УДК 681.513

© 2002 г. В.Н. Шашихин

РОБАСТНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Для систем, параметры которых известны с точностью до верхних и нижних границ, с использованием интервальных матриц введен ранговый критерий управляемости [1–3]. Предложена методика вычисления минимального сингулярного числа интервальной матрицы, которое служит мерой запаса управляемости [4]. Введенный критерий управляемости использован при синтезе робастного управления. Показано, что параметры регулятора с требуемыми свойствами могут быть найдены при решении уравнения Сильвестра с интервальными коэффициентами.

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейный объект с параметрической неопределенностью, математическая модель которого представлена векторным дифференциальным уравнением с интервальными коэффициентами

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t), \ x(t_0) = x_0; \ y(t) = \tilde{C}x(t), \ t \in [t_0, \infty) \tag{1.1}$$

где $x(t) \in R^n$ – вектор фазовых состояний, $u(t) \in R^m$ – вектор управляющих воздействий, $y(t) \in R^l$ – вектор выходных (измеряемых) координат ($l \leqslant n$), $\tilde{A} \in IR^{n\times n}$, $\tilde{B} \in IR^{n\times m}$, $\tilde{C} \in IR^{l\times n}$ – интервальные матрицы (ИМ) с элементами $\tilde{a}_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}]$, $\tilde{b}_{ij} = [\underline{b}_{ij}, \overline{b}_{ij}]$, $\tilde{c}_{ij} = [\underline{c}_{ij}, \overline{c}_{ij}]$, принадлежащими расширенному множеству интервалов $IR = \{[\underline{r}, \overline{r}] \mid \underline{r}, \overline{r} \in R\}$, которое содержит как правильные ($\underline{r} \leqslant \overline{r}$), так и неправильные ($\underline{r} \geqslant \overline{r}$), интервалы.

Под интервальной линейной системой (1.1) понимается семейство "точечных" объектов

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \ x(t_0) = x_0, \ t \in [t_0, \infty) \tag{1.2}$$

с вещественными коэффициентами $A \in R^{n\times n}$ и $B \in R^{n\times m}$ из заданных интервалов $A \in [\underline{A}, \overline{A}]$ и $B \in [\underline{B}, \overline{B}]$:

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \tilde{B}u(t) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \mid \forall A \in \tilde{A}, \forall B \in \tilde{B}\}$$

Среди различных задач робастного управления для интервальных динамических объектов рассмотрим задачу робастной стабилизации. Задача робастной стабилизации, или робастного размещения спектра заключается в выборе обратной связи $\tilde{K} \in IR^{m\times n}$, такой, что спектр $\rho(\tilde{A}_C)$ матрицы замкнутой системы $\tilde{A}_C = (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}) \in IR^{n\times n}$ будет принадлежать предписываемому спектру $\rho(-\tilde{F})$, который задается спектром эталонной матрицы $\tilde{F}$ и расположен в левой полуплоскости $\{\operatorname{Re}\lambda < 0\}$,

$$\rho(\tilde{A}_C) \subseteq \rho(-\tilde{F}) \text{ при всех } A \in \tilde{A}, B \in \tilde{B} \tag{1.3}$$

$$\tilde{F} = \operatorname{diag}(\tilde{\mu}_i)_{i=1}^n \in IR^{n\times n}, \ \tilde{\mu}_i = \lfloor \underline{\mu}_i, \overline{\mu}_i \rfloor$$

Здесь $\tilde{F}$ – ИМ с диагональными элементами, которые выбираются исходя из требований к нижним и верхним границам прямых показателей качества переходных процессов в замкнутой системе. Включение (1.3) понимается в покомпонентном смысле:

$$\tilde{\lambda}_i(\tilde{A}_C)=[\underline{\lambda}_i(\tilde{A}_C),\ \overline{\lambda}_i(\tilde{A}_C)]\subseteq\tilde{\lambda}_i(-\tilde{F})=[\underline{\lambda}_i(-\tilde{F}),\ \overline{\lambda}_i(-\tilde{F})],\ \ \forall i=1,\dots,n$$

