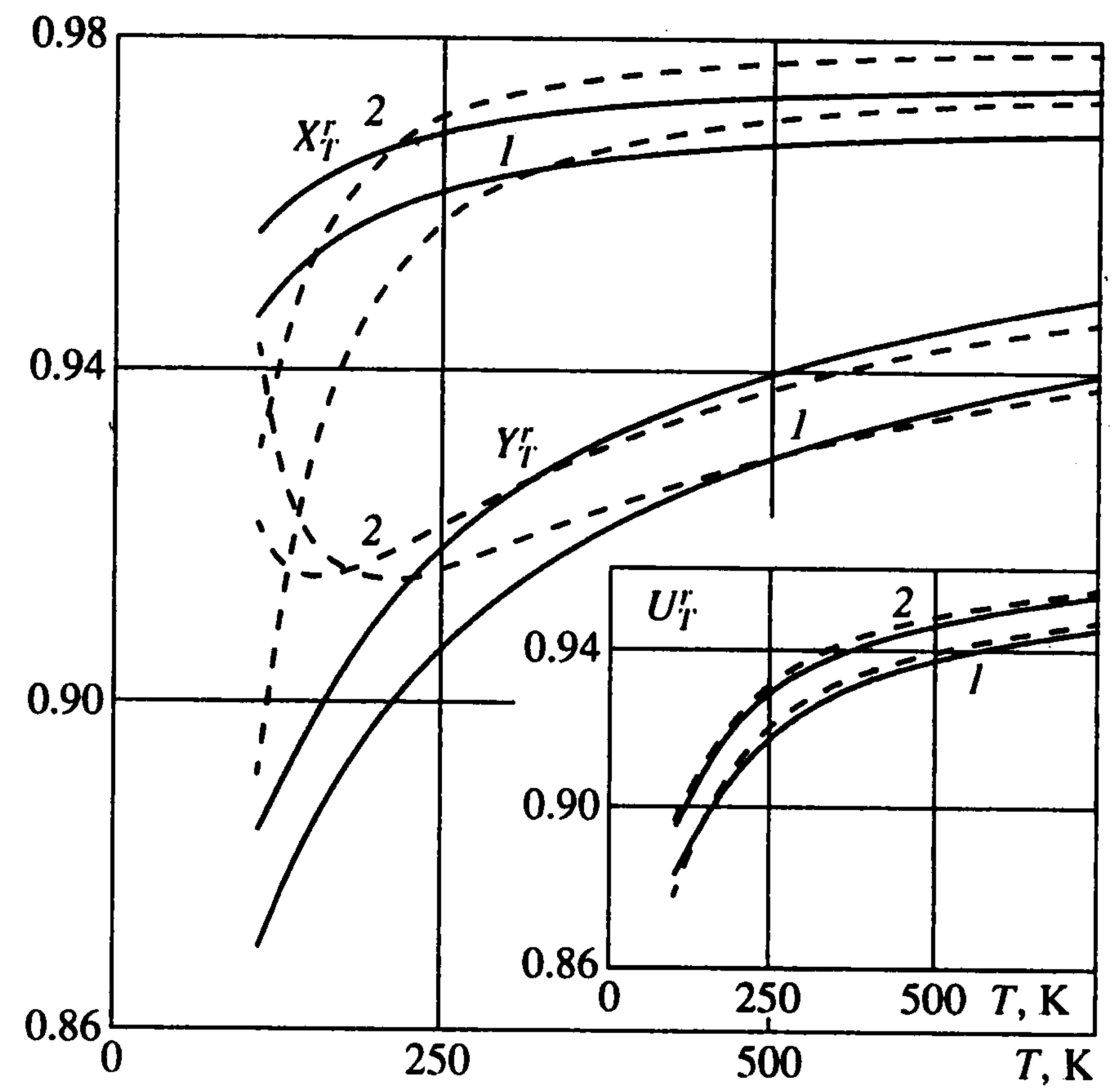
$$\alpha_1 = 3\eta^2 \Lambda_t, \quad \alpha_2 = 3\eta \frac{d\eta\Lambda_t}{dT} \tag{5.8}$$

