

УДК 531.36:534.1

© 2002 г. О.Н. Кириллов, А.П. Сейранян

**ПЕРЕСТРОЙКИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КРИВЫХ
В ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ СИСТЕМАХ**

Выведены явные формулы, описывающие типичные перестройки характеристических кривых в циркуляционных системах, зависящих от вектора параметров. Полученные формулы используют информацию о системе лишь в точке слияния кривых и позволяют не только качественно, но и количественно проанализировать поведение частот колебаний в окрестности этой точки. Найдены квадратичные аппроксимации областей флаттера и дивергенции, и установлена связь между свойствами выпуклости этих областей и типом перестройки характеристических кривых.

В циркуляционных системах, зависящих от параметров, нередко наблюдается явление перехлеста характеристических кривых [1–5]. Оно состоит в том, что кривые зависимости собственных значений линейного оператора системы от одного выделенного параметра, часто параметра неконсервативной нагрузки, при изменении других параметров системы сближаются, сливаются в некоторой точке, а затем перестраиваются с образованием замкнутой кривой комплексных собственных значений – "пузырька неустойчивости". Ниже дается описание этого феномена.

1. Постановка задачи. Рассмотрим колебания линейной автономной неконсервативной механической системы при отсутствии демпфирующих и гироскопических сил

$$M\ddot{q} + Cq = 0 \quad (1.1)$$

где $M = M^T > 0$ и $C \neq C^T$ – вещественные $(m \times m)$ -матрицы инерционных коэффициентов и неконсервативных позиционных сил, q – вектор обобщенных координат размерности m , точкой обозначено дифференцирование по времени t . Система (1.1) часто называется циркуляционной [6, 7]. Отыскивая решения системы (1.1) в виде $q = ue^{i\omega t}$, где ω – частота колебаний, и используя обозначения $A = M^{-1}C$, $\lambda = \omega^2$, приходим к задаче на собственные значения

$$Au = \lambda u \quad (1.2)$$

Обратная матрица M^{-1} существует в силу симметричности и положительной определенности матрицы M . Несимметричность матрицы C сказывается в том, что матрица A в (1.2) оказывается также несимметрической. Это означает, что спектр задачи (1.2) может содержать комплексные собственные значения (СЗ) λ .

Система (1.1) устойчива, если все СЗ задачи (1.2) положительны и число собственных векторов (СВ), отвечающих каждому λ , равно алгебраической кратности λ как корня характеристического уравнения. Иначе говоря, каждому положительному СЗ соответствуют простые элементарные делители. Если все λ вещественные, причем некоторые из них отрицательные, то система (1.1) статически неустойчива (дивергенция). Наличие комплексных СЗ λ означает колебательную неустойчивость (флаттер).

Будем считать, что матрицы M и C , а значит и A , гладко зависят от вектора параметров $p \in \mathbb{R}^n$. Известно [8–10], что в случае общего положения гладкие участки границы области устойчивости (ГОУ) циркуляционной системы состоят из поверхностей соразмерности 1, в точках которых матрица A содержит либо простое нулевое СЗ, либо положительное двукратное СЗ с цепочкой Жордана длины 2, причем все остальные СЗ λ – положительные и простые. Вообще говоря, ГОУ не является гладкой и может иметь особенности более высокой коразмерности, отвечающие матрицам с более сложной структурой жордановой нормальной формы [8, 10].

Как правило, ГОУ системы, зависящей от многих параметров, не может быть найдена явно, а численное решение оказывается трудоемким. Между тем существуют задачи, где требуется определять критическое значение лишь какого-либо одного параметра p_j ($1 \leq j \leq n$) при фиксированных p_s ($s \neq j$). В таких случаях интересуются зависимостями СЗ или частот колебаний от этого параметра, рассматривая их в пространстве $(\operatorname{Re} \lambda, \operatorname{Im} \lambda, p_j)$ или $(\operatorname{Re} \omega, \operatorname{Im} \omega, p_j)$ [1–5]. Зависимость $\lambda(p_j)$ будем называть *характеристической кривой* (ХК), а зависимость $\omega(p_j)$ – *частотной кривой* (ЧК).

В случае общего положения кривые $\lambda(p_j)$ и $\omega(p_j)$ либо лежат в вещественной плоскости, либо находятся вне ее, отвечая комплексным СЗ или частотам. При этом выход λ или ω из вещественной плоскости сопровождается столкновением с другим СЗ или частотой и образованием двукратного СЗ λ или частоты ω с цепочкой Жордана длины 2. Если параметр p_j перемещается из области устойчивости в область дивергенции, то ХК лишь меняет знак, оставаясь в вещественной плоскости, в то время как ЧК переходит из вещественной плоскости на мнимую через образование двукратной нулевой частоты с цепочкой Жордана длины 2 [9]. Изменение параметров p_s ($s \neq j$) приводит к деформации ХК $\lambda(p_j)$ и ЧК $\omega(p_j)$. Получающиеся при этом семейства неустрашимым образом содержат кривые с более сложным поведением. Например, две кривые при изменении параметров могут сблизиться и сцепиться, а в дальнейшем перестроиться так, что вид их качественно изменится.

Исследуем типичные перестройки ХК и ЧК в n – параметрических циркуляционных системах вблизи гладких участков ГОУ.

Теорема 1. Пусть $\lambda(p_j)$ – ХК системы (1.1). Если в неособой точке границы между областями устойчивости и дивергенции $p_0 = (p_{0,1}, \dots, p_{0,n})^T$ матрица $A(p_0)$ содержит простое СЗ $\lambda_0 = 0$ с правым u_0 и левым v_0 СВ, $\lambda(p_{0,j}) = 0$ и выполняется условие

$$v_0^T A_{,j} u_0 |_{p=p_0} = 0, \quad A_{,j} = \partial A / \partial p_j \quad (1.3)$$

то поведение ХК $\lambda(p_j)$ в окрестности точки $(\operatorname{Re} \lambda_0, \operatorname{Im} \lambda_0, p_{0,j})$ описывается уравнением

$$\Delta \lambda + [v_0^T A_{,j} G_0 A_{,j} u_0 - \frac{1}{2} v_0^T A_{,jj} u_0] \Delta p_j^2 = \sum_{s=1, s \neq j}^n v_0^T A_{,s} u_0 \Delta p_s \quad (1.4)$$

$$\Delta \lambda = \lambda - \lambda_0, \quad \Delta p_k = p_k - p_{0,k}, \quad G_0 = [A(p_0) - \lambda_0 I - \bar{v}_0 v_0^T]^{-1}, \quad A_{,jj} = \partial^2 A / \partial p_j^2$$

где I – единичная матрица.

Теорема 2. Пусть $\lambda'(p_j)$ и $\lambda''(p_j)$ – две ХК системы (1.1). Если в неособой точке границы между областями устойчивости и флаттера $p_0 = (p_{0,1}, \dots, p_{0,n})^T$ матрица $A(p_0)$ содержит двукратное СЗ $\lambda_0 > 0$, которому соответствуют правая u_0, u_1 и левая v_0, v_1 жордановы цепочки векторов, $\lambda'(p_{0,j}) = \lambda''(p_{0,j}) = \lambda_0$, и выполняется условие (1.3), то в окрестности точки $(\operatorname{Re} \lambda_0, \operatorname{Im} \lambda_0, p_{0,j})$ происходят перестройки этих ХК, описываемые уравнением

$$\left(\Delta \lambda - \frac{1}{2} [v_1^T A_{,j} u_0 + v_0^T A_{,j} u_1] \Delta p_j \right)^2 - \left(\frac{1}{4} [v_1^T A_{,j} u_0 + v_0^T A_{,j} u_1]^2 - v_0^T \left[A_{,j} G_0 A_{,j} - \frac{1}{2} A_{,jj} \right] u_0 \right) \Delta p_j^2 = \sum_{s=1, s \neq j}^n v_0^T A_{,s} u_0 \Delta p_s \quad (1.5)$$

Формулы, задающие поведение соответствующих ЧК, получаются из соотношений (1.4), (1.5) заменой $\lambda = \omega^2$.

Доказательство теорем 1 и 2 будет дано в разделе 4 на основе теории возмущений СЗ несамосопряженных операторов.

