

УДК 531.36

© 2002 г. М.З. Досаев, В.А. Самсонов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТЕЛА С ВЯЗКИМ НАПОЛНИТЕЛЕМ

Исследуется устойчивость перманентного вращения симметричного тяжелого тела с вязким наполнителем. На базе уравнений Гельмгольца для вихря строится конечномерная феноменологическая модель "внутреннего трения", с которым наполнитель действует на стенки полости. Построены границы области устойчивости и прослежено взаимодействие внутреннего трения и внешнего демпфирования. Показано, что случаи сплюснутой и вытянутой (вдоль оси вращения) полости приводят к существенно различным формам областей устойчивости.

Современная постановка задачи об устойчивости перманентного вращения тела с идеальной жидкостью вокруг вертикальной оси симметрии была дана В.В. Румянцевым [1]. Рассматривался случай однородного вихревого движения жидкости [2]. Обсуждались различные варианты этой задачи ([3] и др.). К однородному вихревому течению жидкости был "пристроен" пограничный слой и дана оценка влияния вязкости наполнения [4]¹. Уравнения Гельмгольца для вихря были использованы² при построении конечномерной феноменологической модели "внутреннего трения".

Ниже в рамках этой модели исследуется характер устойчивости перманентного вращения тела с вязким наполнителем.

1. Постановка задачи. Рассмотрим движение вокруг неподвижной точки O осесимметричного тяжелого тела, имеющего осесимметричную полость, целиком заполненную вязкой жидкостью. Пусть Oz ось симметрии полости и сосуда. Для простоты будем считать, что центр полости совпадает с точкой C – центром тяжести тела-сосуда.

Свяжем с телом систему координат $Oxyz$, направив ее оси по главным осям инерции тела. Введем [5] систему координат $OXYZ$, вращающуюся вокруг вертикали OZ . Ориентация тела определяется тремя углами: γ (циклический поворот плоскости OZx , совпадающей с OZX , вокруг вертикали) и α, β (углы Крылова в осях $OXYZ$).

Кроме силы тяжести Mg , учитывается внешний (аэродинамической природы) демпфирующий момент D и взаимодействие между стенками сосуда и наполнителем, которое сводится к результирующей паре сил с моментом L .

Опишем движение системы. Вектор G , кинетического момента тела относительно неподвижной точки O связан с угловой скоростью тела известным соотношением $G_i = \Theta_i \omega$, где тензор Θ_i образован главными моментами инерции $\tilde{A}_i, \tilde{A}_i, \tilde{C}_i$ тела для точки O .

¹ См. также: Самсонов В.А., Филиппов В.В. К экспериментальной оценке влияния жидкости в полости тела на его движение. Отчет Ин-та механики МГУ. 1980. № 2386. 33 с.

² Савченко А.Я., Самсонов В.А., Судаков С.Н. Феноменологическая модель взаимодействия наполнителя на стенки прецессирующего сосуда. Отчет Ин-та механики МГУ. 1988. № 3617. 25 с.

Будем считать, что жидкий наполнитель совершает в полости так называемое простое движение [6]. Тогда его состояние описывается тремя компонентами вектора вихря Ω и вектор кинетического момента наполнителя относительно неподвижной точки G_g можно представить в виде

$$G_g = \Theta_0^* \omega + \Theta' \Omega$$

где тензор Θ_0^* образован моментами инерции \tilde{A}^*, \tilde{C}^* так называемого эквивалентного тела, а тензор Θ' – разностями моментов инерции жидкости и эквивалентного тела.

Запишем уравнение движения системы в главных осях, воспользовавшись теоремой об изменении кинетического момента относительно неподвижной точки,

$$(\Theta_t + \Theta^*) \frac{d\omega}{dt} + \Theta' \frac{d\Omega}{dt} + \omega \times [(\Theta_t + \Theta^*) \omega + \Theta' \Omega] = M_{\text{ext}} \quad (1.1)$$

M_{ext} – момент внешних сил, действующих на систему.

