

УДК 531.38:534.1

© 2002 г. Ю.М. Заболотнов, В.В. Любимов

НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

В нелинейной постановке исследуются эволюционные эффекты при движении тяжелого динамически симметричного твердого тела вокруг неподвижной точки в случаях, близких к случаю Лагранжа. Эволюционные эффекты обуславливаются действующими на тело возмущениями: малым смещением центра масс относительно оси динамической симметрии, постоянным в связанной системе координат возмущающим моментом, диссипативными моментами. Показывается, что наличие возмущений приводит к существованию "притягивающих" или "отталкивающих" резонансов, которые определяют эволюцию системы на нерезонансных участках движения. Используется метод интегральных многообразий для сингулярно возмущенных систем и метод усреднения. Приводится качественное представление возможных движений статически устойчивого волчка на фазовой плоскости при учете резонанса низшего порядка.

Сложность исследования резонансных явлений при движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки при действии различных возмущений ([1–4] и др.) обуславливается в основном нелинейностью уравнений движения и переменностью частот, характеризующих движение. Для первоначального упрощения системы уравнений движения тела ниже используется метод интегральных многообразий (ИМ) [5–7]. Основанием такого подхода служит наличие в системе диссипативных моментов, приводящих к тому, что траектории системы с течением времени стремятся к некоторому ИМ [7]. Поэтому исследование эволюции системы можно проводить, изучая поведение системы на ИМ. Движение по ИМ соответствует движениям тела, близким к прецессионным. Для построения приближенной системы уравнений движения тела по ИМ используется метод разделения движений для сингулярно возмущенных систем [6, 7]. С другой стороны, движение по ИМ в данной задаче описывается одночастотной системой, причем обращение в нуль частоты для исходной системы приводит к резонансу низшего порядка, наиболее существенно влияющему на движение тела.

Основное внимание ниже уделяется нерезонансным областям движения системы, для которых получены приближенные эволюционные уравнения. Показывается, что иногда приходится строить второе приближение метода усреднения. В этом смысле изучаемые эволюционные движения аналогичны вторичным резонансным эффектам [8]. Развиваемый здесь метод имеет своим источником работы, в которых рассматривалось получение квазистатических и низкочастотных уравнений движения твердого тела в сопротивляющейся среде [9, 10]. Методом усреднения исследовались [3, 4] движения тела, близкие к регулярной прецессии, однако нелинейные эволюционные резонансные эффекты не рассматривались.

1. Уравнения движения твердого тела. Положения твердого тела при вращении вокруг неподвижной точки задаются углами Эйлера ψ, θ, φ , связывающими неподвижную $OX_1Y_1Z_1$ и вращающуюся вместе с телом подвижную $OXYZ$ системы координат. Осевые моменты инерции I_x, I_y, I_z соответствуют динамически симметричному телу, $I_x = I_y = I > I_z$, а положение центра масс определяется вектором $\Delta r = \Delta x i + \Delta y j + \Delta z k$, заданным в связанной с телом системе координат $OXYZ$. В случаях, близких к случаю Лагранжа, обычно принимают $0 < (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2} \ll |\Delta z|$, причем, не ограни-

чивая общности, можно положить $\Delta x = 0$, выбрав соответствующим образом положение связанной системы координат $OXYZ$. В дальнейшем отнесем величину осевого момента инерции I_z к величине I и сохраним за ней прежнее обозначение.

Кроме момента силы тяжести, на тело действуют постоянный в связанной системе возмущающий момент

$$\Delta \mathbf{M} = \Delta M_x \mathbf{i} + \Delta M_y \mathbf{j} + \Delta M_z \mathbf{k}$$

и малый диссипативный момент

$$\mathbf{M}^\omega = M_x^\omega \mathbf{i} + M_y^\omega \mathbf{j} + M_z^\omega \mathbf{k}; \quad M_u^\omega = m^{\omega u} \omega_u, \quad u = x, y, z$$

где ω_u – компоненты угловой скорости тела в системе координат $OXYZ$, $m^{\omega u}$ – постоянные неположительные коэффициенты, причем вследствие симметрии тела $m^{\omega x} = m^{\omega y} = m^\omega$. Все моменты здесь и далее отнесены к величине I .