2. Возмущения собственных значений. Пусть в точке $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^n$ спектр матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{p}_0)$ содержит СЗ λ_0 . Выпустим из точки \mathbf{p}_0 гладкую однопараметрическую кривую $\mathbf{p}(\varepsilon)$, $\varepsilon \geq 0$, и разложим функцию $\mathbf{p}(\varepsilon)$ в ряд Тейлора в окрестности $\varepsilon = 0$ (штрихом обозначена производная по ε)

$$\mathbf{p}(\varepsilon) = \mathbf{p}_0 + \varepsilon \mathbf{p}' + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \mathbf{p}'' + o(\varepsilon^2) \quad (2.1)$$

В силу гладкой зависимости матрицы \mathbf{A} от вектора параметров функция $\mathbf{A}(\mathbf{p}(\varepsilon))$ также представляется в виде ряда

$$\mathbf{A}(\mathbf{p}(\varepsilon)) = \mathbf{A}(\mathbf{p}_0) + \varepsilon \sum_{s=1}^n \mathbf{A}_{,s} p'_s + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\sum_{s=1}^n \mathbf{A}_{,s} p''_s + \sum_{s,t=1}^n \mathbf{A}_{,st} p'_s p'_t \right) + o(\varepsilon^2) \quad (2.2)$$

Производные матрицы \mathbf{A} по параметрам берутся в точке \mathbf{p}_0 и могут быть выражены через соответствующие производные матриц \mathbf{M} и \mathbf{C} . Так, например,

$$\mathbf{A}_{,s} = \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{C}_{,s} - \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{M}_{,s} \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{C}_0, \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}(\mathbf{p}_0), \quad \mathbf{C}_0 = \mathbf{C}(\mathbf{p}_0)$$

Обозначим через \mathbf{A}_k коэффициент при ε^k в разложении (2.2) и определим векторы

$$\mathbf{e} = \mathbf{p}'|_{\varepsilon=0}, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathbf{p}''|_{\varepsilon=0}; \quad \mathbf{e}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \quad (2.3)$$

Тогда

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(\mathbf{p}_0), \quad \mathbf{A}_1 = \sum_{s=1}^n \mathbf{A}_{,s} e_s, \quad \mathbf{A}_2 = \sum_{s=1}^n \mathbf{A}_{,s} d_s + \frac{1}{2} \sum_{s,t=1}^n \mathbf{A}_{,st} e_s e_t \quad (2.4)$$

При вариации (2.1) вектора \mathbf{p}_0 СЗ λ_0 и СВ \mathbf{u}_0 получают приращения, которые представляются в виде рядов по целым или дробным степеням ε в зависимости от жордановой структуры, соответствующей СЗ λ_0 .

Если λ_0 – простое СЗ матрицы \mathbf{A}_0 с СВ \mathbf{u}_0 , то возмущенные СЗ λ и СВ \mathbf{u} – гладкие функции ε и могут быть представлены рядами Тейлора [11]

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \dots, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{w}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{w}_2 + \dots \quad (2.5)$$

Подставляя разложения (2.2), (2.5) в уравнение (1.2) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε , получим задачу на собственные значения (ЗСЗ) для невозмущенной матрицы \mathbf{A}_0

$$(\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I}) \mathbf{u}_0 = 0 \quad (2.6)$$

и уравнения, определяющие первую и вторую поправки к СЗ λ_0 и СВ \mathbf{u}_0 ,

$$(\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I}) \mathbf{w}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_0 - \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_0 \quad (2.7)$$

$$(\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I}) \mathbf{w}_2 = \lambda_1 \mathbf{w}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_0 - \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_0 \quad (2.8)$$

Введем скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_m \bar{b}_m$ для векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^m$. Рассмотрим наряду с задачей (2.6) сопряженную к ней ЗСЗ

$$(\mathbf{A}_0^T - \bar{\lambda}_0 \mathbf{I}) \mathbf{v}_0 = 0 \quad (2.9)$$

Подчиним вектор \mathbf{v}_0 условию нормировки

$$(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) = 1 \quad (2.10)$$

Для заданного вектора \mathbf{u}_0 условие (2.10) позволяет однозначно определить вектор \mathbf{v}_0 . Для возмущенного вектора \mathbf{u} используем условие нормировки

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0) = 1 \quad (2.11)$$

с помощью которого однозначно определяются все члены λ_i и \mathbf{w}_i в разложениях (2.5).

Для разрешимости уравнений (2.7), (2.8) необходимо и достаточно, чтобы их правые части были ортогональны решению однородной сопряженной ЗСЗ (2.9). Отсюда и из условий нормировки (2.10) и (2.11) следуют выражения для коэффициентов λ_1 и λ_2 в разложении (2.5)

$$\lambda_1 = (\mathbf{A}_1 \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0), \quad \lambda_2 = (\mathbf{A}_2 \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) + (\mathbf{A}_1 \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_0) \quad (2.12)$$

Вектор \mathbf{w}_1 находится из уравнения (2.7) с помощью оператора \mathbf{G}_0 , обратного к $\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I}$:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{G}_0 (\lambda_1 \mathbf{u}_0 - \mathbf{A}_1 \mathbf{u}_0)$$

Необходимым и достаточным условием существования обратного оператора является первое равенство (2.12). Поскольку $\det(\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I}) = 0$, матрица $(\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I})^{-1}$ не существует. В то же время оператор \mathbf{G}_0 можно представить с помощью неособой матрицы в виде [12]

$$\mathbf{G}_0 = [\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I} - \bar{\mathbf{v}}_0 \mathbf{v}_0^T]^{-1} \quad (2.13)$$

В случае, когда λ_0 – двукратное СЗ с цепочкой Жордана длины 2, существуют собственный и присоединенный векторы \mathbf{u}_0 и \mathbf{u}_1 , удовлетворяющие уравнениям

$$(\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I}) \mathbf{u}_0 = 0 \quad (\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I}) \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0 \quad (2.14)$$

а также собственный и присоединенный векторы сопряженной системы

$$(\mathbf{A}_0^T - \bar{\lambda}_0 \mathbf{I}) \mathbf{v}_0 = 0 \quad (\mathbf{A}_0^T - \bar{\lambda}_0 \mathbf{I}) \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 \quad (2.15)$$

Векторы $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1$ связаны между собой соотношениями ортогональности и нормировки

$$(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) = 0 \quad (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_0) \equiv (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_1) = 1 \quad (2.16)$$

Возмущенное при вариации вектора параметров (2.1) двукратное СЗ с цепочкой Жордана длины 2 и его СВ представляются рядами по степеням малого параметра $\varepsilon^{1/2}$ [11]

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon^{1/2} \lambda_1 + \varepsilon \lambda_2 + \varepsilon^{3/2} \lambda_3 + \dots, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon^{1/2} \mathbf{w}_1 + \varepsilon \mathbf{w}_2 + \varepsilon^{3/2} \mathbf{w}_3 + \dots \quad (2.17)$$

Вектор \mathbf{u} удобно подчинить условию нормировки

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) = 1 \quad (2.18)$$

Из условия (2.18) и разложений (2.17) имеем $(\mathbf{w}_i, \mathbf{v}_1) = 0$ ($i = 1, 2, \dots$). Подставляя выражения (2.2) и (2.17) в ЗСЗ (1.2) и приравнивая члены при одинаковых степенях ε , получим уравнения, определяющие поправки к λ_0 и \mathbf{u}_0 ,

$$(\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I}) \mathbf{w}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_0 \quad (2.19)$$

$$(\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I}) \mathbf{w}_2 = -\mathbf{A}_1 \mathbf{u}_0 + \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_0 \quad (2.20)$$

$$(\mathbf{A}_0 - \lambda_0 \mathbf{I}) \mathbf{w}_4 = -\mathbf{A}_1 \mathbf{w}_2 - \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_0 + \lambda_1 \mathbf{w}_3 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 + \lambda_3 \mathbf{w}_1 + \lambda_4 \mathbf{u}_0 \quad (2.21)$$

Из уравнения (2.19) легко следует выражение для вектора \mathbf{w}_1 , удовлетворяющего условию нормировки (2.18),

$$\mathbf{w}_1 = \lambda_1 (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0 (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)) \quad (2.22)$$

Для разрешимости уравнения (2.20) необходимо и достаточно, чтобы правая его часть была ортогональна вектору v_0 . При учете соотношений (2.16), (2.22) это условие запишем в виде

$$\lambda_1^2 = (A_1 u_0, v_0) \quad (2.23)$$

Вектор w_2 находится из уравнения (2.20) при помощи оператора G_0 из (2.13)

$$w_2 = G_0(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 u_0 - A_1 u_0) \quad (2.24)$$

Если правая часть уравнения (2.23) не равна нулю, то имеются два ненулевых решения

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{(A_1 u_0, v_0)}$$

которым отвечают векторы w_1 из соотношения (2.22).