Здесь $\tilde{\lambda}_i(\bullet)$ – собственное значение ИМ $(\bullet)$. Отношение порядка $\subseteq$ в расширенной интервальной арифметике [5] определено через отношение $\leqslant$ в R:

$$[\underline{\lambda}_i(\tilde{A}_C),\ \overline{\lambda}_i(\tilde{A}_C)]\subseteq[\underline{\lambda}_i(-\tilde{F}),\ \overline{\lambda}_i(-\tilde{F})]\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}((\underline{\lambda}_i(\tilde{A}_C)\geqslant\underline{\lambda}_i(-\tilde{F}))\,\&\,(\overline{\lambda}_i(\tilde{A}_C)\leqslant\overline{\lambda}_i(-\tilde{F})))$$

Синтез управлений, обеспечивающих желаемое робастное свойство (1.3) в системе (1.1), сводится к решению уравнения Сильвестра с интервальными коэффициентами. Конструктивное использование интервальных матричных уравнений в практике синтеза робастного управления зависит от наличия надежных и легко проверяемых условий их разрешимости, связанных со свойствами управляемости и наблюдаемости.

2. Интервальный критерий управляемости. Если для произвольно заданных начального $x(t_0)=x_0$ и конечного $x(t_1)=x_1$ состояний существует управление $u(t)$, переводящее систему (1.2) с параметрами $A\in\tilde{A}$ и $B\in\tilde{B}$ за конечное время t_1-t_0 из состояния x_0 в состояние x_1, то интервальную систему (1.1) (интервальную матричную пару $(\tilde{A},\tilde{B})$) будем называть управляемой.

Определим матрицу управляемости для интервальной пары $(\tilde{A},\tilde{B})$ следующим образом:

$$\tilde{D}=\left\|\tilde{B}\middle|\tilde{A}\tilde{B}\middle|\dots\middle|\tilde{A}^{n-1}\tilde{B}\right\|\overset{\text{def}}{=}\{D\in R^{n\times mn},\ D=\left\|B\middle|AB\middle|\dots\middle|A^{n-1}B\right\|\ \forall A\in\tilde{A},\forall B\in\tilde{B}\}\tag{2.1}$$

Произведение двух ИМ в выражении (2.1) вычисляется аналогично умножению вещественных матриц с учетом того, что произведение двух интервалов $\tilde{v}$ и $\tilde{u}$ в полной интервальной арифметике определяется следующим аналитическим выражением [6]:

$$\tilde{v}\cdot\tilde{u}=[\max\{(\underline{v}^+\underline{u}^+),\ (\overline{v}^-\overline{u}^-)\}-\max\{(\overline{v}^+\underline{u}^-),\ (\underline{v}^-\overline{u}^+)\},$$

$$\max\{(\overline{v}^+\overline{u}^+),\ (\underline{v}^-\underline{u}^-)\}-\max\{(\underline{v}^+\overline{u}^-),\ (\overline{v}^-\underline{u}^+)\}]$$

где $v^+=\max\{v,0\}$, $u^+=\max\{u,0\}$ – положительные части, а $v^-=\max\{-v,0\}$, $u^-=$ $=\max\{-u,0\}$ – отрицательные части вещественных чисел v и u.

Будем считать, что ранг ИМ $\tilde{H}$ равен n, если всякая вещественная матрица $H\in\tilde{H}$ имеет ранг n:

$$\operatorname{rank}\tilde{H}=n\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\{H\in R^{n\times mn}\mid\operatorname{rank}H=n,\ \ \forall H\in\tilde{H}\}\tag{2.2}$$

Тогда интервальный аналог рангового критерия управляемости может быть сформулирован следующим образом.

Утверждение 1. Интервальная система (1.1) (интервальная пара $(\tilde{A},\tilde{B})$) управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\tilde{D}=n\tag{2.3}$$

Справедливость утверждения 1 следует из управляемости "точечных" систем при всех возможных значениях их параметров и определения (2.2) ранга ИМ.

Множество (2.1) имеет мощность континуума. Для проверки критерия (2.3) необходимо вычислить ранг несчетного числа матриц управляемости точечной системы (1.2).