Уравнения возмущенного движения тела вокруг неподвижной точки записываются в форме, удобной для применения асимптотических методов [2, 9, 11],

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= M_{z1}, \quad I_z \dot{\omega}_z = M_z \\ \ddot{\theta} &= M_{xn} + F_1(x, \theta) F_2(x, \theta), \quad \dot{\varphi} = \omega_z - \omega_\psi \cos \theta \\ M_{z1} &= M_{yn} \sin \theta + M_z \cos \theta \\ M_{xn} &= M_x \cos \varphi - M_y \sin \varphi, \quad M_{yn} = M_y \cos \varphi + M_x \sin \varphi \\ M_z &= -G \Delta y \sin \theta \sin \varphi + \Delta M_z + m^{\omega z} \omega_z \\ M_x &= G \Delta y \cos \theta - G \Delta z \sin \theta \cos \varphi + \Delta M_x + m^\omega \omega_x \\ M_y &= G \Delta z \sin \theta \sin \varphi + \Delta M_y + m^\omega \omega_y \\ \omega_\psi &= \dot{\psi} = F_1(x, \theta), \quad F_1(x, \theta) = (Q - I_z \omega_z \cos \theta) / \sin^2 \theta \\ F_2(x, \theta) &= (Q \cos \theta - I_z \omega_z) / \sin \theta \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь Q – отнесенная к I проекция кинетического момента тела на вертикаль OZ_1 , G – модуль силы тяжести тела, отнесенный к I , $x = (Q, \omega_z)$ – вектор медленных переменных, θ и φ – быстрые переменные, точкой обозначена производная по времени t .

Момент, действующий в плоскости угла нутации θ , представляется в виде

$$M_{xn} = M_{xn}^0 + \Delta M_{xn} \tag{1.2}$$

Здесь

$$M_{xn}^0 = -G \Delta z \sin \theta \tag{1.3}$$

$$\Delta M_{xn} = G \Delta y \cos \theta \cos \varphi + \Delta M_x \cos \varphi - \Delta M_y \sin \varphi + m^\omega \dot{\theta}$$

где M_{xn}^0 – момент силы тяжести G , соответствующий невозмущенному движению твердого тела ($\Delta \mathbf{M} = 0$, $M_x^\omega = M_y^\omega = M_z^\omega = 0$, $\Delta y = 0$); ΔM_{xn} – возмущающий момент.

Рассматривается случай, близкий к случаю Лагранжа, поэтому полагается, что

$$M_{z1} \ll M_{xn}^0, \quad M_z \ll M_{xn}^0, \quad \Delta M_{xn} \ll M_{xn}^0$$

Тогда после масштабирования возмущающих функций в системе (1.1) получим

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, \varphi, \theta, \dot{\theta}), \quad \ddot{\theta} + F(x, \theta) = \varepsilon [f_1(x, \varphi, \theta) + f_2 \dot{\theta}], \quad \dot{\varphi} = \Phi(x, \theta) \quad (1.4)$$

Здесь

$$\varepsilon X = (\varepsilon X_1, \varepsilon X_2), \quad \varepsilon X_1 = M_{z1}, \quad \varepsilon X_2 = M_z / I_z$$

$$F(x, \theta) = -M_{xn}^0 - F_1(x, \theta)F_2(x, \theta), \quad \Phi(x, \theta) = \omega_z - F_1(x, \theta) \cos \theta$$

$$\varepsilon f_1 = G \Delta y \cos \theta \cos \varphi + \Delta M_x \cos \varphi - \Delta M_y \sin \varphi, \quad \varepsilon f_2 = m^\omega$$

В системе (1.4) малый параметр $\varepsilon > 0$ характеризует малое смещение центра масс тела относительно оси динамической симметрии (Δy), величины возмущающих ($\Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_z$) и диссипативных ($m^\omega, m^{\omega z}$) моментов.

2. Уравнения движения по интегральному многообразию. Для системы вида (1.2) была разработана [7] процедура построения интегрального многообразия (ИМ), позволяющая исследовать движения при учете возникающего в системе резонанса низшего порядка вида $\Phi(x, \theta) \approx 0$. Для этого система (1.4) приводится к сингулярно возмущенному виду

$$x' = \mu X(x, \varphi, \theta, \omega_\theta) \quad (2.1)$$

$$\mu \omega_\theta' = -F(x, \theta) + \mu^2 [f_1(x, \varphi, \theta) + f_2 \omega_\theta]$$

$$\mu \theta' = \omega_\theta, \quad \varphi' = \rho(x, \theta)$$

Штрихом обозначена производная по медленному времени $\tau = \mu t$; $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, $\omega_\theta = \dot{\theta}$, $\mu \rho(x, \theta) = \Phi(x, \theta)$.