Рассмотрим вырожденный случай

$$(A_1 u_0, v_0) = 0 \quad (2.25)$$

Тогда возмущенные СВ u и СВ λ определяются членами порядка ε , т.е. коэффициентами w_2 и λ_2 , поскольку теперь в разложениях (2.17)

$$\lambda_1 = 0, \quad w_1 = 0 \quad (2.26)$$

Чтобы найти коэффициент λ_2 , запишем условие разрешимости уравнения (2.21). С учетом условий нормировки (2.16) и условий вырождения (2.26) получим

$$\lambda_2 (w_2, v_0) - (A_1 w_2, v_0) - (A_2 u_0, v_0) = 0 \quad (2.27)$$

Умножая обе части уравнения (2.20) на v_1 , приходим к соотношению

$$(w_2, v_0) = \lambda_2 - (A_1 u_0, v_1) \quad (2.28)$$

Подставляя выражения (2.24), (2.28) в уравнение (2.27), найдем, что в случае вырождения (2.25) коэффициент λ_2 определяется квадратным уравнением

$$\lambda_2^2 - \lambda_2 [(A_1 u_0, v_1) + (A_1 u_1, v_0)] - (A_2 u_0, v_0) + (G_0(A_1 u_0), A_1^T v_0) = 0 \quad (2.29)$$

Замечание. Не обращение в нуль дискриминанта уравнения (2.29) гарантирует расщепление двукратного СВ λ_0 при вырождении (2.25). Используя явный вид решения уравнения (2.29), запишем условие расщепления в эквивалентной форме

$$2\lambda_2 \neq (A_1 u_0, v_1) + (A_1 u_1, v_0) \quad (2.30)$$

Докажем, что при одновременном выполнении условий (2.25) и (2.30) все нечетные коэффициенты λ_{2i-1} , w_{2i-1} разложений (2.17) обращаются в нуль. Доказательство проведем по индукции. Действительно, в силу соотношений (2.26) при $i = 1$ имеем $\lambda_1 = 0$, $w_1 = 0$. Пусть теперь для некоторого целого $k > 1$ справедливы равенства

$$\lambda_{2i-1} = 0, \quad w_{2i-1} = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (2.31)$$

Рассмотрим уравнения, получающиеся приравниванием слагаемых при степенях $\varepsilon^{(2k+1)/2}$ и $\varepsilon^{(2k+3)/2}$ после подстановки разложений (2.2), (2.17) в задачу (1.2),

$$(A_0 - \lambda_0 I) w_{2k+1} = - \sum_{j=1}^k A_j w_{2(k-j)+1} + \sum_{i=1}^{2k} \lambda_i w_{2k+1-i} + \lambda_{2k+1} u_0 \quad (2.32)$$

$$(A_0 - \lambda_0 I) w_{2k+3} = - \sum_{j=1}^{k+1} A_j w_{2(k-j)+3} + \sum_{i=1}^{2k+2} \lambda_i w_{2k+3-i} + \lambda_{2k+3} u_0$$

В силу предположения индукции (2.31) уравнения (2.32) можно упростить:

$$\begin{aligned} (A_0 - \lambda_0 I)w_{2k+1} &= \lambda_{2k+1}u_0 \\ (A_0 - \lambda_0 I)w_{2k+3} &= -A_1 w_{2k+1} + \lambda_2 w_{2k+1} + \lambda_{2k+1} w_2 \lambda_{2k+3} u_0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Из первого уравнения (2.33) находим

$$w_{2k+1} = \lambda_{2k+1}(u_1 - u_0(u_1, v_1)) \quad (2.34)$$

Умножая обе части второго уравнения (2.33) на v_0 и используя соотношения (2.28) и (2.34), получим

$$\lambda_{2k+1}(2\lambda_2 - [(A_1 u_1, v_0) + (A_1 u_0, v_1)]) = 0 \quad (2.35)$$

Поскольку выполнено условие (2.30), из соотношений (2.35) и (2.34) имеем

$$\lambda_{2k+1} = 0, \quad w_{2k+1} = 0$$

Тем самым доказано равенство нулю всех нечетных коэффициентов в разложениях (2.17) при одновременном выполнении условий (2.25) и (2.30).

3. Квадратичная аппроксимация границы области устойчивости. Итак, имеем конструктивные формулы, позволяющие вычислять первые и вторые поправки к СЗ и СВ при возмущении неконсервативной системы через производные ее матриц по параметрам, а также через собственные и присоединенные векторы. В дальнейшем будем интересоваться лишь вещественными СЗ λ_0 , поскольку именно они определяют ГОУ. В этом случае соответствующие собственные и присоединенные векторы также можно выбрать вещественными. Определим теперь вещественные векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= (f_1, \dots, f_n), \quad \mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n); \\ f_s &= (A_{,s} u_0, v_0), \quad 2h_s = (A_{,s} u_0, v_1) + (A_{,s} u_1, v_0), \quad s = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.1)$$

а также вещественную симметрическую $(n \times n)$ -матрицу \mathbf{H} с компонентами

$$\begin{aligned} 2H_{jk} &= -(A_{,kj} u_0, v_0) + (G_0(A_{,k} u_0), A_{,j}^T v_0) + (G_0(A_{,j} u_0), A_{,k}^T v_0) \\ j, k &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.2)$$

и введем скалярное произведение $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$ векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. С учетом этих обозначений и формул (2.4) имеем

$$\begin{aligned} (A_1 u_0, v_0) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle, \quad (A_1 u_1, v_0) + (A_1 u_0, v_1) = 2\langle \mathbf{h}, \mathbf{e} \rangle \\ -(A_2 u_0, v_0) + (G_0(A_1 u_0), A_1^T v_0) &= \langle \mathbf{H}\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle - \langle \mathbf{f}, \mathbf{d} \rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

Вектор $\mathbf{f} \neq 0$ имеет простой геометрический смысл, являясь нормалью к ГОУ на гладких ее участках. Этот факт легко установить, записав с помощью выражений (3.3) коэффициенты разложений (2.5), (2.17) для простого нулевого и двукратного положительного СЗ:

$$\lambda = \langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \lambda = \lambda_0 \pm \sqrt{\langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle} \varepsilon + o(\varepsilon^{1/2}) \quad (3.4)$$

Если вектор \mathbf{e} принадлежит полупространству, задаваемому неравенством $\langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle > 0$, то при малом изменении параметров вдоль кривой $\mathbf{p}(\varepsilon)$ нулевое СЗ становится положительным, а двукратное СЗ λ_0 расщепляется на два простых положительных СЗ, что соответствует устойчивости. Если же $\langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle < 0$, то нулевое СЗ становится отрицательным (дивергенция), а двукратное СЗ λ_0 распадается на комплексно-сопряженную пару (флаттер). Следовательно, вычисленный в неособой точке \mathbf{p}_0 ГОУ вектор \mathbf{f} (3.1) направлен в область устойчивости (S) по нормали к границе (фиг. 1). Сама же ГОУ в окрестности точки \mathbf{p}_0 аппроксимируется в первом приближении своей касательной плоскостью

$$\langle \mathbf{f}, \Delta \mathbf{p} \rangle = 0, \quad \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0 \quad (3.5)$$

Формулы (3.4) справедливы при условии $\langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle \neq 0$, означаящем, что кривая $\mathbf{p}(\varepsilon)$ трансверсальна ГОУ. В однопараметрическом семействе матриц $\mathbf{A}(\mathbf{p}(\varepsilon))$ это случай общего положения, для которого поведение ХК $\lambda(\varepsilon)$, описываемое формулами (3.4), является характерным [9].

Геометрический смысл вектора \mathbf{h} и матрицы \mathbf{H} , определенных равенствами (3.1), (3.2), связан с квадратичной аппроксимацией области устойчивости. Чтобы установить его, рассмотрим кривые

$$\mathbf{p}(\varepsilon) = \mathbf{p}_0 + \varepsilon \mathbf{e}_* + \varepsilon^2 \mathbf{d} + o(\varepsilon^2) \quad (3.6)$$

касающиеся ГОУ при $\varepsilon = 0$, так что выполняется условие ортогональности

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{e}_* \rangle = 0 \quad (3.7)$$

Пусть \mathbf{p}_0 – точка на границе между областями устойчивости и дивергенции. Изучим поведение простого нулевого СЗ, определяющего эту границу, вдоль такой кривой. В силу условия (3.7) коэффициент λ_1 ряда (2.5) обращается в нуль, и разложение возмущенного СЗ начинается с члена порядка ε^2 . Преобразовывая правую часть выражения (2.12) для λ_2 с помощью соотношений (2.3), (3.3), запишем формулу приращения простого нулевого СЗ в виде

$$\lambda = \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}, \mathbf{p}'' \rangle \varepsilon^2 - \langle \mathbf{H} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \rangle \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad (3.8)$$

Аналогично, рассматривая точку на границе между областями устойчивости и флаттера и используя соотношения (2.17), (2.26) и (2.29), найдем, что расщепление двукратного СЗ λ_0 вдоль кривых, касающихся ГОУ, определяется уравнением

$$(\lambda - \lambda_0 - \langle \mathbf{h}, \mathbf{p}' \rangle \varepsilon)^2 = \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}, \mathbf{p}'' \rangle \varepsilon^2 - \langle \mathbf{H} \mathbf{p}', \mathbf{p}' \rangle \varepsilon^2 + \langle \mathbf{h}, \mathbf{p}' \rangle^2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad (3.9)$$