3. Вычисление ранга интервальной матрицы. Решим задачу определения ранга ИМ управляемости на основе ее факторизации в виде сингулярного разложения. Сингулярное разложение вещественной матрицы $H \in R^{n \times m}$ ранга k имеет вид

$$H = W\Sigma V \tag{3.1}$$

где $W \in R^{n \times n}$, $V \in R^{m \times m}$ – ортогональные матрицы, столбцами которых являются левые и правые сингулярные векторы матрицы H, совпадающие с собственными векторами матриц HH^T и H^TH соответственно. Матрица $\Sigma = (\sigma_{ij}) \in R^{n \times m}$ состоит из диагональной квадратной клетки размера $q \times q$ ($q = \min\{m, n\}$), такой, что $\sigma_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\sigma_{11} \geqslant \geqslant \sigma_{22} \geqslant \ldots \geqslant \sigma_{kk} > \sigma_{k+1,k+1} = \ldots = \sigma_{qq} = 0$, и при $n \neq m$ – из дополнительных нулевых строк и столбцов. Диагональные элементы $\sigma_i \equiv \sigma_{ii}$ матрицы Σ, называемые сингулярными числами матрицы H, представляют собой неотрицательные квадратные корни из собственных значений (СЗ) матрицы HH^T.

Известно [7], что ранг произвольной матрицы H равен рангу диагональной клетки матрицы Σ в ее сингулярном разложении и, следовательно, ранг матрицы может быть определен как количество ненулевых сингулярных чисел.

Обобщим подход к определению ранга матрицы на основе подсчета ненулевых сингулярных чисел на интервальный случай. Для этого воспользуемся связью между сингулярными числами матриц $H \in \tilde{H}$ и СЗ матриц $HH^T \in \tilde{H}\tilde{H}^T$.

Примем в качестве сингулярного разложения ИМ $\tilde{H}$ множество сингулярных разложений вещественных матриц $H \in \tilde{H}$:

$$\tilde{H} = \tilde{W}\tilde{\Sigma}\tilde{V} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{H = W\Sigma V \mid \forall H \in \tilde{H}\}$$

Матрицы W, Σ и V определены в пояснениях к формуле (3.1).

Сингулярным числом ИМ $\tilde{H} \in IR^{n \times m}$ будем называть множество

$$\tilde{\sigma}_s(\tilde{H}) = [\underline{\sigma}_s(\tilde{H}), \overline{\sigma}_s(\tilde{H})] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{\sigma_s(H), s = 1, \ldots, q \quad q = \min\{n, m\} \mid \forall H \in \tilde{H}\} \tag{3.2}$$

состоящее из сингулярных чисел всех вещественных матриц $H \in \tilde{H}$.

Утверждение 2. Сингулярные числа ИМ $\tilde{H} \in IR^{n \times m}$ представляют собой неотрицательные квадратные корни из СЗ матрицы $\tilde{H}\tilde{H}^T \in IR^{n \times n}$ или $\tilde{H}^T\tilde{H} \in IR^{m \times m}$:

$$\tilde{\sigma}_{q-j}(\tilde{H}) = \sqrt{\tilde{\lambda}_{m-j}(\tilde{H}^T\tilde{H})} = \sqrt{\tilde{\lambda}_{n-j}(\tilde{H}\tilde{H}^T)}, \ j = 1, \ldots, q-1, \ q = \min\{n, m\} \tag{3.3}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу HH^T, СЗ $\lambda_i(HH^T)$ которой занумерованы в порядке возрастания $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Если w_i – столбцы матрицы W, то

$$HH^Tw_i = \lambda_i(HH^T)w_i, \ (w_i, w_j) = \delta_{ij}; \ i, j = 1, \ldots, n \tag{3.4}$$

где $(\bullet,\bullet)$ – скалярное произведение, δ_{ij} – символ Кронекера.

Пусть элементы h_{ij} матрицы H изменяются в некоторых пределах: $h_{ij} \in \tilde{h}_{ij} = [\underline{h}_{ij}, \overline{h}_{ij}]$. Тогда необходимо рассматривать множество матриц H, описываемое ИМ $\tilde{H} \in IR^{n \times m}$. При изменении элементов матрицы H будут изменяться и элементы матрицы HH^T. Каждый представитель $HH^T \in \tilde{H}\tilde{H}^T$, в силу способа его построения, при изменении элементов матрицы H будет оставаться симметричным, что сохранит вещественность СЗ и ортогональность собственных векторов для каждого представителя HH^T из множества $\tilde{H}\tilde{H}^T$ в задаче (3.4).