2. Модель "внутреннего трения". Будем считать, что реализуется два механизма взаимодействия наполнителя и твердого тела: нормальное давление наполнителя на стенки сосуда L_p и касательное трение жидкости о стенки оболочки L_f . Для учета нормального давления на стенки сосуда известные уравнения Гельмгольца для однородного вихревого течения жидкости

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= \omega_3 \Omega_2 - (1 - e) \omega_2 \Omega_3 - e \Omega_2 \Omega_3 = \delta_1 \\ \dot{\Omega}_2 &= -\omega_3 \Omega_1 + (1 - e) \omega_1 \Omega_3 + e \Omega_1 \Omega_3 = \delta_2 \\ \dot{\Omega}_3 &= (1 + e) (\omega_2 \Omega_1 - \omega_1 \Omega_2) = \delta_3 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где параметр e характеризует относительное удлинение полости, совместно с уравнением (1.1) преобразуем к виду

$$\dot{G}_t + \omega \times G_t = \xi + M_{\text{ext}} = L_p + M_{\text{ext}}, \quad \dot{G}_g + \omega \times G_g = -\xi = -L_p \quad (2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \xi_1 = L_{p1} &= \frac{\tilde{A}_t}{A_t + A^*} \{ A' \omega_3 \Omega_2 - C' \omega_2 \Omega_3 - A' \delta_1 + (B^* - C^* + B_t - C_t) \omega_2 \omega_3 \} + \\ &+ (C_t - A_t) \omega_2 \omega_3 + \left(\frac{\tilde{A}_t}{A_t + A^*} - 1 \right) M_{\text{ext}1} \quad (1 \ 2 \ 3) \end{aligned}$$

$$\tilde{A}_t = A_t + M_t s^2, \quad B_i = A_i$$

M_t – масса тела, s – переменный параметр – координата точки C на оси Oz .

Для введения трения наполнения о стенки оболочки добавим в правую часть первого уравнения (1.3) момент L_f , соответственно, в правую часть второго уравнения момент $-L_f$. Получим следующую систему

$$\dot{G}_t + \omega \times G_t = L_p + L_f + M_{\text{ext}} \quad (2.3)$$

$$\dot{G}_g + \omega \times G_g = -L_p - L_f \quad (2.4)$$

Будем считать, что момент L_f линейно зависит от разности вектора вихря наполнителя и угловой скорости тела

$$L_f = \sigma (\Omega - \omega)$$

где σ – коэффициент внутреннего трения.

3. Динамическая система. Заменяем систему (2.3), (2.4) на равносильную: (2.3), (2.1) и запишем полученную систему в виде

$$\begin{aligned} A_* \dot{\omega}_1 + A' \dot{\Omega}_1 + (C_* - A_*) \omega_2 \omega_3 + C' \omega_2 \Omega_3 - A' \omega_3 \Omega_2 &= M_{\text{ext}1} \\ A_* \dot{\omega}_2 + A' \dot{\Omega}_2 + (A_* - C_*) \omega_3 \omega_1 + A' \omega_3 \Omega_1 - C' \omega_1 \Omega_3 &= M_{\text{ext}2} \\ C_* \dot{\omega}_3 + C' \dot{\Omega}_3 + A' (\omega_1 \Omega_2 - \omega_2 \Omega_1) &= M_{\text{ext}3} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\dot{\Omega}_1 = \omega_3 \Omega_2 - (1 - e) \omega_2 \Omega_3 - e \Omega_2 \Omega_3 - \frac{\sigma A_*}{A' \tilde{A}_r} (\Omega_1 - \omega_1)$$

$$\dot{\Omega}_2 = -\omega_3 \Omega_1 + (1 - e) \omega_1 \Omega_3 + e \Omega_1 \Omega_3 - \frac{\sigma A_*}{A' \tilde{A}_r} (\Omega_2 - \omega_2)$$

$$\dot{\Omega}_3 = (1 + e) (\omega_2 \Omega_1 - \omega_1 \Omega_2) - \frac{\sigma C_*}{C' C_r} (\Omega_3 - \omega_3)$$

$$\omega_1 = \dot{\alpha} - \dot{\gamma} \sin \beta, \quad \omega_2 = \dot{\beta} \cos \alpha + \dot{\gamma} \cos \beta \sin \alpha, \quad \omega_3 = -\dot{\beta} \sin \alpha + \dot{\gamma} \cos \beta \cos \alpha$$