Заметим, что условию (3.7) удовлетворяют и кривые, лежащие на самой границе области устойчивости. Вдоль таких кривых простое нулевое СЗ остается нулевым, а двукратное СЗ не расщепляется. Для этого необходимо, чтобы правые части выражений (3.8) и (3.9) обращались в нуль. Выписывая эти условия в явном виде и учитывая, что на рассматриваемых кривых

$$\langle \mathbf{f}, \Delta \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}, \mathbf{p}'' \rangle \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad (3.10)$$

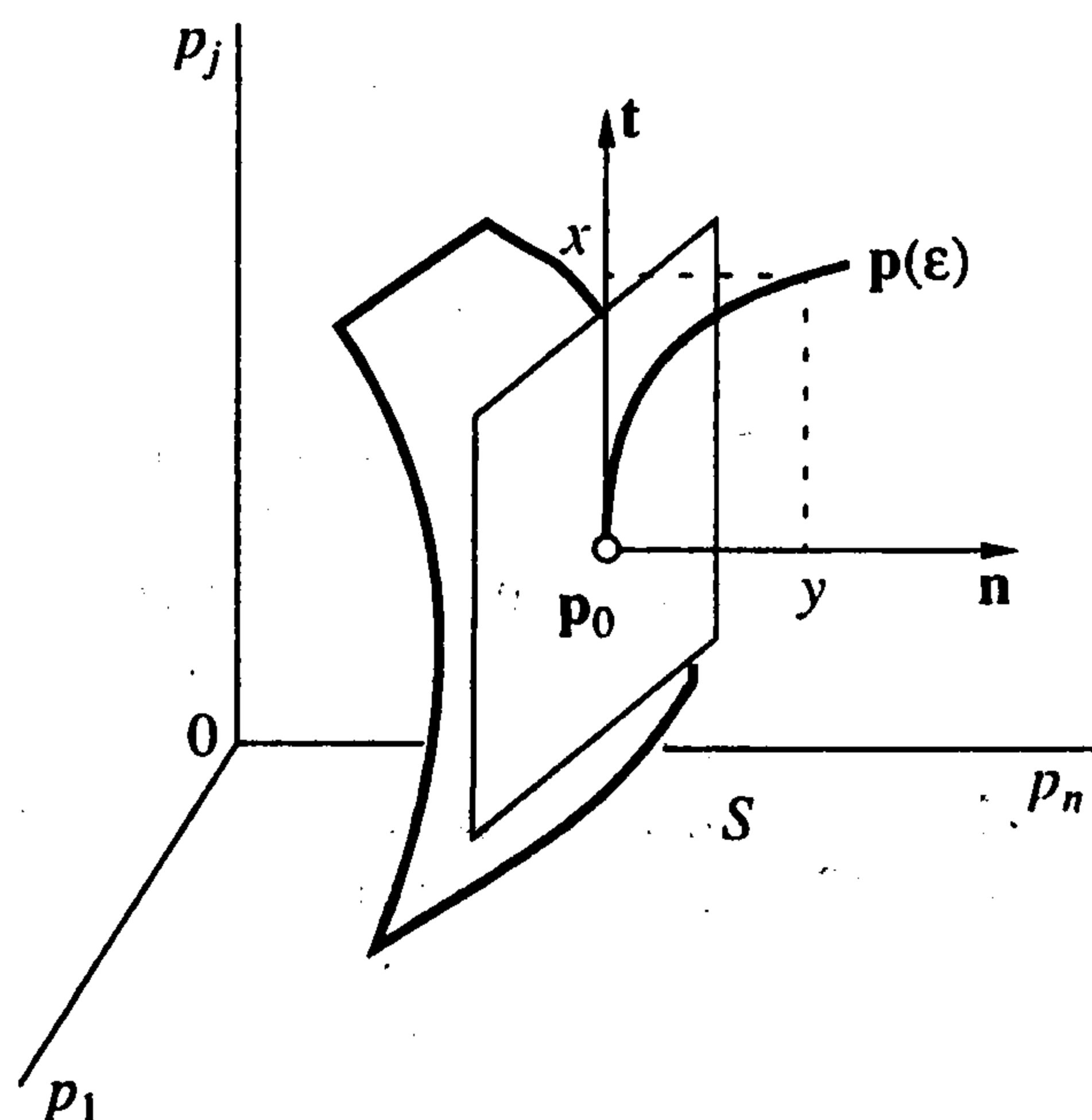
приходим к выводу, что ГОУ циркуляционной системы (1.1) в окрестности своей неособой точки описывается с точностью до членов $o(\|\Delta \mathbf{p}\|^2)$ выражением

$$F_k(\Delta \mathbf{p}) \equiv \langle \mathbf{f}, \Delta \mathbf{p} \rangle - G_k(\Delta \mathbf{p}) = 0, \quad k = 1, 2 \quad (3.11)$$

$$G_1(\Delta \mathbf{p}) = \langle \mathbf{H} \Delta \mathbf{p}, \Delta \mathbf{p} \rangle, \quad G_2(\Delta \mathbf{p}) = \langle (\mathbf{H} - \mathbf{h} \mathbf{h}^T) \Delta \mathbf{p}, \Delta \mathbf{p} \rangle$$

при $k = 1$, если область устойчивости граничит с областью дивергенции, и при $k = 2$, если она имеет общую границу с областью флаттера.

Из уравнения (3.9) вытекает, что область флаттера определяется неравенством $F_2 < 0$, а область устойчивости – соответственно неравенством $F_2 > 0$. Рассматривая векторы $\Delta \mathbf{p}$, принадлежащие касательной плоскости (3.5), из условия $F_2 > 0$ получим, что если квадратичная форма $G_2(\Delta \mathbf{p})$ отрицательно (положительно) определена на множестве (3.5), то область устойчивости вогнута (выпукла), а область флаттера



Фиг. 1

выпукла (вогнута), так как касательная плоскость принадлежит области устойчивости (флаттера). Используя уравнение (3.8) и рассуждая аналогично, можно заключить, что если квадратичная форма $G_1(\Delta p)$ отрицательно (положительно) определена на множестве (3.5), то область дивергенции выпукла (вогнута), а область устойчивости вогнута (выпукла).

В частности, если матрица \mathbf{H} , вычисленная в неособой точке p_0 ГОУ, отрицательно определена, то область устойчивости вогнута в этой точке, а область неустойчивости (флаттера или дивергенции) выпукла.

Отметим, что квадратичные аппроксимации ГОУ консервативных систем были получены ранее [13].

4. Перестройки характеристических кривых вблизи границы области устойчивости. Формулы (3.4) показывают, что происходит с СЗ матрицы неконсервативной системы (1.1) при трансверсальном пересечении ГОУ. Зададимся вопросом, как ведут себя СЗ вдоль прямой, касательной к ГОУ в неособой точке p_0 , и вообще вдоль прямых, параллельных касательной и отстоящих от ГОУ на некотором небольшом расстоянии. Ответ дается следующей леммой.

Лемма. Пусть p_0 – неособая точка на ГОУ, \mathbf{f} – вычисленный в этой точке вектор нормали (3.1), $\mathbf{n} = \mathbf{f}/|\mathbf{f}|$ – соответствующий орт, а $\mathbf{t} = \mathbf{e}_* / |\mathbf{e}_*|$ – орт произвольной касательной в точке p_0 . Тогда сечение области устойчивости плоскостью Oxy , натянутой на векторы \mathbf{n} и \mathbf{t} , с началом координат в точке p_0 описывается одним из двух неравенств

$$y > Px^2 / |\mathbf{f}|, \quad y > Qx^2 / |\mathbf{f}|$$

$$P = \langle \mathbf{H}\mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle, \quad Q = P - R^2, \quad R = \langle \mathbf{h}, \mathbf{t} \rangle \quad (4.1)$$

в зависимости от того, граничит область устойчивости с областью дивергенции или с областью флаттера. При этом поведение простого нулевого собственного значения подчиняется уравнению

$$\lambda + Px^2 = y|\mathbf{f}| + o(x^2) \quad (4.2)$$

а формула

$$(\lambda - \lambda_0 - Rx)^2 + Qx^2 = y|\mathbf{f}| + o(x^2) \quad (4.3)$$

описывает распад двукратного СЗ $\lambda_0 > 0$ с жордановой цепочкой длины 2.

