УДК 531.38

© 2002 г. Г.В. Горр, Е.К. Узбек

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ПУАССОНА В СЛУЧАЕ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Исследуются условия интегрируемости уравнений Пуассона в случае трех линейных инвариантных соотношений уравнений движения тела в поле потенциальных и гироскопических сил [1–3]. Получены новые варианты интегрирования уравнений Пуассона, которые отвечают случаю существования у этих уравнений дробно-линейного первого интеграла.

Построение новых решений уравнений динамики твердого тела [4, 5] позволяет получить информацию о свойствах интегральных многообразий нелинейных дифференциальных уравнений и проводить необходимые для механики исследования движения тела. В задаче о движении тела под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается уравнениями класса Кирхгофа [1, 3], решения с тремя линейными по основным переменным задачи инвариантными соотношениями наиболее хорошо изучены [1, 2]. Однако вариант, когда интегралы энергии и момента количества движения на данных соотношениях становятся следствием геометрического интеграла, рассмотрен не до конца. Это обусловлено тем, что уравнения Пуассона имеют только один первый интеграл, и поэтому в общем случае их интегрирование не сводится к квадратурам [2]. Частные случаи интегрирования этих уравнений указаны ранее [2, 6][1].

1. Постановка задачи. Дифференциальные уравнения движения гиростата с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил [1–3] выпишем в принятых ранее обозначениях [6]

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\times a\mathbf{x} + a\mathbf{x}\times B\mathbf{v} + s\times\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times a\mathbf{x} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – момент количества движения гиростата, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент, характеризующий движение носимых тел, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс, $a = (a_{ij})$ $(i, j = 1, 2, 3)$ – гирационный тензор, построенный в неподвижной точке, $B = (B_{ij})$ – постоянная симметричная матрица третьего порядка, определяющая гироскопические силы, $C = (C_{ij})$ – постоянная симметричная матрица третьего порядка, характеризующая потенциальные силы, точка над переменными означает производную по времени t.

Уравнения (1.1) имеют первые интегралы

$$\mathbf{x}\cdot a\mathbf{x} - 2(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) + C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 2E, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot(\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda}) - \tfrac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1 \tag{1.2}$$

Здесь E и k – произвольные постоянные.

Уравнения (1.1) в других переменных [3] описывают движение тела в идеальной несжимаемой жидкости [1, 2] и могут интерпретироваться как дифференциальные уравнения класса Кирхгофа. В силу этого построение новых решений уравнений (1.1) приводит к построению новых решений также и в задаче о движении тела жидкости.

[1] См. также: *Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О линейных инвариантных соотношениях уравнений Кирхгофа: Препринт № 01.02. Донецк: НАНУ ИПММ, 2001. 25 с.

Рассмотрим интегрирование уравнений (1.1) при условии, что они допускают три линейных инвариантных соотношения (всюду далее суммирование по соответствующему индексу ведется от 1 до 3)

$$x_1 = b_0 + \sum b_i \nu_i, \quad x_2 = c_0 + \sum c_j \nu_j, \quad x_3 = d_0 + \sum d_k \nu_k \tag{1.3}$$

где b_n, c_n, d_n $(n = 0, 1, 2, 3)$ – постоянные.

Изучались [1, 2, 6][1] условия существования этих соотношений в различных случаях.

При интегрировании уравнений, соответствующих второму равенству (1.1), при наличии соотношений (1.3), т.е. уравнений (всюду далее подразумевается, что невыписанные два соотношения получаются из выписанного круговой перестановкой символов, указанных в скобках)

$$\dot{\nu}_1 = a_3\nu_2\left(d_0 + \sum d_k\nu_k\right) - a_2\nu_3\left(c_0 + \sum c_j\nu_j\right) \quad (1\,2\,3, bcd) \tag{1.4}$$

возникают трудности, связанные с вариантом, когда подстановка соотношений (1.3) в первые два интеграла (1.2) приводит к равенству $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$. В этом случае уравнения (1.4) имеют только один первый интеграл.