При $\mu = 0$ получается вырожденная система

$$x'_0 = 0, \quad F(x_0, \theta_0) = 0, \quad \omega_{\theta_0} = 0, \quad \varphi'_0 = \rho(x_0, \theta_0) \quad (2.2)$$

Для разделения движений методом ИМ и построения соответствующих асимптотических решений необходимо выполнение ряда условий [6, 7], наиболее существенные из которых следующие:

1) уравнение $F(x_0, \theta_0) = 0$ должно иметь изолированный корень $\theta_0 = v(x_0)$, причем

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}(x_0) > C_1 > 0 \quad (2.3)$$

где C_1 – некоторая постоянная;

2) матрица линейной системы, записанной относительно решений вырожденной системы (2.2); должна иметь собственные значения с отрицательными действительными частями (см. подробнее [7]).

Условия существования корней $\theta_0 = v(x_0)$ в данной задаче эквивалентно существованию стационарных точек в случае Лагранжа и безусловно выполняется (см. например, [12]).

Условие (2.3) для системы (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -M_{xn}^\theta(\theta_0) - 3M_{xn}^0(\theta_0) \operatorname{ctg} \theta_0 + \frac{Q^2 + I_z^2 \omega_z^2 - 2I_z \omega_z Q \cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0} > C_1 > 0 \quad \left(M_{xn}^\theta = \frac{\partial M_{xn}^0}{\partial \theta_0} \right)$$

и всегда выполняется при $0 < \theta_0 \leq \pi/2$, что следует из первого выражения (1.3) ($\Delta z > 0$). При $\pi/2 < \theta_0 < \pi$ данное условие выполняется при достаточно больших величинах $|Q|$, $|\omega_z|$ и требует контроля при проведении аналитических и численных расчетов.

Условие отрицательности вещественных частей соответствующей матрицы линейной системы, как показано ранее [7], сводится к существованию диссипативного

момента $\epsilon f_2 = m^\omega < -C_2 < 0$ ($C_2 = O(\epsilon)$ – некоторая положительная постоянная), действующего в плоскости угла нутации. Величина этого момента определяет скорость, с которой траектория системы приближается к ИМ [6, 7]. Следует отметить, что в отличие от метода ИМ, основанного на результатах теории сингулярно возмущенных систем, разработанной А.Н. Тихоновым и др. [5], существует модификация метода [6], в которой не требуется большой величины диссипативных членов (они могут быть и малыми, порядка ϵ).

Решение вырожденной системы (2.2) не дает содержательной информации о движении по ИМ, так как $x_0 = \text{const}$ и $\theta_0 = \text{const}$. Для получения содержательной информации необходимо представить решения для медленного движения в виде асимптотических рядов (например, $\theta = \theta_0(\tau) + \mu\theta_1(\tau) + \mu^2\dots$), подставить их в систему (2.1) и, используя стандартную процедуру построения асимптотических решений для сингулярно возмущенных систем, определить следующие члены ряда. Определяя эти решения с точностью до членов $O(\mu^2)$ (см. подробнее [7]), для системы (2.1) получим

$$\theta = v + \mu^2 f_1(x, \varphi, v) \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)^{-1}, \quad \omega_\theta = \mu^2 \frac{\partial v}{\partial x} X(x, \varphi, v) \quad (2.4)$$

где v – корень уравнения $F(x, v) = 0$.

Соотношения (2.4) совместно с дифференциальными уравнениями для переменных x и φ , которые по форме остаются такими же, как в системе (2.1), описывают движение системы по ИМ. В рядах (2.4) для простоты сохранены те же обозначения, что для исходной системы (2.1).

3. Приведение системы уравнений медленного движения к стандартной системе с быстрой фазой. Движение системы по ИМ остается еще достаточно сложным для анализа, так как могут существовать нерезонансные (фаза φ вращается) и резонансные участки движения, требующие разных подходов при исследовании. Поэтому приведем полученные уравнения медленного движения к системе с быстрой фазой, имея в виду последующее применение для ее исследования хорошо разработанного для этого аппарата метода усреднения. Прежде всего получим дифференциальные уравнения для угла нутации θ , продифференцировав по τ первое соотношение (2.4), тогда

$$\theta' = v' + \mu^2 \frac{\partial f_1}{\partial v} \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)^{-1} \rho(x, v) + \mu^3 \dots \quad (3.1)$$

где производная v' определяется дифференцированием уравнения $F(x, v) = 0$ в виде

$$v' = -\mu \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} X(x, \varphi, v)$$

В правой части уравнения (3.1), не выходя за рамки используемого приближения, можно положить $v \approx \theta$.

