УДК 531.36:534

© 2002 г. Г.А. Леонов

О ЛОКАЛИЗАЦИИ АТТРАКТОРОВ УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА

Предлагается метод локализации аттракторов уравнения Льенара, основанный на построении специальных кусочно-линейных разрывных систем сравнения.

В последнее десятилетие вновь возрос интерес к классической проблеме эффективной локализации аттракторов уравнения Льенара и различных его обобщений [1–3]. Следует отметить, что традиционный подход к локализации аттракторов уравнения Льенара [4–6], основанный на применении прямого метода Ляпунова, достаточно трудоемкий. Получаемые на этом пути локализационные оценки оказываются слишком грубыми, вследствие чего, как правило, устанавливаются лишь факты существования глобальных аттракторов.

Ниже продолжается развитие методов локализации аттракторов уравнения Льенара, начатое ранее [7–9] и основанное на построении специальных кусочно-линейных разрывных систем уравнения. Такие разрывные системы изучались [10] в связи с задачей о флаттере. Введение этих систем как систем сравнения позволяет, с одной стороны, сделать доказательства локализационных теорем существенно проще, чем в известных схемах [4–6], с другой – для сравнения Ван-дер-Поля предлагаемый подход дает лучшие, чем предложенные ранее [1–3] оценки "амплитуды" предельного цикла. Универсальность построения рассматриваемых здесь систем сравнения позволяет вводить различные варьируемые параметры, улучшающие локализационные теоремы [7–9].

Рассмотрим систему

$$dy/dt = -\mu[F(y) - E(t)] - x, \quad dx/dt = y \tag{1}$$

где $F(y)$, $E(t)$ – удовлетворяющие условию Липшица функции, μ – положительное число.

В дальнейшем будем полагать, что для некоторых положительных чисел α и k выполнено неравенство

$$(F(y) - E(t))/y > (\alpha y - k\operatorname{sign} y)/y, \quad \forall t \in \mathbb{R}^1, \quad \forall y \neq 0 \tag{2}$$

Предположение (2) достаточно естественно и традиционно для системы Льенара (1) [4–6].

Рассмотрим вначале случай $\alpha\mu \geqslant 2$. Здесь введем в рассмотрение положительную полутраекторию системы

$$dy/dt = -\mu\alpha y - x + \mu k, \quad dx/dt = y \tag{3}$$

с начальными данными $y(0) = 0$, $x(0) = -\mu k$ и положительную полутраекторию системы

$$dy/dt = -\mu\alpha y - x - \mu k, \quad dx/dt = y \tag{4}$$

с начальными данными $y(0) = 0$, $x(0) = \mu k$.

Этим траекториям отвечают решения $G_1(x, \mu k)$ и $G_2(x, \mu k)$ соответственно уравнения первого порядка

$$GdG/dx = -\mu\alpha G - x + \mu k \tag{5}$$

$$GdG/dx = -\mu\alpha G - x - \mu k \tag{6}$$

В дальнейшем будем рассматривать множество

$$\Omega(\alpha,k)=\{x\in[-\mu k,\mu k],\quad G_2(x,\mu k)\leqslant y\leqslant G_1(x,\mu k)\}$$

В случае $\alpha\mu<2$ введем множество $\Omega(\alpha, k)$ несколько иным образом.

Известно [10], что система

$$dy/dt=-\mu\alpha y-x+\mu k\operatorname{sign}y,\quad dx/dt=y \tag{7}$$

имеет единственный предельный цикл $x(t)$, $y(t)$ с начальными данными $x(0)=\rho$, $y(0)=0$. Здесь

$$\rho=\frac{1+\exp(-\lambda\pi/\omega)}{1-\exp(-\lambda\pi/\omega)}\mu k,\quad \lambda=\frac{\alpha\mu}{2},\quad \omega=\sqrt{1-\lambda^2}$$

Решение разрывной системы (7) определяется по А.Ф. Филиппову [11]. Части предельного цикла, расположенного в фазовом полупространстве $\{x\geqslant 0\}$, соответствует решение $G_1(x,\rho)$ уравнения (5). Решение $G_2(x,\rho)$ уравнения (6) соответствует части предельного цикла, расположенного в полупространстве $\{x\leqslant 0\}$.

Напомним, что множество

$$\Phi(t,t_0)=\left\|\begin{matrix}x(t,t_0,\Phi_0)\\ y(t,t_0,\Phi_0)\end{matrix}\right\|,\quad \Phi(t_0,t_0)=\Phi_0$$

называется глобально притягивающим, если для любых чисел $\varepsilon>0$, $x_0\in\mathbb{R}^1$, $y_0\in\mathbb{R}^1$ существует число $T(\varepsilon,x_0,y_0)$, такое, что решение $x(t,t_0,x_0,y_0)$, $y(t,t_0,x_0,y_0)$ содержится в ε-окрестности множества $\Phi(t,t_0)$ при $t\geqslant T(\varepsilon,x_0,y_0)$.