Доказательство. Поведение нулевого и двукратного СЗ, определяющих ГОУ, вдоль кривых (3.6), описывается формулами (3.8) и (3.9). Кривую (3.6) в плоскости нормального и касательного векторов можно представить в виде

$$\mathbf{p}(\varepsilon) = \mathbf{p}_0 + x(\varepsilon)\mathbf{t} + y(\varepsilon)\mathbf{n} \quad (4.4)$$

где $x(\varepsilon)$ и $y(\varepsilon)$ – гладкие функции параметра ε . Согласно определению (2.3),

$$\mathbf{e}_* \equiv \mathbf{p}' = x'\mathbf{t} + y'\mathbf{n}, \quad 2\mathbf{d} \equiv \mathbf{p}'' = x''\mathbf{t} + y''\mathbf{n} \quad (4.5)$$

где все производные берутся при $\varepsilon = 0$. Из соотношений (4.5) следует, что

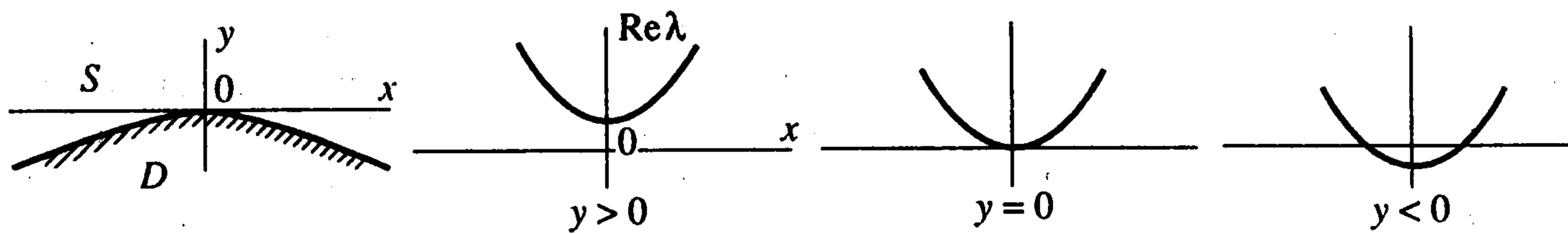
$$x'|_{\varepsilon=0} = |\mathbf{e}_*|, \quad y'|_{\varepsilon=0} = 0, \quad y''|_{\varepsilon=0} = 2\langle \mathbf{n}, \mathbf{d} \rangle \quad (4.6)$$

С учетом выражений для производных (4.5), (4.6) формулы (3.8), (3.9) запишем в виде

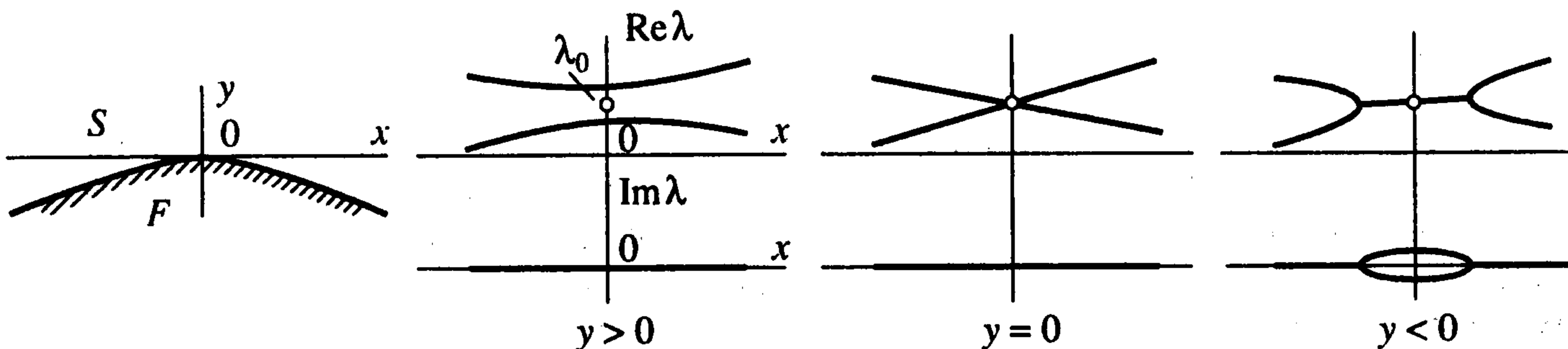
$$\lambda = -P(x'\varepsilon)^2 + \frac{1}{2}y''|\mathbf{f}|\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad (4.7)$$

$$(\lambda - \lambda_0 - Rx'\varepsilon)^2 + Q(x'\varepsilon)^2 = \frac{1}{2}y''|\mathbf{f}|\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \quad (4.8)$$

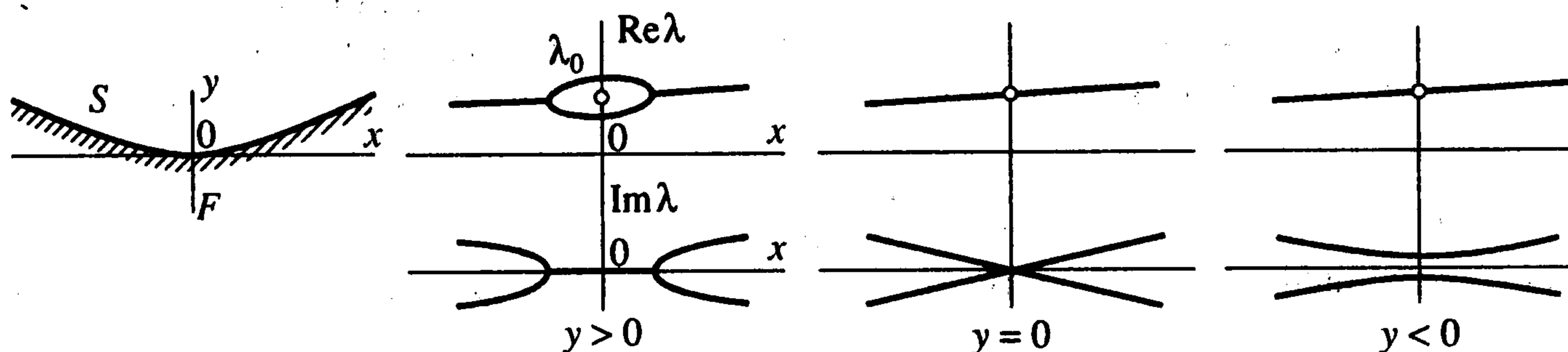
Поскольку первый дифференциал функции $y(\varepsilon)$ обращается в нуль при $\varepsilon = 0$, ее приращение определяется членом порядка ε^2 . Следовательно, в окрестности точки p_0 на плоскости векторов \mathbf{n} и \mathbf{t} справедливы формулы (4.2) и (4.3). Условие положительности λ при изменении параметров x и y , примененное к уравнению (4.2), и условие нерасщепления в применении к уравнению (4.3) дают аппроксимации второго порядка (4.1) сечения области устойчивости плоскостью Oxy .



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Следствие. Из доказанной леммы немедленно следуют теоремы 1 и 2. Действительно, условие (1.3) означает, что в точке p_0 обращается в нуль j -я компонента вектора нормали f . Поскольку представляют интерес зависимости $\lambda(p_j)$, необходимо взять орт t касательной, параллельной оси p_j (фиг. 1). Все компоненты этого вектора, кроме $t_j = 1$, равны нулю. Очевидно, что в этих условиях

$$\Delta p_j = x, \quad y |f| = \sum_{s=1, s \neq j}^n f_s \Delta p_s$$

Кроме того, из-за специального вида касательного орта t скалярные произведения в формулах (4.1) – (4.3) вырождаются и содержат лишь компоненты H_{jj} и h_j матрицы H и вектора h . Учитывая все это в соотношениях (4.2), (4.3) и выражая H_{jj} , h_j , f_s через производные матрицы A по параметрам и через векторы жордановой цепочки, окончательно приходим к формулам (1.4), (1.5).

При заданном касательном орте t уравнения (4.2), (4.3) описывают поведение нулевого или двукратного положительного СЗ $\lambda(x, y)$ вблизи ГОУ. Рассмотрим зависимость $\lambda(x, y)$ как однопараметрическое семейство ХК $\lambda(x)$, где y – параметр семейства. Уравнения (4.2), (4.3) позволяют качественно и количественно исследовать поведение ХК $\lambda(x)$ в окрестности ГОУ.

Если область устойчивости (S) граничит с областью дивергенций (D), то локально $\lambda(x, y)$ – семейство вещественных квадратных парабол $\lambda(x)$, описываемое уравнением (4.2). Ориентация параболы на плоскости $(\text{Re}\lambda, x)$ определяется знаком величины P .

Как следует из соотношений (4.1), эта же величина отвечает и за выпуклость сечения области устойчивости плоскостью параметров x и y . При $P < 0$ парабола $\lambda(x)$ выпукла вниз, а сечение области устойчивости вогнуто (фиг. 2). На фиг. 2 представлена также эволюция ХК при изменении параметра y от положительных значений к отрицательным. При $y > 0$ все точки ХК лежат над осью x , обеспечивая устойчивость системы. При $y = 0$ ХК $\lambda(x)$ касается оси абсцисс в точке $x = 0$, что означает образование нулевого СЗ в регулярной точке p_0 границы между областями устойчивости и дивергенции. При $y < 0$ из-за вогнутости сечения области устойчивости возникает интервал изменения параметра x

$$x^2 < -y|f|/|P| \quad (4.9)$$

на котором СЗ становятся отрицательными (дивергенция). Сравнивая неравенства (4.1) и (4.9), видим, что последнее является еще и квадратичной аппроксимацией области дивергенции. В случае, когда $P > 0$, парабола $\lambda(x)$ выпукла вверх, сечение области устойчивости выпукло, а картина поведения ХК в зависимости от параметра y получается из "кадров", изображенных на фиг. 2, отражением относительно горизонтальной оси, проходящей через вершину параболы.