Начальные данные для уравнения (3.1) по углу θ должны принадлежать ИМ (2.4). Это будет выполнено при любом значении θ , если переменную Q определить не из решения первого уравнения системы (1.1), а из второго уравнения системы (2.1), определенного с точностью до членов $O(\mu^2)$ (здесь учитывается, что $\omega_\theta = O(\mu^2)$). При этом

$$-F(x, \theta) + \mu^2 f_1(x, \varphi, \theta) = O(\mu^3)$$

Отсюда, учитывая вид функций F, f_1 и решая квадратное уравнение относительно Q , получим

$$Q_{1,2} = \frac{I_z \omega_z}{2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{\cos \theta} \pm \left(\frac{I_z^2 \omega_z^2}{4} - M_{xn}^- \text{ctg} \theta \right)^{1/2} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \quad (3.2)$$

где M_{xn}^- – момент M_{xn} , определенный без учета диссипации ($m^\omega = 0$). Знак плюс

в решении (3.2) соответствует положительным значениям угловой скорости ω_z ($\omega_z > 0$), а знак минус соответствует ее отрицательным значениям ($\omega_z < 0$).

Подставляя выражения (3.2) в условие $\varphi' = 0$, получим выражение для резонансного значения угловой скорости ω_z

$$\omega_z^r = \pm \omega / (1 - I_z)^{1/2}, \quad \omega = (-M_{xn}^- \operatorname{ctg} \theta)^{1/2} \quad (3.3)$$

Соединяя дифференциальные уравнения для переменных θ (уравнение (3.1)), переменных ω_z и φ (второе и четвертое уравнения (1.1)) и переходя к исходному времени t , получим в окончательном виде систему с быстрой фазой φ , описывающую с точностью до членов $O(\mu^2) = O(\varepsilon)$ движение по ИМ,

$$\begin{aligned} (\partial F / \partial \theta) \dot{\theta} &= (3\omega_\psi \cos \theta - (1 + I_z)\omega_z) M_{yn} - M_z \omega_\psi \sin \theta \\ \dot{\omega}_z &= M_z / I_z, \quad \dot{\varphi} = \omega_z - \omega_\psi \cos \theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\partial F / \partial \theta = F^{(\theta)} = -M_{xn}^\theta + \omega_\psi^2 + (I_z \omega_z - \omega_\psi \cos \theta)(I_z \omega_z - 2\omega_\psi \cos \theta)$$

$$\omega_\psi = (Q_{1,2} - I_z \omega_z \cos \theta) / \sin^2 \theta, \quad M_{yn} = O(\varepsilon), \quad M_z = O(\varepsilon)$$

Представляя систему (3.4) в стандартной форме, получим

$$\dot{y} = \varepsilon Y(y, \varphi), \quad \dot{\varphi} = \Delta_\omega(y) + \varepsilon \Omega(y, \varphi) \quad (3.5)$$

где

$$Y(y, \varphi) = (Y_1, Y_2)$$

$$Y_1 = -m^A \cos(\varphi + \varphi_A) + \omega_{1,2} (m^{\omega_z} \omega_z \operatorname{tg} \theta / F^{(\theta)} - m^\omega f_3 \sin \theta)$$

$$Y_2 = (m^{\omega_z} \omega_z + \Delta M_z - G \Delta y \sin \theta \sin \varphi) / I_z$$

$$m^A = \left((m_1^A)^2 + (m_2^A)^2 \right)^{1/2}$$

$$\cos \varphi_A = -m_1^A / m^A, \quad \sin \varphi_A = m_2^A / m^A, \quad m_1^A = f_3 \Delta M_y$$

$$m_2^A = f_3 \left[\Delta M_x + G \Delta y \cos \theta - (G \Delta y \sin^2 \theta \omega_{1,2}) / \cos \theta \right]$$