Уравнения (1.4) записаны в главной системе координат, в которой $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $a_{ii} = a_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Чаплыгин [2], рассматривая задачу о движении тела в жидкости при наличии у уравнений движения соотношений (1.3), первым отметил, что интегрирование уравнений (1.4) в квадратурах представляется затруднительным. П.В. Харламов [1] при изучении соотношений (1.3) случай вырождения первых интегралов исключал.

Условия, связывающие параметры задачи (1.1), при выполнении которых подстановка соотношений (1.3) в скалярные уравнения, вытекающие из первого равенства (1.1), с учетом второго равенства (1.1) приводит к тождествам по переменным ν_1, ν_2, ν_3, а внесение выражений (1.3) в первые два интеграла (1.2) дает геометрический интеграл, имеют вид

$$\begin{gathered}
b_0 = -\lambda_1, \quad b_1 = -\frac{1}{2}(B_{22} + B_{33}), \quad c_1 + b_2 = B_{12}, \quad (1\,2\,3, bcd) \\
s_i = -(a_1\lambda_1 b_i + a_2\lambda_2 c_i + a_3\lambda_3 d_i), \quad i = 1, 2, 3 \\
C_{ij} = -(a_1 b_i b_j + a_2 c_i c_j + a_3 d_i d_j), \quad i \neq j \\
C_{ii} = -(a_1 b_i^2 + a_2 c_i^2 + a_3 d_i^2); \quad i, j = 1, 2, 3
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Таким образом, необходимо проинтегрировать только уравнения (1.4). После интегрирования этих уравнений из соотношений (1.3) найдем зависимости компонент x_i от времени, а компоненты угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = a\mathbf{x}$ определим по формулам

$$\omega_i = a_i x_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.6}$$

2. Интегрирование системы (1.4) на основе обобщенного интеграла Жуковского [7]. Пусть инвариантные соотношения (1.3) имеют вид

$$x_1 = -\lambda_1 + b_1\nu_1 \quad (1\,2\,3, bcd)$$

т.е. часть условий, налагаемых на параметры, упрощается

$$s_i = -a_i\lambda_i b_i; \quad B_{ij} = 0, \quad i \neq j; \quad C_{ij} = 0, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{2.1}$$

$$C_{11} = -a_1 b_1^2 \quad (1\,2\,3, bcd)$$

Тогда система (1.4) принимает симметричный вид

$$\dot{\nu}_1 = a_2\lambda_2\nu_3 - a_3\lambda_3\nu_2 + (a_3d_3 - a_2c_2)\nu_2\nu_3 \quad (1\,2\,3,\, bcd) \tag{2.2}$$

и имеет два интеграла

$$\sum \nu_i^2 = 1, \quad a_1b_1\nu_1^2 + a_2c_2\nu_2^2 + a_3d_3\nu_3^2 - 2\sum a_i\lambda_i\nu_i = C_0 \tag{2.3}$$

где C_0 – произвольная постоянная.

Формально систему (2.2) можно сравнить с системой

$$\dot{\omega}_1 = \frac{A_2 - A_3}{A_1}\omega_2\omega_3 + \frac{1}{A_1}(\lambda_2\omega_3 - \lambda_3\omega_2) \quad (1\,2\,3) \tag{2.4}$$

которая описывает случай Жуковского [7] задачи о движении тяжелого гиростата. Здесь A_i – главные моменты инерции, ω_i – компоненты вектора угловой скорости, $i = 1, 2, 3$. Поскольку $A_i > 0$, то интеграл Жуковского таков:

$$\sum (A_i\omega_i + \lambda_i)^2 = x_0^2 \tag{2.5}$$

где x_0 – произвольная постоянная.

В случае (2.1)–(2.3) на основании физического смысла величин B_{11}, B_{22}, B_{33} можно заключить, что параметры b_1, c_2, d_3 могут иметь и положительные, и отрицательные значения.

Интеграл (2.2) в общем случае может быть преобразован к функции, которая описывает центральную поверхность второго порядка (эллипсоид, однополостный и двухполостный гиперболоиды). Следовательно, только в случае, когда второе соотношение (2.3) соответствует уравнению эллипсоида, процедура сведения интегрирования системы (2.2) к квадратурам такая же, как и для системы (2.4) с интегралом (2.5).