Если $\hat{\lambda}_i(HH^T)$ – приближенное СЗ симметричной матрицы HH^T, а $\hat{w}_i$ – приближенный собственный вектор, нормированный условием $\|\hat{w}_i\|=1$, то величина невязки левой и правой части уравнения (3.4) при подстановке в него $\hat{\lambda}_i(HH^T)$ и $\hat{w}_i$ равна: $\xi_i = HH^T\hat{w}_i - \hat{\lambda}_i(HH^T)\hat{w}_i$. Точное собственное число $\lambda_i(HH^T)$ матрицы HH^T будет принадлежать интервалу [8]

$$[\hat{\lambda}_i(HH^T)-\varepsilon_i,\ \hat{\lambda}_i(HH^T)+\varepsilon_i]$$

где $\varepsilon_i = \|\xi_i\|_2$ – евклидова норма невязки.

Сингулярные числа вещественной матрицы H и СЗ матрицы HH^T или H^TH связаны соотношением [7]

$$\sigma_{q-j}(H)=\sqrt{\lambda_{m-j}(H^TH)}=\sqrt{\lambda_{n-j}(HH^T)},\ j=1,\ldots,q-1,\ q=\min\{n,m\} \tag{3.5}$$

Переходя к ИМ, получаем, что у каждой симметричной матрицы $HH^T \in \tilde{H}\tilde{H}^T$ имеется набор собственных чисел, лежащих в пределах

$$\tilde{\lambda}_i(\tilde{H}\tilde{H}^T)=[\underline{\lambda}_i(\tilde{H}\tilde{H}^T),\ \overline{\lambda}_i(\tilde{H}\tilde{H}^T)]=[\lambda_i\{\mathrm{med}(\tilde{H}\tilde{H}^T)\}-\varepsilon_i,\ \lambda_i\{\mathrm{med}(\tilde{H}\tilde{H}^T)\}+\varepsilon_i] \tag{3.6}$$

Здесь

$$\varepsilon_i=\left\|\left|\tilde{\xi}_i\right|\right\|_2, \tilde{\xi}_i=\tilde{H}\tilde{H}^Tw_i-\lambda_i\{\mathrm{med}(\tilde{H}\tilde{H}^T)\}w_i \tag{3.7}$$

w_i – собственный вектор, отвечающий СЗ $\lambda_i\{\mathrm{med}(\tilde{H}\tilde{H}^T)\}$, $\mathrm{med}(\tilde{H}\tilde{H}^T)=(\overline{HH}^T+$ $+\underline{HH}^T)/2$– медиана ИМ $\tilde{H}\tilde{H}^T$, $\left|\tilde{\xi}_i\right|=\mathrm{col}\left(\left|\tilde{\xi}_{ij}\right|\right)_{j=1}^{n}$ – модуль интервального вектора $\tilde{\xi}_i$, а $\left|\tilde{\xi}_{ij}\right|=\max\left\{\left|\underline{\xi}_{ij}\right|,\left|\overline{\xi}_{ij}\right|\right\}$ – модуль его j-й компоненты.

Пусть $Z \overset{\mathrm{def}}{=} \{\tilde{z}\in IR\,|\,(\underline{z}>0)\,\&\,(\overline{z}>0)\}$ – подмножество неотрицательных интервалов. Определим на подмножестве Z операцию вычисления квадратного корня: $\tilde{a}\in Z,\ \sqrt{\tilde{a}}=\left\lfloor\sqrt{\underline{a}},\sqrt{\overline{a}}\right\rfloor$. Из соотношения (3.5) и определения сингулярного числа (3.2) следует выражение (3.3), в котором собственные значения ИМ $\tilde{H}\tilde{H}^T$ вычисляются по формуле (3.6).

Утверждение 3. Ранг ИМ $\tilde{H}\in IR^{n\times m}$ равен k тогда и только тогда, когда количество ее сингулярных чисел, принадлежащих подмножеству неотрицательных интервалов, равно k:

$$\mathrm{rank}\,\tilde{H}=k \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \{\tilde{\sigma}_s(\tilde{H})\in Z,\ \forall s=1,\ldots,k,\ k\leqslant q=\min\{n,m\}\}$$

Иными словами для сингулярных чисел ИМ должны выполняться неравенства: $\underline{\sigma}_s(\tilde{D})>0$ и $\overline{\sigma}_s(\tilde{D})>0$. Утверждение 3 следует из свойств сингулярного разложения вещественной матрицы и определения сингулярного числа ИМ.