Определим теперь момент \mathbf{D} сил внешнего демпфирования. Обычно его разбивают на две части. Первая, так называемый "гасящий" момент, приводит к уменьшению осевой составляющей угловой скорости тела (здесь эта часть не рассматривается). Вторая часть обеспечивает диссипацию только угловых движений оси тела и может быть представлена в виде

$$\mathbf{D} = (D_X, D_Y, D_Z) = (-A_* k_1 (\dot{\alpha} - \omega_0 \beta), -A_* k_1 (\dot{\beta} + \omega_0 \alpha), 0)$$

где k_1 – коэффициент внешнего демпфирования.

Этим и завершается конструирование динамической системы девятого порядка с девятью фазовыми переменными: Ω_i ($i = 1, 2, 3$), $\alpha, \beta, \gamma, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$.

Эта система имеет очевидное решение, соответствующее перманентному вращению тела и наполнителя вокруг вертикали с угловой скоростью ω_0 ,

$$\alpha = \beta = 0, \quad \dot{\alpha} = \dot{\beta} = \Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \dot{\gamma} = \Omega_3 = \omega_0 \quad (3.2)$$

При $s > 0$ имеем верхнее положение равновесия, при $s < 0$ – нижнее.

4. Устойчивость перманентного вращения. Для исследования устойчивости решения (3.2) в первом приближении проведем линеаризацию системы (3.1). Линеаризованная система распадается на две независимых подсистемы. Одна из них, подсистема шестого порядка относительно переменных $\alpha, \beta, \Omega_1, \Omega_2$,

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \alpha \left\{ \frac{Mgs}{A_*} + \frac{(A'(1-e) - C')}{A_*} \omega_0^2 + \frac{(A_* - C_*)}{A_*} \omega_0^2 \right\} + \beta \frac{\sigma \omega_0}{\tilde{A}_r} \beta \omega_0 k_1 - \dot{\alpha} \frac{\sigma}{\tilde{A}_r} - \\ &- \dot{\alpha} k_1 + \dot{\beta} \left(\frac{A'(1-e) - C'}{A_*} + \frac{A_* - C_*}{A_*} + 1 \right) \omega_0 + \Omega_1 \frac{\sigma}{\tilde{A}_r} + \Omega_2 \frac{A' e \omega_0}{A_*} \\ \ddot{\beta} &= \beta \left\{ \frac{Mgs}{A_*} + \frac{A'(1-e) - C'}{A_*} \omega_0^2 + \frac{A_* - C_*}{A_*} \omega_0^2 \right\} - \alpha \frac{\sigma \omega_0}{\tilde{A}_r} - \alpha k_1 \omega_0 - \dot{\beta} \frac{\sigma}{\tilde{A}_r} - \\ &- \dot{\beta} k_1 + \dot{\alpha} \left(\frac{C' - A'(1-e)}{A_*} + \frac{C_* - A_*}{A_*} - 1 \right) \omega_0 - \Omega_1 \frac{A' e \omega_0}{A_*} + \Omega_2 \frac{\sigma}{\tilde{A}_r} \\ \dot{\Omega}_1 &= -(1-e) \omega_0 (\dot{\beta} + \alpha \omega_0) + (1-e) \omega_0 \Omega_2 - \frac{\sigma A_*}{A' \tilde{A}_r} (\Omega_1 - \dot{\alpha} + \beta \omega_0) \\ \dot{\Omega}_2 &= (1-e) \omega_0 (\dot{\alpha} - \omega_0 \beta) + (e-1) \omega_0 \Omega_1 - \frac{\sigma A_*}{A' \tilde{A}_r} (\Omega_2 - \dot{\beta} - \omega_0 \alpha) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $M = M_t + M_g$ – масса системы тело – наполнитель.

Из оставшейся подсистемы второго порядка относительно переменных $\Omega_3, \dot{\gamma}$ может быть получен первый интеграл

$$C' \Omega_3 + C_t \dot{\gamma} = \text{const}$$

и уравнение

$$(\Omega_3 - \dot{\gamma})' = -\sigma \left(\frac{1}{C'} + \frac{1}{C_t} \right) (\Omega_3 - \dot{\gamma})$$

Для подсистемы (4.1) был выписан характеристический многочлен. Область устойчивости определялась с помощью известного критерия Гурвица. Условия Гурвица имеют громоздкий вид и аналитически их исследовать не удалось. Поэтому построение границ области устойчивости проводилось численно.