Рассмотрим пример: $\lambda_3 = 0$, $a_* = a_3d_3 - a_1b_1 > 0$, $b_* = a_2c_2 - a_3d_3 > 0$. Второй интеграл (2.3) на основании первого интеграла (2.3) представим в виде

$$a_*(\nu_1 + a_*^{-1}a_1\lambda_1)^2 - b_*(\nu_2 - b_*^{-1}a_2\lambda_2)^2 = E_0 \tag{2.6}$$

где E_0 – произвольная постоянная.

С помощью параметризации соотношения (2.6)

$$\nu_1 = \nu_1(u) = a_*^{-1/2}\left(\sqrt{E_0}\,\mathrm{ch}\,u - a_*^{-1/2}a_1\lambda_1\right) \tag{2.7}$$

$$\nu_2 = \nu_2(u) = b_*^{-1/2}\left(\sqrt{E_0}\,\mathrm{sh}\,u + b_*^{-1/2}a_2\lambda_2\right)$$

из геометрического интеграла $\sum \nu_i^2 = 1$ и системы (2.2) имеем

$$\nu_3^2 = 1 - \nu_1^2(u) - \nu_2^2(u), \quad \dot{u} = -(a_*b_*)^{1/2}\left(1 - \nu_1^2(u) - \nu_2^2(u)\right)^{1/2} \tag{2.8}$$

Соотношения (2.7), (2.8) определяют интегральное многообразие системы (2.2).

3. Приведение системы (1.4) к векторному виду. Симметричный случай. Исследование системы (1.4) будем вести, основываясь на ее векторной записи

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{m} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times G^+\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times G^-\boldsymbol{\nu} \tag{3.1}$$

где

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3) = (a_1\lambda_1, a_2\lambda_2, a_3\lambda_3), \quad G^{\pm} = (g_{ij}^{\pm}) \tag{3.2}$$

$$g_{11}^{+} = 0, \quad g_{22}^{+} = a_2c_2 - a_1b_1, \quad g_{33}^{+} = a_3d_3 - a_1b_1, \quad g_{11}^{-} = g_{22}^{-} = g_{33}^{-} = 0$$

$$g_{12}^{\pm} = \pm g_{21}^{\pm} = g_1^{\pm}, \quad g_{13}^{\pm} = \pm g_{31}^{\pm} = g_2^{\pm}, \quad g_{23}^{\pm} = \pm g_{32}^{\pm} = g_3^{\pm} \tag{3.3}$$

$$g_1^{\pm} = \frac{a_1b_2 \pm a_2c_1}{2}, \quad g_2^{\pm} = \frac{a_1b_3 \pm a_3d_1}{2}, \quad g_3^{\pm} = \frac{a_2c_3 \pm a_3d_2}{2}$$

Структура третьего слагаемого в уравнении (3.1) позволяет привести (3.1) к виду

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{m} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times G^{+}\boldsymbol{\nu} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{n}) \tag{3.4}$$

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3); \quad n_1 = -g_3^{-}, \quad n_2 = g_2^{-}, \quad n_3 = -g_1^{-}$$

Рассмотрим случай, когда $G^{-} = 0$. В силу соотношений (3.3) в системе (1.5) условия, налагаемые на b_0, b_1 (1 2 3, bcd), s_i, C_{ij} (i, j = 1, 2, 3), не изменяются, а остальные дают равенства

$$b_2 = \frac{a_2B_{12}}{a_1 + a_2}, \quad b_3 = \frac{a_3B_{13}}{a_1 + a_3} \quad (1\ 2\ 3, bcd)$$

При выполнении данных ограничений на параметры задачи уравнение (3.1) допускает два интеграла

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad G^{+}\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} - 2(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nu}) = \varepsilon_0$$

где ε_0 – произвольная постоянная. Следовательно, задача интегрирования уравнения (3.1) сводится к квадратурам. Вектор угловой скорости гиростата в силу равенств (1.6), (3.3) имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{m} + G^{+}\boldsymbol{\nu} \tag{3.5}$$

т.е. содержит только симметричную матрицу G^{+}.