Используем приближение (4.6), полагая $\sigma = 3/2$ и применяя формулы (4.7), (4.8) при $T_* = 91.5K$. Предполагаем, что динамический коэффициент вязкости не зависит от вращательных степеней свободы молекул и является степенной функцией T, т.е. $\eta = T^s$. Тогда при учете соотношений (5.7), (5.8) получим

$$X_T = \frac{3s}{2} T^{2s-1} X_T^r, \quad X_T^r = \Lambda_t\left(1 + \frac{2T}{s}\frac{d}{dT}\ln\frac{\Lambda_t}{\Lambda_\Sigma}\right)$$

$$Y_T = -\frac{3s}{2} T^{2s-2} Y_T^r, \quad Y_T^r = \Lambda_t\left(1 + T\frac{d}{dT}\ln\frac{\Lambda_\Sigma^2}{\Lambda_t}\right) \tag{5.9}$$

$$U_T = 3sT^{2s-1} U_T^r, \quad U_T^r = \Lambda_t$$



В случае одноатомного газа $X_T^r = Y_T^r = U_T^r = 1$. Наиболее важными в теории термострессовой конвекции являются коэффициенты X_T, Y_T [9], они же наиболее сложно зависят от многоатомности. Результаты расчетов представлены на фигуре, сплошные кривые соответствуют $\varphi = 1$, штриховые – зависимости $\varphi(Z)$ по формуле (4.8), номерам 1, 2 – значения $Z^\infty = 18, 22$. Для $X_T^r(T)$ принято $s = 1$, что оправдано при низких T.

Отличие величины φ от единицы проявляется при низких температурах $T \leqslant 200\ K$. При переменной величине $\varphi(Z)$ влияние вращательных степеней свободы молекул проявляется максимальным образом для зависимостей $X_T^r(T)$ и $U_T^r(T)$. Полученные зависимости от T качественно объясняются тем, что с ростом T увеличивается Z и становится справедливым так называемое приближение Эйкена, когда коэффициенты температурных напряжений даются выражениями для одноатомного газа, т.е. X_T^r, Y_T^r и U_T^r стремятся к единице ([1], разд. 3).

Таким образом, влияние вращательных степеней свободы двухатомных молекул (азота, кислорода и т.п.) на коэффициенты перед слагаемыми уравнений термострессовой конвекции, обусловленными барнеттовыми температурными напряжениями, существенно при низких температурах (примерно до 10% при $T = 100\ K$).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00409), программы "Государственная поддержка ведущих научных школ" (00-15-96069) и Министерства образования РФ (Е00–4.0–118).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галкин В.С.* Уравнения Барнетта для многокомпонентных смесей многоатомных газов // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 590–604.
2. *Chapman S., Cowling T.G.* The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. Cambridge: Univ. Press, 1952. = *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М.: Изд-во иностр. лит., 1960. 510 с.

3. *Ferziger J.H., Kaper H.G.* Mathematical Theory of Transport Processes in Gases. Amsterdam; London: Noth–Holand, 1972. = *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976. 554 с.
4. *Aleksandrov V., Boris A., Freedlender O., Kogan M., Nikolsky Yu., Perminov V.* Thermal stress effect and its experimental detection // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 20th Intern. Symp. Beijing, China, 1996. Peking Univ. Press, 1997. P. 79–84.
5. *Галкин В.С., Жаров В.А.* Решение задач о распространении звука и структуре слабой ударной волны в многоатомном газе при помощи уравнений Барнетта // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 3. С. 467–476.
6. *Волков И.В., Галкин В.С.* Анализ коэффициентов скольжения и температурного скачка в бинарной смеси газов // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 152–159.
7. *McCoy B.J., Dahler J.S.* Second-order constitutive relations for polyatomic fluids // Phys. Fluids. 1969. V. 12. № 7. P. 1392–1403.
8. *Жданов В.М., Алиевский М.Я.* Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. М.: Наука, 1989. 335 с.
9. *Галкин В.С., Фридлендер О.Г.* О силах на тела в газе, обусловленных барнеттовскими напряжениями // ПММ. 1974. Т. 38. Вып. 2. С. 271–283.
10. *Галкин В.С.* Вывод уравнений медленных течений смесей газов из уравнения Больцмана // Учен. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5. № 4. С. 40–47.

Жуковский

Поступила в редакцию
18.IX.2001