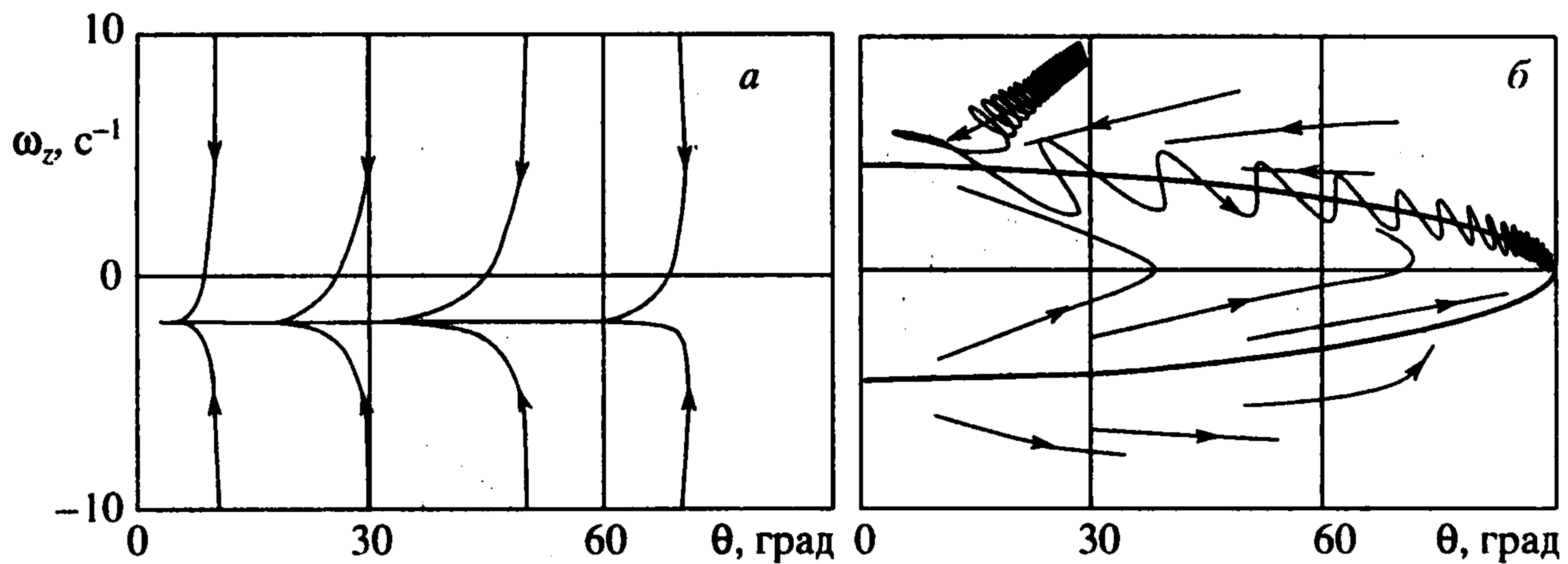
$$f_3 = [(1 + I_z)\omega_z - 3\omega_{1,2}] / F^{(\theta)}, \quad \Delta_\omega(y) = \omega_z - \omega_{1,2}$$

$$\omega_{1,2} = \omega_\psi \cos \theta = I_z \omega_z / 2 \pm \omega_a, \quad \omega_a = (I_z^2 \omega_z^2 / 4 - M_{xn}^- \operatorname{ctg} \theta)^{1/2}$$

$$\Omega(y, \varphi) = \pm \Delta M_{xn} \operatorname{ctg} \theta / (2\omega_a)$$

Здесь $y = (\theta, \omega_z)$ – новый вектор медленных переменных, $Y(y, \varphi)$ – вектор-функция, периодичная по фазе φ с периодом 2π , m^A и φ_A – некоторые обобщенные параметры асимметрии твердого тела.

4. Усредненные уравнения для медленных переменных. Для анализа изменения медленных переменных на нерезонансных участках движения с помощью стандартной процедуры [13] определяются усредненные уравнения второго приближения.