Укажем набор параметров задачи для численного счета. Описание тела требует трех параметров: M_r, A_r, C_r . Так же, как ранее³, примем, что для описания инерционных характеристик наполнителя в осесимметричной полости достаточно трех параметров, например: M_g, a_1, a_3 (a_1, a_3 – линейные размеры полости). Тогда остальные параметры определяются из соотношений

$$e = \frac{a_3^2 - a_1^2}{a_3^2 + a_1^2}, \quad A' = \frac{4}{5} M_g \frac{a_1^2 a_3^2}{a_1^2 + a_3^2}, \quad A^* = \frac{M_g (a_1^2 - a_3^2)^2}{5 (a_1^2 + a_3^2)} \quad \text{и т.д.}$$

Были рассмотрены два типа тела: 1) $A_r < C_r$ (сплюснутое тело), 2) $A_r > C_r$ (вытянутое тело), для каждого из которых введены два типа полости: а) $a_1 < a_3$ (вытянутая полость), б) $a_1 > a_3$ (сплюснутая полость).

Кроме этих параметров, необходимо задать еще четыре: σ, ω_0, s и k_1 .

Границы области устойчивости проектировались на плоскость (s, ω_0) .

5. Тестовый пример. Обратимся сначала к случаю $k_1 = 0$, когда внешнее демпфирование отсутствует. В этом случае уравнения движения имеют интеграл площадей

$$G_Z = -G_x \sin \beta + G_y \cos \beta \sin \alpha + G_z \cos \beta \cos \alpha = \text{const}$$

(G_Z – проекция вектора кинетического момента системы на вертикаль) и, как известно [6], вопрос об устойчивости перманентного вращения (3.2) сводится к задаче о характере экстремума измененной потенциальной энергии

$$W = G_Z^2 / 2J + MgZ_c$$

где J – момент инерции системы относительно вертикали.

Можно показать, что достаточным условием минимума W , а следовательно, и устойчивости вращения будет служить неравенство

$$(C_t + C_g - A_r - A_g - Ms^2)\omega^2 - Mgs > 0 \quad (5.1)$$

Это же неравенство, но взятое с противоположным знаком, оказывается достаточным условием неустойчивости вращения при $\sigma \neq 0$.