Будем называть множество $\Phi(t, t_0)$ минимальным глобально притягивающим множеством, если никакое истинное подмножество $\Phi(t, t_0)$ не обладает свойством глобального притягивания.

Будем называть глобальным аттрактором системы (1) ее минимальное глобально притягивающее множество $\Phi(t, t_0)$.

Определим множество

$$\Omega(\alpha,k)=\{x\in[-\rho,\rho],\quad G_2(x,\rho)\leqslant y\leqslant G_1(x,\rho)\}$$

Теорема 1. Глобальный аттрактор $\Phi(t, t_0)$ системы (1) содержится в множестве $\Omega(\alpha,k)$.

Доказательство. Пусть неравенство (2) выполнено для некоторого $\alpha>0$ и $k=k_0$. Очевидно, что оно выполнено также и для всех $k\geqslant k_0$. Но тогда для любой точки (x_0, y_0) множества $\mathbb{R}^2\setminus\Omega(\alpha,k_0)$ существует число $k\geqslant k_0$, такое, что (x_0, y_0) принадлежит границе $\Omega(\alpha, k)$. Таким образом, имеем семейство замкнутых кривых, покрывающих множество $\mathbb{R}^2\setminus\Omega(\alpha,k_0)$.

Покажем, что все эти кривые всюду за исключением точек $\{y=0,\ x\in\mathbb{R}^1\}$ бесконтактны и траектории системы (1) "прошивают" эти кривые снаружи внутрь. Для этого воспользуемся принципом сравнения Чаплыгина–Камке [12–15] и неравенством (2). Получим

$$dy/dx=(-\mu(F(y)-E(t))-x)/y<(-\mu(\alpha y-k\operatorname{sign}y)-x)/y,\quad \forall x\in\mathbb{R}^1,\quad \forall y\neq 0,\quad \forall t\in\mathbb{R}^1$$

Из принципа сравнения следует, что решения $G_j(x)$, которые соответствуют траекториям системы

$$dy/dt=-\mu(\alpha y-k\operatorname{sign}y)-x,\quad dx/dt=y$$

и решения $y(t), x(t)$ системы (1) обладают следующим свойством в точке $t=t_0$, $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)=G_j(x_0)\neq 0$:

$$dy/dx<dG_j/dx$$

Отсюда следует требуемая бесконтактность кривых $y = G_j(x)$ по отношению к векторному полю системы (1). Из бесконтактности почти всюду этого семейства кривых и следует утверждение теоремы.

Следствие 1. Глобальный аттрактор системы (1) содержится в множестве

$$\Omega_0 = \bigcap_{\alpha,k} \Omega(\alpha,k)$$

где пересечение берется по всем параметрам α и k, удовлетворяющим условию (2).

Предположим теперь, что вместо неравенства (2) выполнены условия

$$(F(y)-E(t))/y > (\alpha y - k\,\mathrm{sign}\,y)/y, \quad \forall t \in \mathbb{R}^1, \quad \forall y \in \{|y| \geqslant \gamma\} \qquad (8)$$

$$(F(y)-E(t))/y > \nu\,\mathrm{sign}\,y/y, \quad \forall t \in \mathbb{R}^1, \quad \forall y \in \{|y| \leqslant \gamma\} \qquad (9)$$

Здесь ν и γ – некоторые числа, $\nu < 0$. В этом случае вместо уравнений сравнения (5) и (6) вводим следующее уравнение:

$$FdF/dx = -f(F) - x \qquad (10)$$

$$f(F) = \begin{cases} \mu\alpha F - k\mu, & F \geqslant \gamma \\ \mu\nu, & F \in (0,\gamma) \\ -\mu\nu, & F \in (-\gamma, 0) \\ \mu\alpha F + k\mu, & F \leqslant -\gamma \end{cases}$$

Рассмотрим решения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ уравнения (10), расположенные соответственно в полуплоскостях $\{F \geqslant 0\}$ и $\{F \leqslant 0\}$ с начальными данными $F_i(\rho) = F_i(-\rho) = 0$ $(i = 1, 2)$. Здесь ρ – некоторое число.

Ясно, что эти решения соответствуют предельному циклу системы

$$dy/dt = -f(y) - x, \quad dx/dt = y$$

с начальными данными $y(0) = 0$, $x(0) = \rho$. Можно показать, что такой предельный цикл является единственным.