Обозначим через $\langle\tilde{a}\rangle$ наименьшее расстояние точек интервала $\tilde{a}$ до нуля [9]

$$\langle\tilde{a}\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \min\{|\underline{a}|,\ |\overline{a}|\}, & \text{если } 0\notin\tilde{a} \\ 0, & \text{если } 0\in\tilde{a} \end{cases}$$

Наименьшее расстояние от минимального сингулярного числа до нуля в IR в определенной степени может служить мерой удаления матрицы управляемости $\tilde{D}$ от множества вырожденных матриц и соответственно может служить мерой запаса управляемости

$$\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) = \langle \tilde{\sigma}_{\min}(\tilde{D}) \rangle = \min\{|\underline{\sigma}_{\min}(\tilde{D})|, \ |\overline{\sigma}_{\min}(\tilde{D})|\} \tag{3.8}$$

4. Задача робастного размещения спектра. Задача о размещении спектра принадлежит к числу классических задач линейной теории оптимального управления. Значительный вклад в развитие теории аналитического конструирования регуляторов и методов построения стабилизирующих управлений внесли работы отечественных ученых [10–13]. Для систем с вещественными коэффициентами задача размещения спектра или задача синтеза стабилизирующего регулятора, как известно [14], может быть сведена к решению уравнения Сильвестра. Задачу робастного размещения спектра динамической системы с интервальной неопределенностью параметров решим, используя введенный критерий управляемости. Для этого рассмотрим интервальное матричное уравнение Сильвестра

$$\tilde{A}\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{F} = \tilde{B}\tilde{G} \tag{4.1}$$

где $\tilde{G} \in IR^{m\times n}$ – произвольная матрица, $\tilde{F} \in IR^{n\times n}$ – ИМ, определяющая желаемую динамику замкнутой системы и удовлетворяющая требованию

$$\rho(\tilde{A}) \cap \rho(\tilde{F}) = \varnothing \tag{4.2}$$

Здесь $\rho(\tilde{A}) = \{\rho(A) \mid \forall A \in \tilde{A},\ \rho(A) = \{\lambda_i(A),\ i = 1, \ldots, n\}\}$ – спектр ИМ $\tilde{A}$, $\rho(\tilde{F}) = \{\rho(F) \mid \forall F \in \tilde{F},\ \rho(F) = \{\lambda_i(F) = \mu_i \in \tilde{\mu}_i,\ i = 1, \ldots, n\}\}$ – спектр эталонной матрицы $\tilde{F}$, заданной последовательностью $\mu = \{\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_n\}$, в которой интервальные числа $\tilde{\mu}_i = [\underline{\mu}_i, \overline{\mu}_i]$ попарно различны и $\tilde{\mu}_i > 0$. Пересечение (4.2) понимается в покомпонентном смысле

$$\tilde{\lambda}_i(\tilde{A}) \cap \tilde{\lambda}_i(\tilde{F}) = \varnothing, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

для упорядоченных по возрастанию (или убыванию) собственных значений матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{F}$.

Под интервальным уравнением (4.1) понимается множество уравнений аналогичной структуры

$$AP + PF = BG \tag{4.3}$$

в которых вещественные коэффициенты $A \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, $G \in R^{m\times n}$, $F \in R^{n\times n}$ принимают всевозможные значения из заданных диапазонов $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{G}$, $\tilde{F}$:

$$\tilde{A}\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{F} = \tilde{B}\tilde{G} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{AP + PF = BG \mid \forall A \in \tilde{A},\ \forall B \in \tilde{B},\ \forall G \in \tilde{G},\ \forall F \in \tilde{F}\}$$

Объединенным множеством решений интервального матричного уравнения (4.1) будем называть множество

$$\tilde{P} = \{P \in R^{n\times n} \mid (\forall A \in \tilde{A})(\forall B \in \tilde{B})(\forall G \in \tilde{G})(\forall F \in \tilde{F})(AP + PF = BG)\} \tag{4.4}$$

Параметры $\tilde{K} \in IR^{m\times n}$ робастного регулятора в виде обратной связи по вектору состояния

$$u(x) = -\tilde{K}x \tag{4.5}$$

находятся из уравнения

$$\tilde{K}\tilde{P} = \tilde{G} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{KP = G \mid \forall G \in \tilde{G},\ \forall P \in \tilde{P}\} \tag{4.6}$$

Система (1.1), замкнутая регулятором (4.5) с параметрами

$$\tilde{K} = \{K \in R^{m\times n} \mid (\forall G \in \tilde{G})(\forall P \in \tilde{P})(KP = G)\} \quad (4.7)$$

принимает вид

$$\dot{x}(t) = (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})x(t) = \tilde{A}_C x(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.8)$$

и ее свойства определены следующей теоремой.