4. Случай $\mathbf{G^{+} = 0}$, $\mathbf{m = 0}$. Положим в равенствах (3.2), (3.3) $G^{+} = 0$, $\mathbf{m} = \mathbf{0}$. Тогда из соотношений (1.5), (3.2), (3.3) имеем

$$b_2 = \frac{a_2B_{12}}{a_2 - a_1}, \quad b_3 = \frac{a_3B_{13}}{a_3 - a_1} \ (123, bcd), \quad c_2 = \frac{a_1b_1}{a_2}, \quad d_3 = \frac{a_1b_1}{a_3} \tag{4.1}$$

$$s_i = 0, \ i = 1,2,3; \ B_{11} = \varkappa_0(a_2a_3 - a_1a_3 - a_1a_2) \ (123), \quad \varkappa_0 = b_1a_2^{-1}a_3^{-1}$$

При этом вид значений C_{ij} (i, j = 1, 2, 3) из соотношений (1.5) не изменяется. Вектор угловой скорости гиростата в отличие от (3.5) таков:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\nu} \tag{4.2}$$

Было показано [6], что условия интегрируемости уравнений (1.4) тесно связаны с условиями существования изоконических движений тела в случае трех инвариантных соотношений (1.3). Изоконические движения тела обладают следующим свойством: подвижный и неподвижный годографы угловой скорости симметричны друг другу относительно касательной к ним плоскости. Эти движения аналитически можно охарактеризовать инвариантным соотношением [4]

$$\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\nu} - \mathbf{e}) = 0 \tag{4.3}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость, $\mathbf{e}$ – единичный вектор, неизменно связанный с телом. Изоконические движения имеют большое значение в кинематическом истолковании движения тела методом годографов [8]. Для случая трех линейных инвариантных соотношений (1.3) вектор **e** должен удовлетворять векторному уравнению [6]

$$a_1 b_1 \mathbf{e} + \mathbf{e} \times \mathbf{n} = -\mathbf{m} \tag{4.4}$$

Если существует решение этого уравнения относительно вектора **e** и $|\mathbf{e}| = 1$, то условие изоконичности движения (4.3) будет выполнено.

Рассмотрим уравнение (3.4) при $G^+ = 0$, $\mathbf{m} = \mathbf{0}$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{n}(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n}) \tag{4.5}$$

Для удобства исследования перейдем к безразмерному времени $\tau = |\mathbf{n}| t$. Тогда, обозначая штрихом дифференцирование по τ, из уравнения (4.5) имеем

$$\boldsymbol{\nu}' = \mathbf{n}_0 - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n}_0); \quad \mathbf{n}_0 = \mathbf{n} / |\mathbf{n}| = (n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, n_0^{(3)}) \tag{4.6}$$

где учтено соотношение $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$.

Выполним в уравнении (4.6) замену переменных

$$\nu_l = n_0^{(l)} x - \frac{n_0^{(3-l)}}{n_*} y - \frac{n_0^{(l)} n_0^{(3)}}{n_*} z, \quad l = 1,2; \quad \nu_3 = n_0^{(3)} x + n_* z \tag{4.7}$$

$$n_* = \left[\left(n_0^{(1)}\right)^2 + \left(n_0^{(2)}\right)^2 \right]^{1/2}$$

Подставим выражения (4.7) в скалярные уравнения, вытекающие из уравнения (4.6),

$$x' = 1 - x^2, \quad y' = -xy, \quad z' = -xz \tag{4.8}$$

Система (4.8) легко интегрируется

$$x = \operatorname{th}(\tau + \tau_0), \quad y = \frac{z}{c_*} = \frac{1}{\sqrt{1 + c_*^2}\, \operatorname{ch}(\tau + \tau_0)}; \quad \operatorname{th} \tau_0 = x_0 \tag{4.9}$$

где τ_0, c_* – произвольные постоянные. Подставив выражения (4.9) в формулы (4.7), получим зависимости $\nu_i = \nu_i(\tau)$, которые на основании равенств (1.3) позволяют найти $x_i = x_i(\tau)$, т.е. решить задачу интегрирования уравнений (1.1) до конца.