Сложнее ведут себя ХК $\lambda(x)$ вблизи границы между областями устойчивости (S) и флаттера (F), поскольку в этом случае возможны их перестройки. Тип перестройки зависит от того, выпукло или вогнуто сечение области устойчивости плоскостью, проходящей через нормальный и касательный вектор к границе этой области. Из второго неравенства (4.1) следует, что выпуклость сечения определяется здесь знаком величины Q .

При $Q < 0$ сечение области устойчивости вогнуто, а области флаттера – выпукло (фиг. 3). Уравнение (4.3) описывает семейство пространственных ХК $\lambda(x)$, эволюция которых в зависимости от параметра y представлена на фиг. 3. При $y > 0$ ХК представляют собой две ветви гиперболы

$$(\operatorname{Re} \lambda - \lambda_0 - Rx)^2 + Qx^2 = y|f|, \operatorname{Im} \lambda = 0 \quad (4.10)$$

лежащей в плоскости $(\operatorname{Re} \lambda, x)$. С уменьшением параметра y ХК $\lambda(x)$, двигаясь по вещественной плоскости, постепенно сближаются и при $y = 0$ имеют общую точку $(\lambda_0, 0)$ (фиг. 3). В окрестности этой точки ХК зависят от x линейно

$$\operatorname{Re} \lambda = \lambda_0 + x(R \pm \sqrt{-Q}), \operatorname{Im} \lambda = 0 \quad (4.11)$$

Дальнейшее уменьшение y приводит к качественному изменению поведения ХК: появляется интервал изменения параметра x

$$x^2 < -y|f|/|Q| \quad (4.12)$$

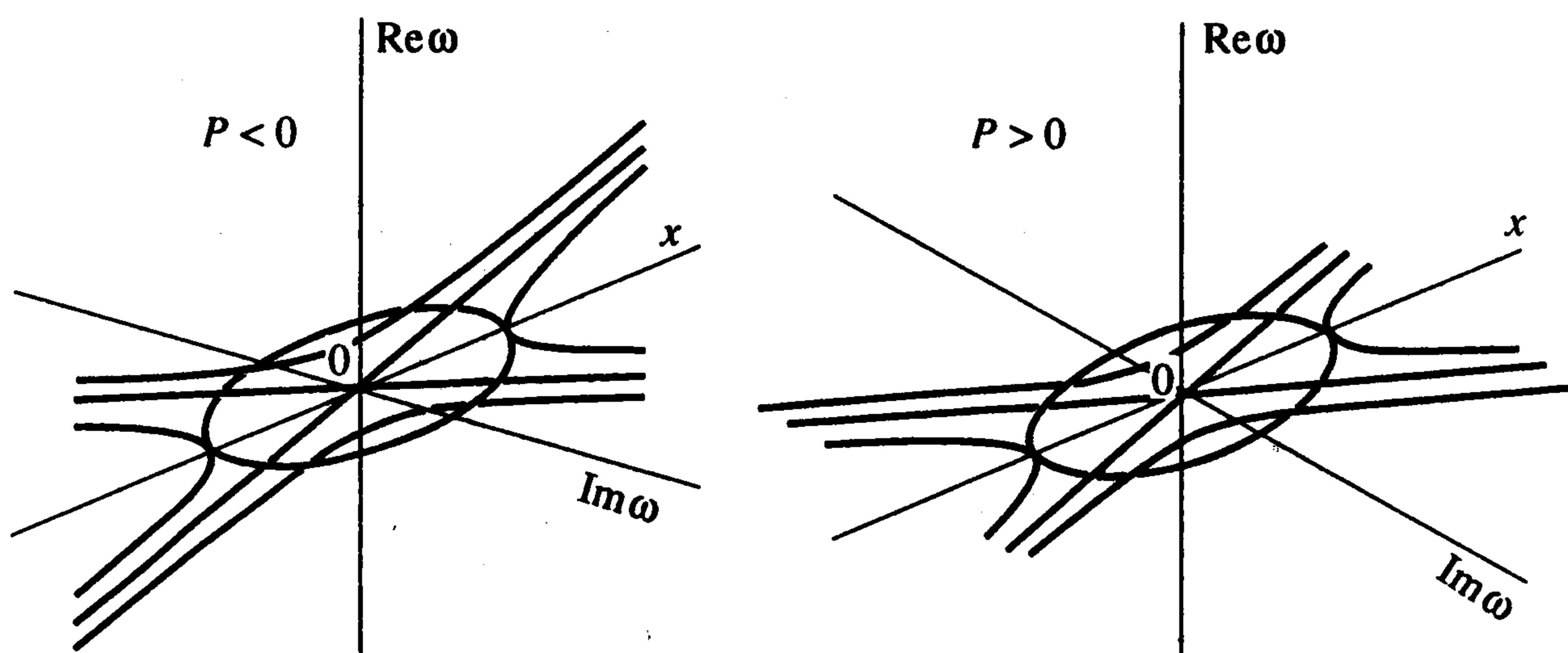
на котором ХК $\lambda(x)$ выходят из вещественной плоскости, образуя эллипс комплексных собственных значений – "пузырек неустойчивости" [14]

$$\operatorname{Re} \lambda = \lambda_0 + xR, (\operatorname{Im} \lambda)^2 - x^2Q = -y|f| \quad (4.13)$$

Вне интервала (4.12) ХК представляют собой две ветви смежной гиперболы (4.10), лежащей в вещественной плоскости. Сравнение формул (4.10) и (4.13) говорит о том, что эллипс и гипербола находятся в ортогональных плоскостях, соприкасаясь в точках $x_{1,2} = \pm \sqrt{y|f|/Q}$, где образуются двукратные вещественные СЗ

$$\lambda_{1,2} = \lambda_0 \pm R\sqrt{y|f|/Q} \quad (4.14)$$

Таким образом, при изменении параметра x в точках x_1 и x_2 происходят бифуркации СЗ: два СЗ, будучи в одной плоскости, сталкиваются и выходят из нее по ортогональному к этой плоскости направлению. Такое поведение СЗ называется "сильным взаимодействием" и является типичным при трансверсальном пересечении границы



Фиг. 5

области флаттера [9, 14]. Заметим, что неравенство (4.12), определяющее границы "пузырька неустойчивости", в точности совпадает с квадратичной аппроксимацией сечения области флаттера. Тем самым явление перехлеста ХК оказывается тесным образом связанным с выпуклостью области флаттера.

В случае $Q > 0$ сечение области устойчивости выпукло, а области флаттера – вогнуто. Соответствующая перестройка ХК приведена на фиг. 4. При $y > 0$ СЗ образуют вещественный эллипс (4.10) на интервале

$$x^2 < y|f|/Q \quad (4.15)$$

и гиперболу (4.13), лежащую в пространстве $(\text{Re}\lambda, \text{Im}\lambda, x)$. При уменьшении параметра y ветви гиперболы сближаются, а "пузырек устойчивости" сжимается (фиг. 4). При $y = 0$ эллипс (4.10) превращается в точку $(\lambda_0, 0)$, в окрестности которой ХК зависят линейно от x