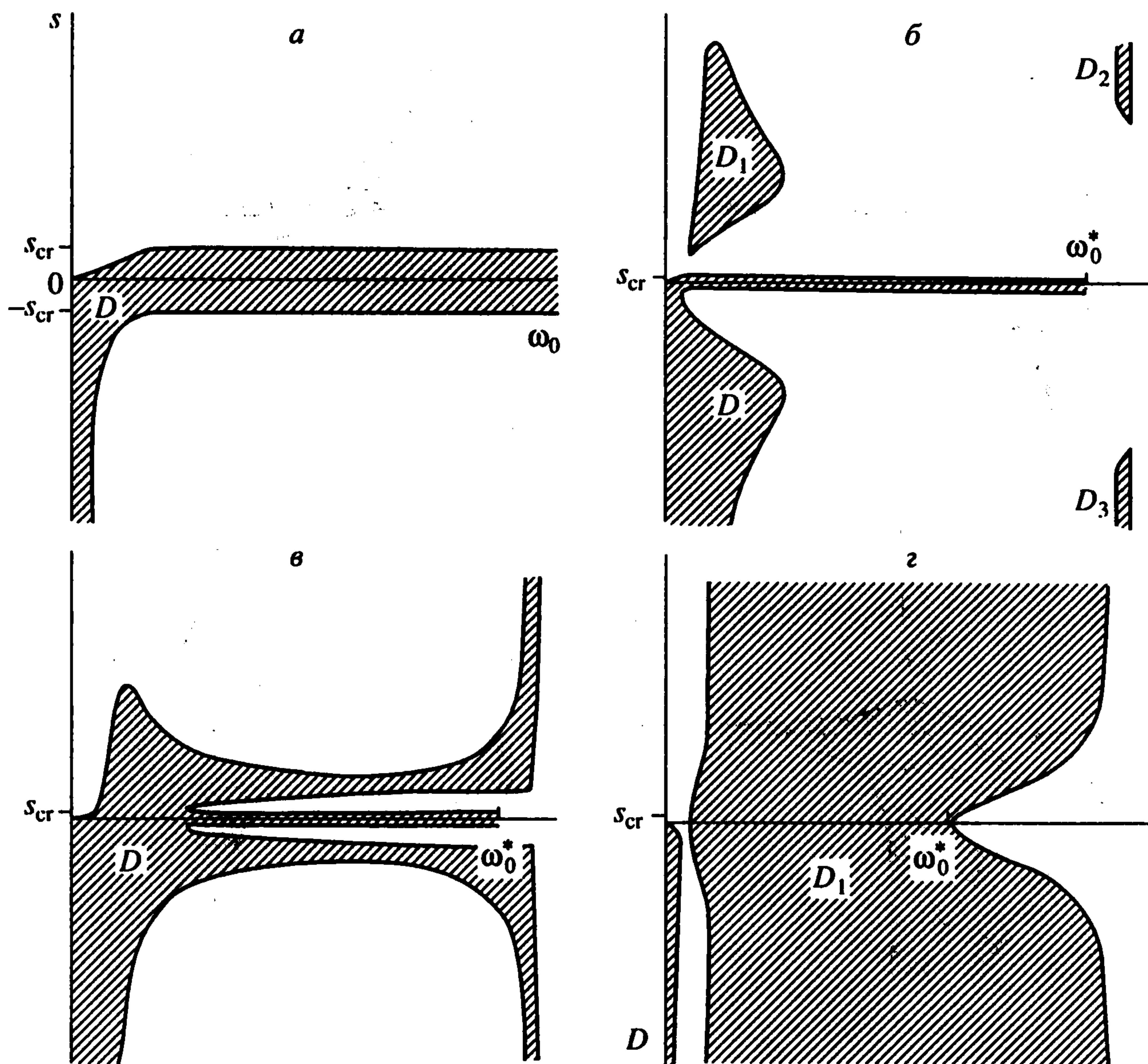
Условие устойчивости (5.1) выделяет в пространстве параметров область устойчивости.

Анализом характера устойчивости на самой границе области устойчивости здесь заниматься не будем.

Ясно, что при $k_1 = 0$ для любого σ границы области устойчивости будут неизменными. Рассмотрим сплюснутое тело. В этом случае существует критическое значение параметра s

$$s_{cr}^2 = (C_t + C_g - A_r - A_g) / M$$

³ Самсонов В.А., Досаев М.З. Модель движения волчка с вязким наполнителем по шероховатой плоскости. Отчет Ин-та механики МГУ. 1997. № 4485. 31 с.



Фиг. 1

такое, что нижнее положение равновесия при $s > -s_{cr}$ будет устойчиво всегда, а верхнее положение равновесия при $s < s_{cr}$ будет устойчиво для достаточно больших ω_0 (фиг. 1, а). Отметим, что для вытянутого тела верхнее положение равновесия при $k_1 = 0$ неустойчиво для любого ω_0 .