Интерес представляет следующее свойство уравнений (4.5). На основании системы (4.8) и замены переменных (4.7) можно установить, что уравнение (4.5) имеет кроме интеграла $\sum \nu_i^2 = 1$ дополнительный дробно-линейный первый интеграл

$$\frac{n_1 n_3 \nu_1 + n_2 n_3 \nu_2 - (n_1^2 + n_2^2)\nu_3}{n_1 \nu_2 - n_2 \nu_1} = L_0 \tag{4.10}$$

где L_0 – произвольная постоянная. Это обстоятельство и позволило проинтегрировать уравнение (4.6) до конца.

Выясним условия изоконичности движения гиростата в данном случае. На основании уравнения (4.4) заключаем, что $b_1 = 0$, $\mathbf{e} = \mathbf{n}_0$. Следовательно, в равенствах (4.1) следует положить $B_{ii} = 0$ ($i = 1, 2, 3$), а в (1.3) – $c_2 = d_3 = 0$. Тогда инвариантные соотношения (1.3) принимают вид

$$x_1 = b_2 \nu_2 + b_3 \nu_3, \quad x_2 = -\frac{a_1 b_2}{a_2} \nu_1 + c_3 \nu_3, \quad x_3 = -\frac{a_1 b_3}{a_3} \nu_1 - \frac{a_2 c_3}{a_3} \nu_2$$

5. Условия существования дробно-линейного первого интеграла системы (3.4) при $G^+ = 0$, $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$. Поскольку при $G^+ = 0$, $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ установлено, что уравнения Пуассона допускают дробно-линейный интеграл (4.10), то представляет интерес исследование у этих уравнений такого вида интеграла в случае $G^+ = 0$, $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$.

Для уравнений

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{m} \times \boldsymbol{\nu} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n}) \tag{5.1}$$

зададим интеграл

$$\frac{\alpha_0 + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu})}{\beta_0 + (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\nu})} = l_0 \tag{5.2}$$

где l_0 – произвольная постоянная, α_0 и β_0 – фиксированные постоянные, $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ – постоянные векторы, удовлетворяющие условию $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$. Последнее условие целесообразно использовать на этапе постановки задачи, так как наличие в разложении вектора $\boldsymbol{\alpha}$ составляющей, параллельной вектору $\boldsymbol{\beta}$, позволяет тривиальным преобразованием интеграла (5.2) привести его к виду, в котором $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0$.

Введем обозначения

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\nu}),\ \boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \times \mathbf{n},\ \boldsymbol{\delta} = \beta_0\boldsymbol{\alpha} - \alpha_0\boldsymbol{\beta}$$

Вычислим производную от левой части равенства (5.2) в силу уравнения (5.1)

$$(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\gamma})(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) + (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu})[\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})] - (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})[\mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})] + \boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{m} \times \boldsymbol{\nu}) = 0 \tag{5.3}$$

Потребуем, чтобы соотношение (5.3) было тождеством по переменным ν_1, ν_2, ν_3, и рассмотрим наивысшие по степеням члены по ν_i, которые дают первое слагаемое. Так как это слагаемое равно нулю для всех значений ν_i, то $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ или $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \mu_0\mathbf{n}$. На основании этого условия равенство (5.3) преобразуем к виду

$$\mu_0(\mathbf{m} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{n}) + \boldsymbol{\delta} \cdot (\boldsymbol{\xi} + \mathbf{m} \times \boldsymbol{\nu}) = 0 \tag{5.4}$$

Если в равенстве (5.4) положить $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, то вектор $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$, и поэтому должно выполняться условие $(\mathbf{m} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{n}) = 0$. Положим в этом соотношении $\boldsymbol{\nu} = x\mathbf{m} + y\mathbf{n}$, где x и y – переменные. Тогда получим, что $\mathbf{m} = x_*\mathbf{n}$ (x_* – параметр). Но при наличии этого условия имеем противоречивое равенство $(\mathbf{m} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\nu}) = x_*(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\nu})^2 = 0$. Следовательно, в интеграле (5.2) следует полагать $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0$.