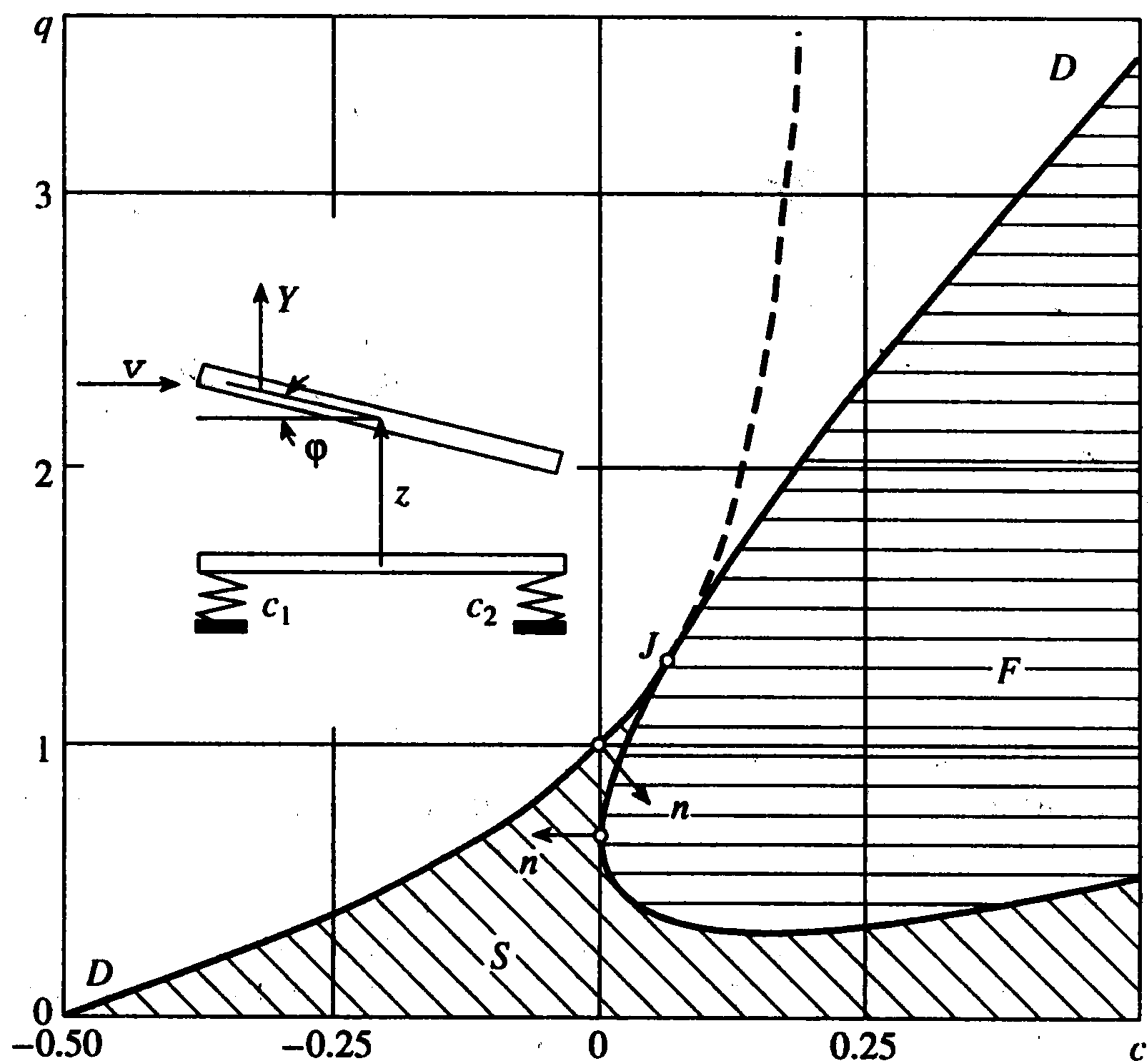
$$\text{Re}\lambda = \lambda_0 + Rx, \quad \text{Im}\lambda = \pm x\sqrt{Q} \quad (4.16)$$

Отрицательным значениям параметра y отвечают гиперболы (4.13), состоящие из комплексно-сопряженных СЗ (фиг. 4).

Замечание. В некоторых случаях предпочтительнее работать не с ХК $\lambda(x)$, а с ЧК $\omega(x)$. Зависимости, локально описывающие перестройки ЧК, получаются из уравнений (4.2), (4.3) путем подстановки $\lambda = \omega^2$. При этом легко убедиться, что вблизи границы между областями устойчивости и флаттера тип перестройки не претерпевает качественных изменений. Вблизи же границы между областями устойчивости и дивергенции это не так. При $x = 0, y = 0$ простому СЗ $\lambda_0 = 0$ соответствует двукратная нулевая частота с цепочкой Жордана длины 2 [9]. Формула (4.2) при $\lambda = \omega^2$ описывает распад этой частоты в зависимости от параметров x и y . Картина перестроек ЧК $\omega(x)$ в зависимости от параметра y напоминает поведение ХК $\lambda(x)$ вблизи границы области флаттера. Отличие состоит в том, что ЧК могут лежать лишь в вещественной и мнимой плоскостях (фиг. 5). Таким образом, перестройки ЧК вблизи границы области дивергенции, описываемые уравнением (4.2) при $\lambda = \omega^2$ (фиг. 5) качественно отличаются от поведения ХК $\lambda(x)$, описываемой уравнением (4.2) (фиг. 2).

5. Пример. Устойчивость колебаний пластинки в потоке газа. В качестве примера рассмотрим модельную задачу об устойчивости пластинки в набегающем потоке газа. Пластика находится на двух упругих опорах с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 на единицу размаха и имеет две степени свободы: вертикальное смещение z и угол отклонения φ (фиг. 6). Малые колебания пластинки в безразмерных переменных описываются уравнениями [10, 15]

$$\begin{pmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} z \\ \varphi \end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & c - q \\ 12c & 3 - 3q \end{pmatrix}; \quad q = \frac{c_y^\alpha \rho v^2}{2(c_1 + c_2)}, \quad c = \frac{c_1 - c_2}{2(c_1 + c_2)} \quad (5.1)$$



Фиг. 6

Здесь q – параметр нагрузки, пропорциональный скоростному напору, c_y^α – коэффициент подъемной силы, ρ и v – соответственно плотность и скорость потока, а c – параметр, характеризующий соотношение между жесткостями опор. Предполагается, что точка приложения подъемной силы Y отстоит от передней кромки на расстоянии $1/4$ ширины пластинки. Таким образом, система (5.1) зависит от вектора параметров $p = (c, q)$. Полагая коэффициент $c_y^\alpha > 0$, получим $q \geq 0$. Кроме того, из физических соображений вытекает, что $-1/2 \leq c \leq 1/2$.

Отыскивая решение в виде $[z, \varphi]^T = u e^{i\omega t}$, приходим к ЗСЗ

$$Au = \lambda u, \lambda = \omega^2$$

Соответствующее характеристическое уравнение

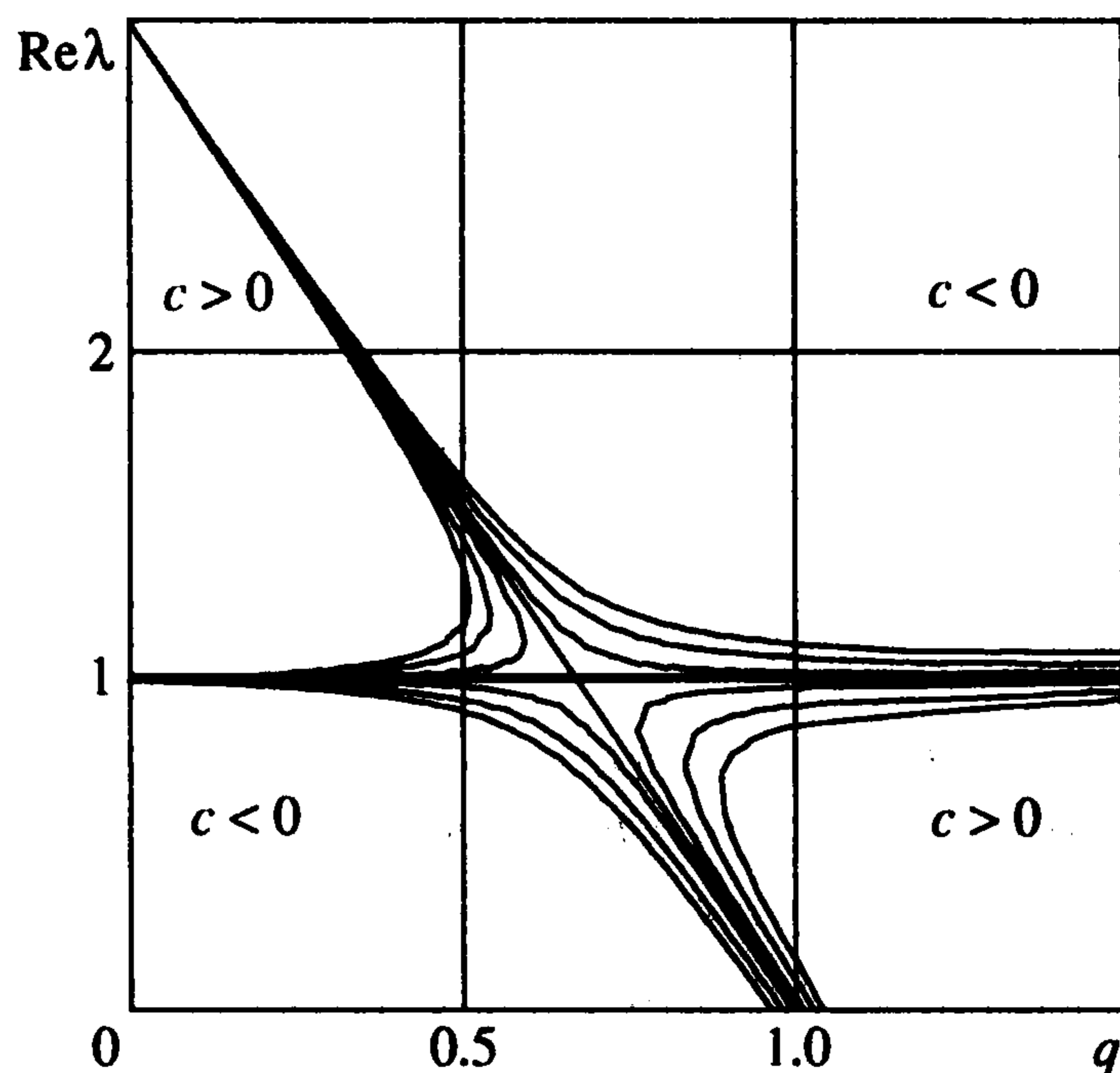
$$\lambda^2 + (3q - 4)\lambda + 12cq - 3q - 12c^2 + 3 = 0 \quad (5.2)$$