Фиг. 1

Необходимость использования второго приближения обусловливается тем, что первое приближение метода усреднения, как известно, не содержит особенностей, связанных с возникающими в системе резонансами. Определение второго приближения дает возможность получить более полную картину движений в системе, в частности анализировать резонансные эволюционные эффекты. После применения метода усреднения для медленных переменных системы (3.5) получим

$$\langle \dot{\theta} \rangle = \varepsilon A_1^\theta + \varepsilon^2 A_2^\theta, \quad \langle \dot{\omega}_z \rangle = \varepsilon A_1^\omega + \varepsilon^2 A_2^\omega \quad (4.1)$$

где

$$A_1^\theta = m^\omega f_3 \omega_{1,2} \sin \theta + m^{\omega_z} \omega_z \omega_{1,2} \operatorname{tg} \theta / F^{(\theta)}$$

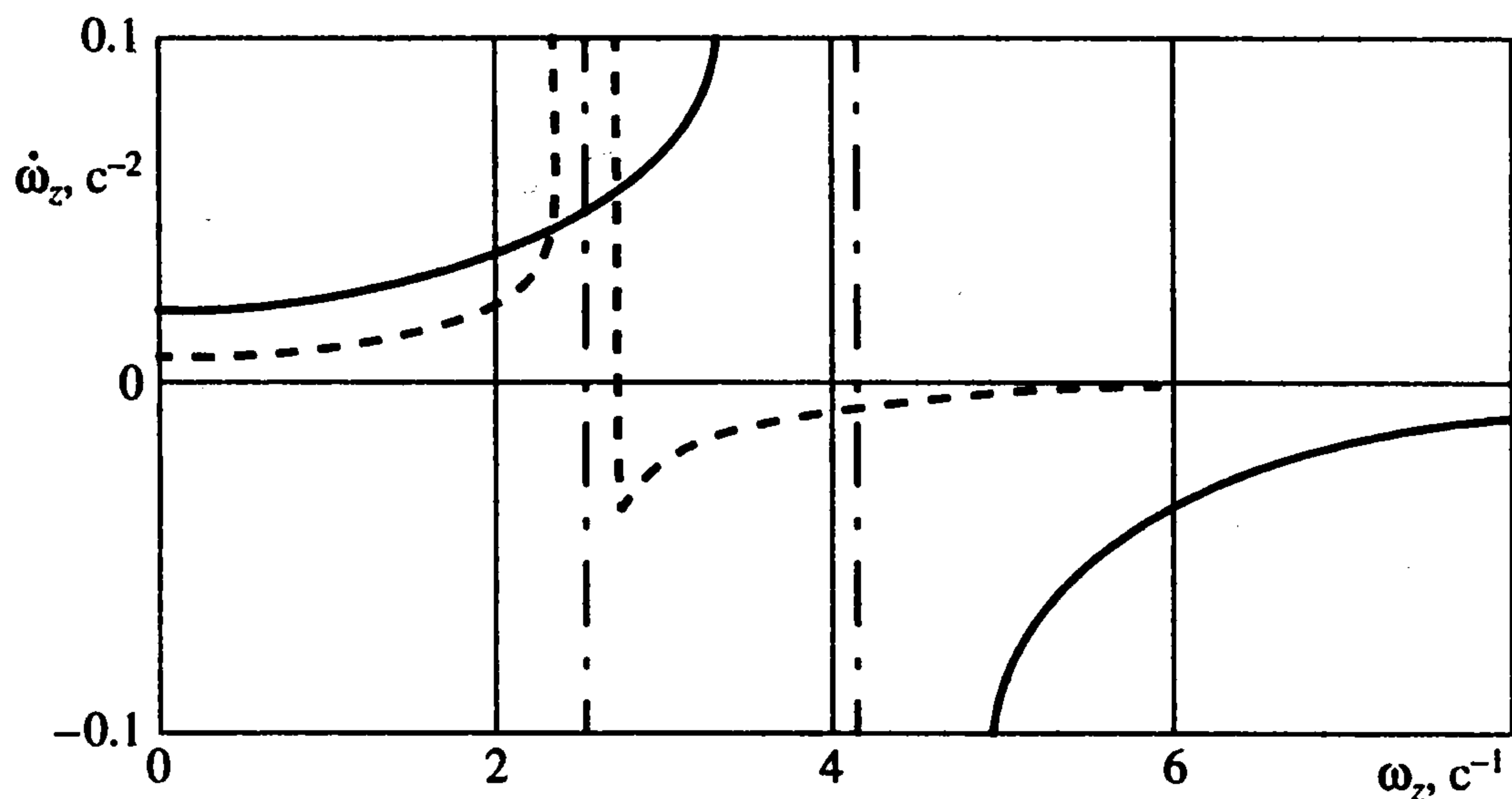
$$A_2^\theta = \pm \frac{m^A}{4\omega_a \Delta_\omega \operatorname{tg} \theta} \left[(\Delta M_x + G\Delta y \cos \theta) \cos \varphi_A + \Delta M_y \sin \varphi_A \right] -$$