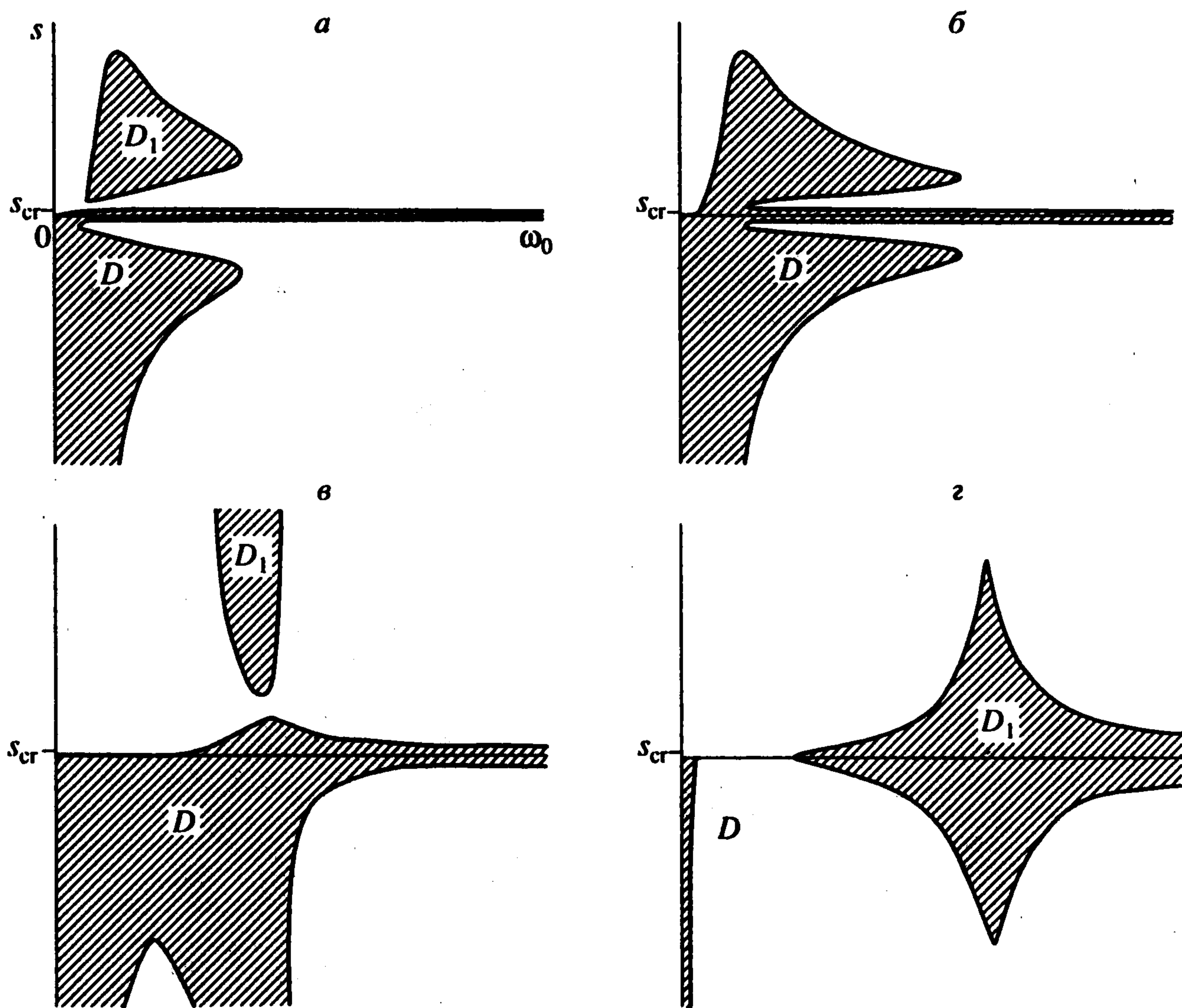
Рассмотрим случай сплюснутого тела с вытянутой полостью. Напомним, что неравенство (5.1) не содержит величины σ — коэффициента внутреннего трения. Поэтому рассматриваемый случай использовался для тестовой проверки численных алгоритмов. Полученный при расчетах вид области устойчивости D при $k_1 = 0$ и любого σ соответствует ожидаемому.

Пусть далее для определенности $\sigma = 4 \text{ кгм}^2/\text{с}$. Опишем, как преобразуется область устойчивости с увеличением k_1 .

При достаточно малых $0 < k_1 \leq 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ область устойчивости D становится ограниченной по ω_0 . Одновременно растет "язык" устойчивости для $s \ll -s_{cr}$.

При $k_1 \sim 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ в полуплоскости $s > 0$ появляются две ограниченные области устойчивости D_1 и D_2 . Одновременно в нижней полуплоскости возникает область устойчивости D_3 (фиг. 1, б). С увеличением k_1 области D_1, D_2, D_3 объединяются с областью D .

Далее с ростом k_1 ($k_1 \sim 1 \text{ с}^{-1}$) область устойчивости становится односвязной (фиг. 1, в), причем прообраз области D_3 растет в отрицательном направлении оси ординат до бесконечности. Прообраз области D_2 , в свою очередь, растет в положительном направлении.