Теорема. Пусть

1) интервальная матричная пара $(\tilde{A}, \tilde{B})$ управляема;

2) интервальная матричная пара $(\tilde{G}, \tilde{F})$ наблюдаема;

3) выполнено условие (4.2).

Тогда управление (4.5) с параметрами (4.7) обеспечивает принадлежность спектра матрицы $\tilde{A}_C$ замкнутой системы (4.8) спектру эталонной матрицы $(-\tilde{F})$ при всех $A \in \tilde{A}$ и $B \in \tilde{B}$.

Замечание. Множество робастных регуляторов (4.5) с параметрами (4.7) можно трактовать как номинальный регулятор с допуском:

$$\tilde{K} = K_0 \pm \delta K$$

где $K_0 = \mathrm{med}\,\tilde{K} = (\overline{K} + \underline{K})/2$ – номинальные параметры, $\delta K = \mathrm{rad}\,\tilde{K} = (\overline{K} - \underline{K})/2$ – допуск на номинальные параметры.

Решение уравнения (4.1) может быть сведено к решению системы интервальных алгебраических уравнений [15]

$$\tilde{W}\tilde{p} = \tilde{e} \quad (4.9)$$

где

$$\tilde{W} = I_n \otimes \tilde{A} + \tilde{F}^T \otimes I_n = \begin{Vmatrix} \tilde{A} + \tilde{f}_{11}I_n & \tilde{f}_{21}I_n & \dots & \tilde{f}_{n1}I_n \\ \tilde{f}_{12}I_n & \tilde{A} + \tilde{f}_{22}I_n & \dots & \tilde{f}_{n2}I_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{f}_{1n}I_n & \tilde{f}_{2n}I_n & \dots & \tilde{A} + \tilde{f}_{nn}I_n \end{Vmatrix} \in IR^{n^2 \times n^2}$$

$$\tilde{p} = \mathrm{col}(\tilde{P}) \in IR^{n^2}, \quad \tilde{e} = \mathrm{col}(\tilde{E}) \in IR^{n^2}, \quad I_n = \mathrm{diag}\{1\}_1^n, \quad \tilde{E} = \tilde{B}\tilde{G}$$

$\otimes$ – прямое или кронекерово произведение матриц, $\mathrm{col}(\tilde{P}) = (\tilde{p}_{11}, \dots, \tilde{p}_{n1}, \dots$ $\dots, \tilde{p}_{1n}, \dots, \tilde{p}_{nn})^T$ – оператор развертывания матрицы $\tilde{P}$ в вектор, соответствующий упорядочению элементов по столбцам.

Для решения интервальной системы (4.9) могут быть использованы прямые и итерационные методы, изложенные, например, в работах [9, 16].

Доказательство. При выполнении условий теоремы существуют решения "точечных" уравнений Сильвестра (4.3), следовательно, существует и объединенное множество решений (4.4) интервального уравнения (4.1). Уравнение (4.1) при учете соотношения (4.6) принимает вид

$$\tilde{A}\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{F} = \tilde{B}\tilde{K}\tilde{P} \quad (4.10)$$

Если к левой и правой части уравнения (4.10) прибавить слагаемые $\mathrm{opp}(\tilde{P}\tilde{F})$ и $\mathrm{opp}(\tilde{B}\tilde{K}\tilde{P})$, то получим эквивалентное уравнение

$$\tilde{A}\tilde{P} + \mathrm{opp}(\tilde{B}\tilde{K}\tilde{P}) = \mathrm{opp}(\tilde{P}\tilde{F}) \quad (4.11)$$

Здесь opp – операция взятия противоположного элемента в полной интервальной арифметике

$$\mathrm{opp}(\tilde{a}) \overset{\mathrm{def}}{=} [-\underline{a}, -\overline{a}], \quad \tilde{a} + \mathrm{opp}(\tilde{a}) = 0$$