$$- \frac{\partial(m^A \cos \varphi_A)}{\partial \omega_z} \frac{G\Delta y \sin \theta}{2I_z \Delta_\omega} + \left(1 \mp \frac{I_z^2 \omega_z}{4\omega_a} \right) \frac{m^A}{2I_z \Delta_\omega^2} G\Delta y \sin \theta \cos \varphi_A -$$

$$- \frac{\partial \varphi_A}{\partial \theta} \frac{(m^A)^2}{2\Delta_\omega}, \quad A_1^\omega = \frac{m^{\omega_z} \omega_z + \Delta M_z}{I_z}$$

$$A_2^\omega = \frac{2m^A \omega_a \cos \varphi_A \mp \Delta M_y}{4I_z \omega_a \Delta_\omega} G\Delta y \cos \theta \mp \frac{m^A}{8I_z \omega_a \Delta_\omega^2} \Delta z \Delta y G^2 \sin 2\theta \cos \varphi_A$$

В системе (4.1) для усредненных переменных для простоты сохранены те же обозначения, что и для системы (3.4). Особенностью усредненных уравнений (4.1) является наличие в знаменателях соответствующих выражений расстроек частот Δ_ω , величина которых определяет близость траектории к рассматриваемым резонансам. Если траектория системы приближается к резонансной кривой (3.3), то порядок членов в правых частях системы (4.1) изменяется. В частности, если $\Delta_\omega = O(\varepsilon^{1/2})$ (традиционная величина резонансной зоны [14]), то порядки функций εA_1^θ , εA_1^ω и $\varepsilon^2 A_2^\theta$, $\varepsilon^2 A_2^\omega$ становятся равными, что следует из приведенных выше выражений. Следовательно, чем меньше Δ_ω , тем сильнее влияние членов второго приближения на эволюцию переменных θ и ω_z (вторичный резонансный эффект [8]).



Фиг. 2

Система (4.1) – автономная система второго порядка. Возможные движения в ней удобно анализировать на фазовой плоскости (ω_z, θ) . Результаты такого анализа для статически устойчивого волчка Лагранжа ($\theta \in [0, \pi/2]$) приведены на фиг. 1 при следующих исходных данных (напомним, что величины G, I_z, m^ω и m^{ω_z} отнесены к осевому моменту инерции I):

$$G = 5 \text{ м}^{-1}\text{с}^{-2}, I_z = 0.05, I = 40 \text{ кгм}^2, \Delta z = 3 \text{ м}, m^\omega = -0.0075 \text{ с}^{-1}$$

$$\Delta y = 0, m^{\omega_z} = -0.0063 \text{ с}^{-1}, \Delta M_z = 0.0125 \text{ с}^{-2}, \Delta M_y = 0 \text{ (фиг. 1, а)}$$

$$\Delta y = -0.04 \text{ м}, m^{\omega_z} = 0, \Delta M_z = 0, \Delta M_y = -0.0063 \text{ с}^{-2} \text{ (фиг. 1, б)}$$

Иллюстрируются два принципиально разных случая возмущенного движения тела: когда поведение системы на фазовой плоскости $\omega_z = \omega_z(\theta)$ определяется только членами первого приближения метода усреднения ($A_1^\theta, A_1^\omega \neq 0$) и когда $A_1^\omega = 0$ (при $m^{\omega_z} = 0, \Delta M_z = 0$), т.е. эволюционные эффекты по переменной ω_z определяются вторым приближением A_2^ω .

В первом случае анализ первого приближения (фиг. 1, а) метода усреднения (с учетом только функций A_1^θ, A_1^ω) в системе (4.1) сводится к нахождению на плоскости (ω_z, θ) двух особых точек с координатами $(-\Delta M_z / m^{\omega_z}, 0)$ и $(-\Delta M_z / m^{\omega_z}, \pi/2)$, причем первая из них является устойчивой, вторая – неустойчивой; фактически фазовый портрет (фиг. 1, а) в этом случае соответствует движению симметричного тела. Во втором случае фазовый портрет системы существенно изменяется: резонансные кривые $\omega_z^r(\theta)$ (3.3) (выделенные на фиг. 1, б жирной линией) разбивают плоскость на три области, и эволюция переменных ω_z, θ определяется принадлежностью начальных данных $\omega_z(0), \theta(0)$ соответствующей области и знаком произведения $\Delta y \Delta M_y$, характеризующего асимметрию тела. Если $\Delta y \Delta M_y > 0$, то положительная ветвь резонансной кривой $\omega_z^r(\theta) > 0$ устойчива и к ней приближаются фазовые траектории. Если $\Delta y \Delta M_y < 0$, то устойчива отрицательная ветвь ($\omega_z^r(\theta) < 0$). При $\Delta y = \Delta M_y = 0$ эволюционные движения системы определяются первым приближением метода усреднения (фиг. 1, а), так как $A_2^\theta = A_2^\omega = 0$.