Теорема 2. Глобальный аттрактор $\Phi(t, t_0)$ системы (1) содержится в множестве

$$\psi(\alpha,k,\nu) = \{x \in [-\rho,\rho], \quad F_2(x) \leqslant y \leqslant F_1(x)\}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Следствие 2. Глобальный аттрактор системы (1) содержится в множестве

$$\Psi_0 = \bigcap_{\alpha,k,\nu} \Psi(\alpha,k,\nu)$$

Рассмотрим теперь уравнение Ван-дер-Поля, т.е. случай, когда

$$E(t) = 0, \quad F(y) = y^3/3 - y$$

Здесь условие (2) выполнено, если

$$k = 2(\alpha+1)^{3/2}/3 + \varepsilon \qquad (11)$$

где ε – любое положительное число. Полагая далее $\alpha = 2/\mu$, получим, что множество Ω_0 расположено в полосе

$$\{|x| \leqslant M, \quad y \in \mathbb{R}^1\}, \quad M = 2\mu(2/\mu+1)^{3/2}/3 \qquad (12)$$

Ясно также, что при $\mu\alpha \geqslant 2$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} &G_1(x,\mu k) \leqslant (\varkappa + \mu k)/(\mu\alpha), \quad \forall x \in [-\varkappa, \mu k] \\ &G_2(x,\mu k) \geqslant -(\varkappa + \mu k)/(\mu\alpha), \quad \forall x \in [-\mu k, \varkappa] \end{aligned} \qquad (13)$$

где $\varkappa$ – некоторое положительное число. Используя оценки (12) и (13), получим включение

$$\Omega_0 \subset \{|x| \leqslant M, \quad |y| \leqslant N\}, \qquad N = (\mu k + M)/(\mu\alpha) \tag{14}$$

Величину N можно заменить на

$$N = \min_{\alpha \geqslant 2/\mu} 2((\alpha+1)^{3/2} + (2/\mu+1)^{3/2})/(3\alpha) \tag{15}$$

Предполагая, что $\mu \geqslant 2/3$, и выбирая $\alpha = 3$, получим

$$N = 16/9 + 2(2/\mu+1)^{3/2}/9$$

Рассматривая случай $\alpha\mu < 2$ и учитывая условие (11), получим

$$\Omega_0 \subset \left\{ |x| \leqslant \frac{2\mu}{3} \min_{\alpha \in (0,2/\mu)} \left[(\alpha+1)^{3/2} \frac{1+\exp(-\lambda\pi/\omega)}{1-\exp(-\lambda\pi/\omega)} \right] \right.$$

$$\left. |y| \leqslant \frac{4\mu}{3} \min_{\alpha \in (0,2/\mu)} \left[(\alpha+1)^{3/2} \frac{\sqrt{\lambda^2+\omega^2}\exp(-\lambda\tau(\alpha))}{1-\exp(-\lambda\pi/\omega)} \right] \right\} \tag{16}$$

$$\tau(\alpha) = \frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\lambda}$$

Таким образом, предельный цикл уравнения Ван-дер-Поля, находящийся в множестве Ω_0, может быть оценен посредством включений (14)–(16).

Применяя теорему 2 с

$$\nu = -\frac{2}{3} - \varepsilon, \quad \gamma = \frac{|R_1|R_2}{1+R_1^2}, \quad R_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2-1}, \quad R_2 = \mu k - \frac{2}{3}\mu$$

где ε – произвольное положительное число, получим

$$|\rho| \leqslant \frac{2}{3}\mu + \frac{|R_1|R_2}{\sqrt{1+R_1^2}}$$

Отсюда следует включение

$$\Psi_0 \subset \{|x| \leqslant g(\mu)\}, \quad g(\mu) = \frac{2}{3}\mu + \min_{\alpha \geqslant 2/\mu} \frac{|R_1|R_2}{\sqrt{1+R_1^2}}$$

Таким образом, для предельного цикла $x(t)$, $y(t)$ рассматриваемого уравнения Ван-дер-Поля выполнена оценка

$$|x(t)| \leqslant g(\mu), \quad \forall t \in \mathbb{R}^1 \tag{17}$$

Рассмотрим теперь для уравнения Ван-дер-Поля еще одну систему сравнения с $\nu = -2/3 - \varepsilon$ и параметром γ, удовлетворяющим равенствам

$$\left[(g(\mu) + 2/3\,\mu)^2 - \gamma^2\right]^{1/2} + R_2 = \alpha\mu\gamma \quad \text{при } R_2 \leqslant \alpha\mu(g(\mu) + 2/3\,\mu) \tag{18}$$

$$\gamma = g(\mu) + 2/3\,\mu \quad \text{при } R_2 > \alpha\mu(g(\mu) + 2/3\,\mu) \tag{19}$$