В силу свойства субдистрибутивности из уравнения (4.11) следует включение

$$(\tilde{A}+(-1)(\tilde{B}\tilde{K}))\tilde{P} \subseteq \tilde{A}\tilde{P}+\mathrm{opp}(\tilde{B}\tilde{K}\tilde{P})=(-1)\tilde{P}\tilde{F}$$

Пусть $\tilde{P}$ – невырожденная матрица (все точечные матрицы невырождены). Тогда последнее включение равносильно включению

$$\tilde{P}^{-1}(\tilde{A}+(-1)(\tilde{B}\tilde{K}))\tilde{P} \subseteq (-1)\tilde{F}$$

которое эквивалентно следующему утверждению: для любых $A \in \tilde{A}$ и $B \in \tilde{B}$ матрица $A_C = (A - BK)$ подобна какой-либо матрице $(-F) \in (-\tilde{F})$, т.е. $\rho(A_C) = \rho(-F)$. Так как подобие имеет место для всех $A \in \tilde{A}$ и $B \in \tilde{B}$, то справедливо включение $\rho(\tilde{A}_C) \subseteq \rho(-\tilde{F})$. Следовательно, спектр замкнутой системы является подмножеством предписываемого спектра. Что и требовалось доказать.

Предложенная методика проверки условий разрешимости интервального уравнения типа Сильвестра позволяет синтезировать регулятор, обеспечивающий робастную устойчивость систем с параметрами, которые заданы с точностью до нижних и верхних границ.

5. Пример. Пусть $n = 2$, $x = (x_1, x_2) \in R^2$, а интервальные параметры системы (1.1) таковы:

$$\tilde{A}=\begin{Vmatrix}[4,5] & 2 \\ 2 & [4,5]\end{Vmatrix}, \quad \tilde{B}=\begin{Vmatrix}[2,4] & 0 \\ 0 & [2,4]\end{Vmatrix} \tag{5.1}$$

Матрица управляемости (2.1) для рассматриваемой пары $(\tilde{A},\ \tilde{B})$ равна

$$\tilde{D}=\| \tilde{B} \,|\, \tilde{A}\tilde{B} \| = \left\Vert\begin{array}{cc|cc}[2,4] & 0 & [8,20] & [4,8] \\ 0 & [2,4] & [4,8] & [8,20]\end{array}\right\Vert$$

При определении ранга матрицы управляемости используем методику, изложенную ранее [17]. Для этого вычислим:

симметричную матрицу $\tilde{D}\tilde{D}^T=\begin{Vmatrix}[84,480] & [64,320] \\ [64,320] & [84,320]\end{Vmatrix}$, ее медиану $\mathrm{med}(\tilde{D}\tilde{D}^T)=\begin{Vmatrix}282 & 192 \\ 192 & 202\end{Vmatrix}$,

собственные значения $\lambda_1(\mathrm{med}\,\tilde{D}\tilde{D}^T)=90$, $\lambda_2(\mathrm{med}\,\tilde{D}\tilde{D}^T)=474$ и соответствующие им собственные векторы $\upsilon_1=\begin{Vmatrix}0.707 \\ -0.707\end{Vmatrix}$ и $\upsilon_2=\begin{Vmatrix}0.707 \\ 0.707\end{Vmatrix}$.

Далее по формуле (3.7) находим вектор невязки $\varepsilon_1 = 69.99$ и $\varepsilon_2 = 325.94$, а с использованием соотношения (3.6) – собственные значения ИМ $\tilde{D}\tilde{D}^T$

$$\tilde{\lambda}_1(\tilde{D}\tilde{D}^T)=[\underline{\lambda}_1,\ \overline{\lambda}_1]=[20.01,\ 159.99],\quad \tilde{\lambda}_2(\tilde{D}\tilde{D}^T)=[\underline{\lambda}_2,\ \overline{\lambda}_2]=[148.06,\ 799.94]$$

Тогда в соответствии с соотношением (3.3) сингулярные числа матрицы управляемости таковы:

$$\tilde{\sigma}_1(\tilde{D})=[\underline{\sigma}_1,\ \overline{\sigma}_1]=[4.47,\ 12.65],\quad \tilde{\sigma}_2(\tilde{D})=[\underline{\sigma}_2,\ \overline{\sigma}_2]=[12.17,\ 28.28]$$