Рассмотрим в соотношении (5.4) линейные по ν_i члены, которые содержат слагаемое $\boldsymbol{\delta} \cdot (\mathbf{m} \times \boldsymbol{\nu})$. Так как оно должно быть равно нулю тождественно по ν_i ($i = 1, 2, 3$), то получим условие $\boldsymbol{\delta} = \mu_0^*\mathbf{m}$. Вследствие этого равенства соотношение (5.4) примет вид

$$(\mu_0 - \mu_0^*)(\mathbf{m} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\nu}) = 0$$

Отсюда вытекает, что $\mu_0^* = \mu_0$, и поэтому необходимые условия существования у системы (5.1) интеграла (5.2) таковы:

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0, \quad \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \mu_0\mathbf{n}, \quad \beta_0\boldsymbol{\alpha} - \alpha_0\boldsymbol{\beta} = \mu_0\mathbf{m} \tag{5.5}$$

Система (5.5) имеет нетривиальное решение относительно $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ только при $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$. Без ограничения общности в (5.5) положим

$$\beta_0 = 0,\ \alpha_0 = m^2,\ \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{n} \times \mathbf{m},\ \boldsymbol{\beta} = -\frac{\mu_0}{m^2}\mathbf{m}$$

т.е. интеграл (5.2) таков:

$$\frac{m^2 + (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \cdot \boldsymbol{\nu}}{(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nu})} = l_0;\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0 \tag{5.6}$$

Условие существования интеграла (5.6), выраженное на основании обозначений (3.2)–(3.4) через параметры задачи (1.1), приводит к следующему ограничению:

$$\lambda_1 a_2 c_3 - \lambda_2 a_2 b_3 + \lambda_3 a_3 b_2 = 0 \tag{5.7}$$

причем b_2, b_3, c_3 заданы соотношениями (4.1).

Изучим решение уравнения (4.4) при условии $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$. Положим в уравнении (4.4)

$$\mathbf{e} = \mu_1 \mathbf{n} + \mu_2 \mathbf{m} + \mu_3 (\mathbf{n} \times \mathbf{m})$$

и учтем равенство $|\mathbf{e}| = 1$. Тогда, находя коэффициенты μ_i, имеем

$$\mathbf{e} = \frac{1}{m^2}(\mathbf{m} \times \mathbf{n} - a_1 b_1 \mathbf{m}); \quad m^2 = a_1^2 b_1^2 + n^2 \tag{5.8}$$

Следовательно, если параметры задачи (1.1) и параметры соотношений (1.3) кроме условия (5.7) удовлетворяют равенству

$$\sum a_i^2 \lambda_i^2 = a_1^2 \sum b_i^2 + a_2^2 c_3^2 \tag{5.9}$$

то уравнение (4.4) имеет решение (5.8) и движение гиростата обладает свойством изоконичности. В силу линейности соотношения (5.7) по λ_i система уравнений (5.7), (5.9) разрешима относительно параметров λ_i.

6. Интегрирование уравнения (5.1). Для удобства исследования перейдем в уравнении (5.1) к новым переменным и параметрам. Положим

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|, \quad \mathbf{m}_0 = \mathbf{m}/|\mathbf{n}|, \quad \tau = |\mathbf{n}|t$$

Дифференцирование по τ обозначим штрихом. Тогда из уравнения (5.1) вытекает

$$\boldsymbol{\nu}' = \mathbf{m}_0 \times \boldsymbol{\nu} + \mathbf{n}_0 - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n}_0) \tag{6.1}$$

где учтено интегральное соотношение $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$, т.е. интегрирование ведем на сфере Пуассона.

Преобразуем уравнение (6.1) в общем случае, т.е. без учета условия $\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{m}_0 = 0$. Введем вектор $\mathbf{d} = \mathbf{m}_0 - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{m}_0)\mathbf{n}_0$, ортогональный $\mathbf{n}_0$. Уравнение (6.1) примет вид

$$\boldsymbol{\nu}' = \mathbf{d} \times \boldsymbol{\nu} + (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{m}_0)(\mathbf{n}_0 \times \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{n}_0 - \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n}_0) \tag{6.2}$$