Из соотношений (17)–(19) следует оценка

$$|y(t)| \leqslant \min_{\alpha \geqslant 2/\mu} \gamma, \quad \forall t \in \mathbb{R}^1 \tag{20}$$

Равенство (18) можно записать в виде

$$\gamma = \frac{\alpha\mu R_2 + [(1+\alpha^2\mu^2)(g(\mu)+2/3\,\mu)^2 - R_2^2]^{1/2}}{1+\alpha^2\mu^2} \tag{21}$$

Оценка (19)–(21) точнее, чем оценка (14). В частности,

$$g(\mu) \leqslant \frac{2}{3}\mu(1+R_3), \quad R_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1+\frac{2}{\mu}\right)^{3/2} - 1\right]$$

Поэтому при $\mu \geqslant 2/3$ и $\alpha = 3$ из равенства (21) получим оценку

$$\min_{\alpha \geqslant 2/\mu} \gamma \leqslant \frac{\mu^2}{1+9\mu^2}\left[14 + \left\{\left(\frac{4}{9\mu^2}+4\right)(2+R_3)^2 - \frac{196}{9\mu^2}\right\}^{1/2}\right]$$

Ниже приведены оценки y_{max} максимального значения $\max|y(t)|$ предельного цикла по координате y, полученные с помощью включений (16) и (20) (при $0.1 \leqslant \mu \leqslant 0.6$ использовалась оценка (16), а при $0.7 \leqslant \mu \leqslant 100$ – оценка (20); величина $\max|y(t)|$ получена Одани [3] с помощью компьютерного эксперимента)

μ	0.1	0.5	0.6	0.7	1
y_{max}	2.207	2.253	2.273	2.263	2.200
$\max\lvert y(t)\rvert$	2.00010				2.00862
μ	2	5	10	14	100
y_{max}	2.123	2.060	2.032	2.0234	2.003
$\max\lvert y(t)\rvert$	2.01989	2.02151	2.01429		

Заметим, что имеются следующие оценки $\max|y(t)|$ при всех $\mu \in (0, +\infty)$: $\max|y(t)| < 2.8025$ [1], $\max|y(t)| < 2.5425$ [2], $\max|y(t)| < 2.3439$ [3]. Таким образом, результаты, полученные с помощью оценок (16) и (20), лучше этих оценок.

Одани [3] высказана гипотеза, что при любых $\mu > 0$ справедлива оценка

$$|y(t)| \leqslant 2.0235$$

Из оценки (20) следует, что эта гипотеза верна для $\mu \geqslant 14$. Для доказательства ее справедливости при любых $\mu > 0$ с помощью предложенного здесь подхода необходимо построение при $\mu \in (0, 14)$ более сложных кусочно-линейных систем сравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Alsholm P.* Existence of limit cycles for generalized Liénard equations // J. Math. Anal. Appl. 1992. V. 171. № 1. P. 242–255.
2. *Odani K.* Existence of exactly *N* periodic solutions for Liénard systems // Funkcialaj Ekvacioj. 1996. V. 39. № 2. P. 217–234.
3. *Odani K.* On the limit cycle of the van der Pol equation. Preprint. http: \\ www.auemath.aichi-edu.ac.jp.
4. *Lefschetz S.* Differential Equations: Geometric Theory. N. Y.; L.: Interscience, 1957. = *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 387 с.
5. *Cesari L.* Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations. Springer. Berlin, 1959. = *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 477 с.
6. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. М.; Л.: Наука, 1964. 367.
7. *Леонов Г.А.* Колебания в системах с нелинейным демпфированием // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 183–184.

8. *Леонов Г.А.* Локализация аттракторов неавтономного уравнения Льенара методом разрывных систем сравнения // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 2. С. 332–336.
9. *Леонов Г.А.* Оценка снизу числа циклов двумерных динамических систем // Вестн. СПб. ун-та. Сер. Математика, механика, астрономия. 1994. № 1. С. 42–46.
10. *Келдыш М.В.* Механика. Избр. тр. М.: Наука, 1985. 567 с.
11. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978. 400 с.
12. *Чаплыгин С.А.* Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1950. 103 с.
13. *Kamke E.* Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen II // Acta Math. 1932. Bd 58. S. 57–85.
14. *Leonov A.G., Reitmann V., Smirnova V.B.* Nonlocal methods for pendulum-like feedback systems // Teubner-texte zur Mathematik. 1992. Bd. 132. 242 s.
15. *Белых В.Н.* Анализ непрерывных СФС методом двумерных систем сравнения // Системы фазовой синхронизации / Под ред. В.В. Шахгильдяна и Л.Н. Белюстиной. М.: Радио и связь, 1982. С. 45–55.

Санкт-Петербург
e-mail: leonov@math.spbu.ru

Поступила в редакцию
18.I.2000