Оба сингулярных числа матрицы управляемости принадлежат подмножеству неотрицательных интервалов и по утверждению 3 $\mathrm{rank}\,\tilde{D}=2$. Следовательно, система (1.1) при данных параметрах управляема, а запас управляемости (3.8) равен

$$\mu(\tilde{A},\ \tilde{B})=\min\{4.47,\ 12.65\}=4.47$$

Выберем

$$\tilde{F}=\begin{Vmatrix}[20,\ 25] & 0 \\ 0 & [20,\ 25]\end{Vmatrix}, \quad \tilde{G}=\begin{Vmatrix}[12,\ 15] & 1 \\ 1 & [12,\ 15]\end{Vmatrix}$$

Решая уравнение Сильвестра (4.1), находим

$$\tilde{P} = \begin{Vmatrix} [1,\ 2] & 0 \\ 0 & [1,\ 2] \end{Vmatrix}$$

а из уравнения (4.6) определяем параметры регулятора (4.5)

$$\tilde{K} = \begin{Vmatrix} [12,\ 7.5] & [1,\ 0.5] \\ [1,\ 0.5] & [12,\ 7.5] \end{Vmatrix}$$

Тогда система (1.1), замкнутая данным регулятором, принимает вид

$$\dot{x} = \tilde{A}_C x = (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})x = \begin{Vmatrix} [-20,\ -25] & [0] \\ [0] & [-20,\ -25] \end{Vmatrix} x$$

Собственные значения матрицы замкнутого контура, равные

$$\tilde{\lambda}_{1,2}(A_C) = [\underline{\lambda},\ \overline{\lambda}] = [-20,\ -25]$$

расположены в левой полуплоскости при всех значениях параметров (5.1) из заданных интервалов, что свидетельствует о робастной устойчивости системы с синтезированным регулятором.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калман Р.Е.* Об общей теории систем управления // Теория дискретных, оптимальных и самонастраивающихся систем: Тр. I Междунар. конгр. ИФАК. М.: Изд-во АН СССР. 1961. Т. 2. С. 521–547.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
3. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976. 424 с.
4. *Paige C.C.* Properties of numerical algorithms related to computing controllability // IEEE Trans. Automat. Contr. 1981. V. 26. № 1. P. 130–138.
5. *Kaucher E.* Interval analysis in the extended interval space IR // Comput. Suppl. 1980. V. 2. P. 33–49.
6. *Лакеев А.В.* Существование и единственность алгебраических решений интегральных линейных систем в полной арифметике Каухера // Вычислительные технологии. 1999. Т. 4. № 4. С. 33–44.
7. *Horn R.A., Johnson Ch.R.* Matrix Analysis. Cambridge: Univ. Press, 1986. = *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
8. *Добронец Б.С., Шайдуров В.В.* Двусторонние численные методы. Новосибирск: Наука, 1990. 208 с.
9. *Шарый С.П.* Алгебраический подход во "внешней задаче" для интервальных линейных систем // Вычислительные технологии. 1998. Т. 3. № 2. С. 67–114.
10. *Зубов В.И.* К теории аналитического построения регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1963. Т. 24. № 8. С. 1037–1041.
11. *Кириллова Ф.М.* К задаче об аналитическом конструировании регуляторов // ПММ. 1961. Т. 25. Вып. 3. С. 433–439.
12. *Красовский Н.Н.* Об аналитическом конструировании оптимальных регуляторов в системе с запаздыванием времени // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 39–51.
13. *Летов А.М.* Аналитическое конструирование регуляторов. I–V // Автоматика и телемеханика. 1960. Т. 21. № 4. С. 436–441; № 5. С. 561–568; № 6. С. 661–665; 1961. Т. 22. № 4. С. 425–435; 1962. Т. 23. № 11. С. 1405–1413.
14. *Bhattacharyya S.P., de Souza E.* Pole assignment via Sylvester equation // Syst. Contr. Letters. 1982. V. 1. № 4. P. 261–263.
15. *Шашихин В.Н., Шилов Е.В.* Интервальная стабилизация объектов с параметрической неопределенностью // Сборник научных трудов СПбГТУ. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. С. 64–73.
16. *Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.* Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 221 с.
17. *Шашихин В.Н.* Синтез робастного управления для интервальных крупномасштабных систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1997. № 12. С. 164–174.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
10.XII.2001