Обозначим через u, v, w компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ в базисе $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{n}_0 \times \mathbf{d}$. Тогда из равенства (6.2) следует

$$u' = d^2 w + 1 - u^2, \quad v' = -uv - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{m}_0)w, \quad w' = -u(1+w) + (n_0 \cdot \mathbf{m}_0)v \tag{6.3}$$

На основании условия $|\boldsymbol{\nu}| = 1$ заключаем, что переменные u, v, w удовлетворяют инвариантному соотношению

$$u^2 + d^2(v^2 + w^2) = 1 \tag{6.4}$$

В общем случае систему (6.3) проинтегрировать не удалось. Но в случае существования у нее дробно-линейного интеграла (см. разд. 5) это можно сделать, так как при $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0$ или $\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{m}_0 = 0$ уравнения (6.3) упрощаются

$$u' = m_0^2 w + 1 - u^2, \quad v' = -uv, \quad w' = -u(1+w) \tag{6.5}$$

и допускают первый интеграл

$$(w+1)/v = g_0 \tag{6.6}$$

где g_0 – произвольная постоянная. Поскольку переменные u, v, w связаны соотношением (6.4), в котором следует положить $d = m_0$, то интегрирование системы (6.5) при наличии равенств (6.4), (6.6) сведем к интегрированию уравнения

$$\theta' = -\left(\frac{m_0 g_0}{h_0^2} + R_0 \sin\theta\right); \quad h_0^2 = 1 + g_0^2 \tag{6.7}$$

При получении этого уравнения использована замена

$$u = R_0 \cos\theta, \quad v = \frac{g_0}{h_0^2} + \frac{R_0}{m_0 h_0}\sin\theta, \quad w = -\frac{1}{h_0^2} + \frac{g_0 R_0}{m_0 h_0}\sin\theta \left(R_0^2 = 1 - \frac{m_0^2}{h_0^2}\right) \tag{6.8}$$

причем постоянная g_0 должна удовлетворять условию $g_0^2 > m_0^2 - 1$.

Из уравнения (6.7) имеем

$$\theta = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{p_0}\sqrt{p_0^2 - q_0^2}\,\mathrm{tg}\frac{\sqrt{p_0^2 - q_0^2}}{2}(\tau - \tau_0) - q_0\right) \tag{6.9}$$

$$p_0 = -\frac{m_0 g_0}{h_0}, \quad q_0 = R_0$$

(ограничиваемся случаем $p_0^2 - q_0^2 > 0$). Компоненты вектора $\boldsymbol{\nu}$ найдем с использованием базиса $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{m}_0$, $\mathbf{n}_0 \times \mathbf{m}_0$

$$\nu_1 = n_0^{(1)} u + m_0^{(1)} v + (n_0^{(2)} m_0^{(3)} - n_0^{(3)} m_0^{(2)}) w \quad (1\;2\;3) \tag{6.10}$$

где $n_0^{(i)}, m_0^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$) – компоненты векторов $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{m}_0$ соответственно.

Подстановка выражения (6.9) в соотношения (6.8) позволяет определить функции $u = u(\tau)$, $v = v(\tau)$, $w = w(\tau)$, по которым из равенств (6.10) и (1.3) находятся основные переменные задачи.

Представляет интерес вид вектора угловой скорости

$$\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{m} + \mathbf{n} \times \boldsymbol{\nu} \; (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0) \tag{6.11}$$

7. Случай $\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$. В разд. 5, 6 рассмотрены дробно-линейные первые интегралы системы (5.1) и показано, что они существуют при условии $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 0$. Поскольку в общем случае система (5.1) не проинтегрирована, то представляет интерес ее интегрирование, не основанное на существовании алгебраических интегралов [6].

Пусть в уравнении (6.1) параметры задачи таковы, что

$$\mathbf{m}_0 = a_0 \mathbf{n}_0 \tag{7.1}$$

(т.е. $\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ для уравнений (5.1)). При этом условия, налагаемые на параметры λ_i, таковы:

$$a_1\lambda_1 = -a_0 a_2 c_3, \quad a_2\lambda_2 = a_0 a_1 b_3, \quad a_3\lambda_3 = -a_0 a_1 b_2 \tag{7.2}$$

В соотношениях (7.1), (7.2) a_0 – постоянная. Частный случай $b_3 = c_3 = 0$ рассмотрен ранее [6].