При больших углах нутации ($\theta > 70^\circ$) вблизи резонансной кривой $\omega_z^r(\theta)$ возможно появление особых точек, устойчивость (или неустойчивость) которых совпадает с устойчивостью (или неустойчивостью) соответствующей ветви (положительной или

отрицательной) резонансной кривой. Появление особых точек вблизи резонансных значений (штрихпунктирные линии) иллюстрируется на фиг. 2 при $\theta > 30^\circ$ и $> 70^\circ$ (соответственно сплошная и штриховая кривые $\dot{\omega}_z = \dot{\omega}_z(\omega_z)$) и объясняется наличием в выражениях для функций A_2^{ω} знаменателей, зависящих от квадратов резонансных соотношений частот Δ_{ω}^2 .

Таким образом, с течением времени при $\Delta u, \Delta M_y \neq 0$ фазовая траектория стремится к одной из резонансных кривых и дальнейшая эволюция системы определяется поведением системы в резонансной области.

Подробный анализ движения системы в резонансной области выходит за рамки данной работы, так как требует другой процедуры усреднения. Однако здесь следует отметить, что если резонанс оказывается "внутренне" устойчивым [8], то траектория системы, оставаясь вблизи резонансной кривой, смещается вдоль нее в направлении особой точки $\theta = \pi/2$, асимптотически стремясь к ней. Подобная траектория, показанная на фиг. 1, б тонкой линией, получена по системе (3.5). Проводились также расчеты по исходным уравнениям, которые подтверждают справедливость этих результатов.

Таким образом, описанный подход позволяет выявить достаточно полную картину резонансных эволюционных эффектов на нерезонансных участках движения твердого тела в случае, близком к случаю Лагранжа, что позволяет использовать его в ряде задач механики, например в задаче движения асимметричного тела в сопротивляющейся среде.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00477).

ЛИТЕРАТУРА

1. Акуленко Л.Д., Лещенко Д.Д., Черноушко Ф.Л. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярной прецессии // Изв. РАН. МТТ. 1986. № 5. С. 3–10.
2. Асланов В.С. Два вида нелинейного резонансного движения асимметричного КА в атмосфере // Космич. исслед. 1988. Т. 26. Вып. 2. С. 220–226.
3. Сазонов В.В., Сидоренко В.В. Возмущенные движения твердого тела, близкие к регулярным прецессиям Лагранжа // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 6. С. 951–957.
4. Sidorenko V.V. Capture and escape from resonance in the dynamics of rigid body in viscous medium // J. Nonlinear Sci. New York. 1994. V. 4. № 1. P. 35–57.
5. Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.
6. Стрыгин В.В., Соболев В.А. Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.
7. Заболотнов Ю.М. Метод исследования резонансного движения одной нелинейной колебательной системы // Изв. РАН. МТТ. 1999. № 1. С. 33–45.
8. Садов Ю.А. Вторичные резонансные эффекты в механических системах // Изв. РАН. МТТ. 1990. № 4. С. 20–24.
9. Ярошевский В.А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. М.: Машиностроение, 1978. 167 с.
10. Шилов А.А., Гоман М.Г. Резонансные режимы пространственного неуправляемого движения аппаратов на участке входа в атмосферу // Тр. ЦАГИ. 1975. В. 1624. 44 с.
11. Белоконов В.М., Белоконов И.В., Заболотнов Ю.М. Метод ускоренного моделирования квазипериодического движения в атмосфере твердого почти осесимметричного тела // Изв. РАН. МТТ. 1984. № 2. С. 43–50.
12. Петкевич В.В. Теоретическая механика. М.: Наука, 1981. 496 с.
13. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
14. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.

Самара

Поступила в редакцию
17.III.2000