Фиг. 2

С дальнейшим ростом k_1 ($k_1 \approx 700 \text{ с}^{-1}$) область устойчивости увеличивается и становится двусвязной (делится на области D и D_1). Область D_1 при этом перемещается вправо (фиг. 1,з). Далее с ростом k_1 до величин порядка 10^5 с^{-1} картина устойчивости существенно не изменяется.

Обсудим теперь влияние параметра σ на характер изменения области устойчивости при росте k_1 . Рост σ приводит к "растяжению" области устойчивости. Например, для $k_1 = 0.01 \text{ с}^{-1}$, при увеличении σ с $4 \text{ кгм}^2/\text{с}$ до $40 \text{ кгм}^2/\text{с}$ размер области D_1 (фиг. 1,б) увеличивается \approx в 2 раза, при уменьшении σ до $2 \text{ кгм}^2/\text{с}$ размер области D_1 уменьшается в 1.4 раза. Кроме этого, рост σ ведет к "запаздыванию" изменения области устойчивости. Например для $k_1 = 700 \text{ с}^{-1}$ при $\sigma = 4 \text{ кгм}^2/\text{с}$ получаем двусвязную область устойчивости (фиг. 1,з), а при $\sigma = 6 \text{ кгм}^2/\text{с}$ односвязную.

Обратимся теперь к случаю сплюснутого тела со сплюснутой полостью. Для $k_1 = 0$ и любого σ получаем область устойчивости, аналогичную случаю вытянутой полости (фиг. 1,а). Пусть вновь для определенности $\sigma = 4 \text{ кгм}^2/\text{с}$. При $0 < k_1 \leq 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ вид области устойчивости существенно не изменяется. В отличие от случая вытянутой полости область устойчивости D не ограничена по ω_0 . При $k_1 \approx 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ в верхней полуплоскости появляется ограниченная область устойчивости D_1 (фиг. 2,а), которая с ростом k_1 до 10^{-2} с^{-1} соединяется с областью D (фиг. 2,б). Далее с ростом k_1 "языки" устойчивости вытягиваются и сближаются, затем объединяются с центральной частью области устойчивости. При $k_1 \sim 40 \text{ с}^{-1}$ в нижней полуплоскости появляется "зуб" неустойчивости, а в верхней – "язык" устойчивости D_1 (фиг. 2,в).

При $k_1 \sim 60 \text{ с}^{-1}$ область устойчивости становится односвязной. Далее вновь она разделяется на две. При дальнейшем росте k_1 "языки" устойчивости в обеих полуплоскостях становятся ограниченными и сужаются (фиг. 2,з).

Как и в случае вытянутой полости, рост параметра σ приводит к "растяжению" области устойчивости и замедлению смены вида области устойчивости с ростом k_1 .

Кажется очевидным, что случай вытянутого тела должен качественно отличаться от случая сплюснутого тела только для $|s| < s_{\text{cr}}$. Действительно, результаты численного счета показывают, что картина устойчивости для случая вытянутого тела получается "вырезанием" полосы $|s| < s_{\text{cr}}$ из картины устойчивости для случая сплюснутого тела.

В целом, взаимодействие эффектов внутреннего трения и внешнего аэродинамического демпфирования придает границам областей устойчивости причудливые формы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (00-01-00405) и программы "Университеты России".

ЛИТЕРАТУРА

1. Румянцев В.В. Устойчивость вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 6. С. 740–748.
2. Ишлинский А.Ю. Темченко М.Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью // ПМТФ. 1960. № 3. С. 65–75.
3. Карапетян А.В. Об устойчивости регулярной прецессии симметричного твердого тела с эллипсоидальной полостью // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1972. № 6. С. 122–125.
4. Самсонов В.А., Филиппов В.В. Об оценке момента сил вязкости, действующих на прецессирующее тело // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1982. № 4. С. 53–56.
5. Давыскиб А., Самсонов В.А. О возможности гироскопической стабилизации вращения системы твердых тел // ПММ. Т. 59. Вып. 3. С. 385–390.
6. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.

Москва
e-mail: samson@inmech.msu.ru

Поступила в редакцию
6.11.2001