Введем вместо переменных ν_i новые переменные p_i

$$\nu_l = n_0^{(l)} p_l + (-1)^l n_0^{(3-l)} n_*^{-1} p_2 - n_0^{(l)} n_0^{(3)} n_*^{-1} p_3, \quad l = 1, 2 \tag{7.3}$$

$$\nu_3 = n_0^{(3)} p_1 + n_* p_3$$

На основании замены (7.3) система уравнений, вытекающая из системы (6.1) при условии (7.1) может быть приведена к виду

$$p_1' = 1 - p_1^2, \quad p_2' = -p_1 p_2 - a_0 p_3, \quad p_3' = a_0 p_2 - p_1 p_3 \tag{7.4}$$

Система (7.4) интегрируется в элементарных функциях

$$p_1 = \mathrm{th}(\tau+\tau_0), \quad p_2 = \frac{\cos(a_0\tau+\varphi_0)}{\mathrm{ch}(\tau+\tau_0)}, \quad p_3 = \frac{\sin(a_0\tau+\varphi_0)}{\mathrm{ch}(\tau+\tau_0)} \tag{7.5}$$

где φ_0 – произвольная постоянная. Последовательной подстановкой выражений (7.5) в равенства (7.3) и полученных выражений в соотношения (1.3) найдем выражения всех переменных задачи.

Из соотношений (7.3), (7.5) вытекает, что при исключении переменной τ в выражениях (7.3) приходим к первому интегралу уравнения (6.1), который имеет трансцендентный вид. Вектор угловой скорости гиростата находим по аналогии с выражениями (4.2), (6.11)

$$\boldsymbol{\omega} = a_0(-\mathbf{n} + \mathbf{n}\times\mathbf{v})$$

Изучим условия разрешимости уравнения (4.4). В силу условия (7.1) исходные векторы тоже коллинеарны: $\mathbf{m} = a_0\mathbf{n}$. Решение уравнения (4.4) таково:

$$\mathbf{e} = \mathbf{n}/|\mathbf{n}|, \quad a_0 = -a_1 b_1/|\mathbf{n}|$$

Следовательно, если в решении (7.5) параметр a_0 принимает указанное выше значение, то движение гиростата будет изоконическим.

Таким образом, показано, что система (3.1) интегрируема в четырех случаях

1) $G^- = 0$, 2) $G^+ = 0$, $\mathbf{m} = \mathbf{0}$, 3) $G^+ = 0$, $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 0$, 4) $G^+ = 0$, $\mathbf{m}\times\mathbf{n} = 0$

В первом случае дополнительный интеграл уравнений Пуассона имеет полиномиальный вид, во втором и третьем – дробно-линейный, в четвертом – трансцендентный.

Как уже отмечено выше, другие варианты интегрируемости уравнений Пуассона в случае существования у системы (1.1) трех линейных инвариантных соотношений указаны ранее [1–3]. Вариант Чаплыгина интересен тем, что G^+ и G^- не обращаются в нуль одновременно. В обозначениях данной статьи этот случай таков: $g_{ij}^+ = 0$ $(i \neq j)$, $\mathbf{m} = \mathbf{0}$, $\mathbf{n} = (0, 0, n_3)$, но $g_{22}^+ \neq 0$, $g_{33}^+ \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харламов П.В.* О решениях уравнений динамики твердого тела // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 3. С. 567–572.
2. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья вторая // Собр. соч. Т. 1. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. С. 194–312.
3. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces. // J. Theor. and Appl. Mech. 1986. T. 5. № 5. P. 747–762.
4. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем. Киев: Наук. думка, 1984, 288 с.
5. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. Киев: Наук. думка, 1978. 296 с.
6. *Горр Г.В., Саркисьянц Е.В., Скрыпник С.В.* Об изоконических движениях тела в случае трех линейных инвариантных соотношений // Механика твердого тела. Киев: Наук. думка, 2000. Вып. 30. С. 93–99.
7. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельный жидкостью // Собр. соч. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. Т. 1. С. 31–152.
8. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 502–507.

Донецк

Поступила в редакцию
12.X.2001