дает уравнения кривых, разбивающих плоскость параметров c и q на области устойчивости, флаттера и дивергенции (фиг. 6),

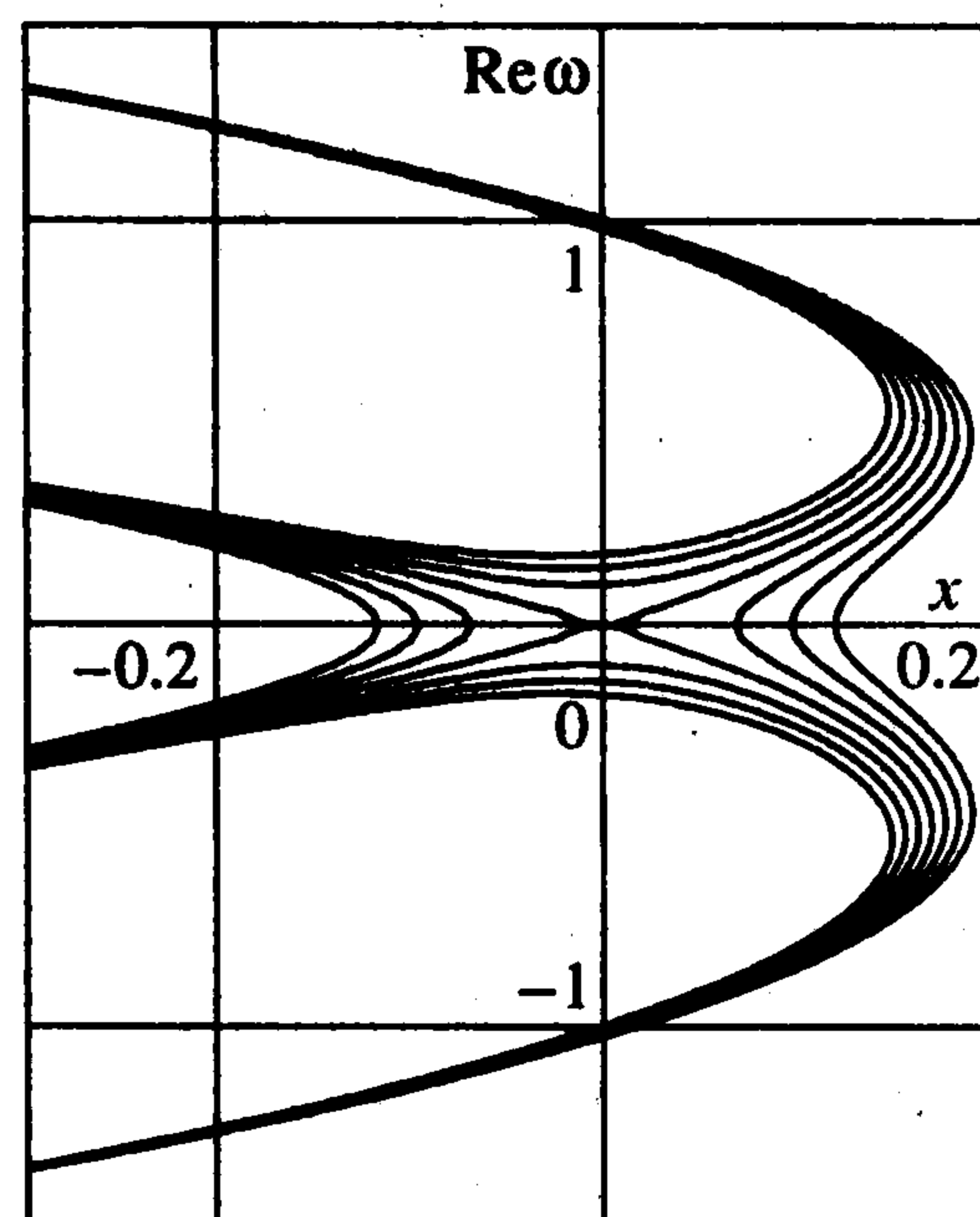
$$q_f(c) = \frac{2}{3}(1 + 4c \pm 2\sqrt{c(c+2)}), \quad q_d(c) = \frac{1 - 4c^2}{1 - 4c} \quad (5.3)$$

Кривая $q_f(c)$ ограничивает область флаттера, а часть кривой $q_d(c)$ до точки касания этих кривых J ($c = 2/3 - \sqrt{13}/6$, $q = 4/3$) является границей между областями устойчивости и дивергенции. Штриховой линией на фиг. 6 обозначена часть кривой $q_d(c)$, лежащая в области дивергенции.

Рассмотрим точку на границе между областями устойчивости и флаттера ($c = 0$, $q = 2/3$), соответствующую двукратному СЗ $\lambda = 1$ (фиг. 6). Характеристическое



Фиг. 7



Фиг. 8

уравнение (5.2) преобразуется к виду

$$\left(\lambda - 1 + \frac{3}{2}q - 1\right)^2 - \left(-4c + \frac{3}{2}q - 1\right)^2 = -8c - 4c^2 \quad (5.4)$$

При $c = 0$ уравнение (5.4) задает две прямые

$$\lambda = 1, \quad \lambda = 3 - 3q \quad (5.5)$$

пересекающиеся в точке $(q = 2/3, \lambda = 1)$. Если $c \neq 0$, то уравнение (5.4) описывает семейство гипербол с асимптотами (5.5) (фиг. 7). При малых $c < 0$ и $0 \leq q \leq 1$ решения $\lambda(q)$ уравнения (5.4) лежат в вещественной плоскости, причем одно из СЗ остается положительным на всем интервале изменения q , а второе меняет знак при некотором $q_d < 1$ (фиг. 7). Следовательно, при $c < 0$ и достаточно больших q система (5.1) теряет устойчивость статически (дивергенция). Смена знака параметра c влечет за собой переход к гиперболам, лежащим в смежных углах, образованных асимптотами (5.5). Происходит перестройка ХК, сопровождаемая появлением зоны комплексных СЗ и скачкообразным падением критической нагрузки. При этом устойчивость теряется при тех значениях q_f , когда два положительных СЗ λ сливаются, чтобы образовать затем комплексно-сопряженную пару (флаттер).

Покажем, что уравнение (5.4), описывающее перестройку ХК $\lambda(q)$, может быть аппроксимировано формулой (1.5), коэффициенты которой находятся лишь по информации о системе в точке $p_0 = (0, 2/3)$.

Действительно, $\lambda(2/3) = 1$ – двукратное СЗ, собственные и присоединенные векторы которого имеют вид

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Поскольку в точке $(0, 2/3)$

$$\mathbf{v}_0^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial c} \mathbf{u}_0 = -8, \quad \mathbf{v}_0^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} \mathbf{u}_0 = 0 \quad (5.7)$$

то условие (1.3) выполнено. Несложный подсчет показывает, что

$$\mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} \mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{v}_0^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} \mathbf{u}_1 = -3, \quad \mathbf{v}_0^T \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial q^2} \mathbf{u}_0 = 0, \quad \mathbf{v}_0^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} \mathbf{G}_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial q} \mathbf{u}_0 = 0 \quad (5.8)$$

Подставляя выражения (5.7), (5.8) в уравнение (1.5) и учитывая, что $\Delta p_1 = c$, $\Delta p_2 = q - \frac{2}{3}$, получим искомую аппроксимацию

$$\left(\lambda - 1 + \frac{3}{2}q - 1 \right)^2 - \left(\frac{3}{2}q - 1 \right)^2 = -8c \quad (5.9)$$

Сравнивая точное уравнение (5.4) с приближенным (5.9), отметим полное совпадение асимптот $\lambda = 1$, $\lambda = 3 - 3q$ и хорошее приближение ХК при малых значениях параметра c . Квадратичная аппроксимация области флаттера в окрестности точки $(0, \frac{2}{3})$ находится из условия положительности дискриминанта уравнения (5.9)

$$c > \frac{9}{32} \left(q - \frac{2}{3} \right)^2$$

Аппроксимация (5.9) отвечает выпуклой области флаттера (фиг. 6), а приближенное уравнение границы флаттера в окрестности точки $p_0 = (0, \frac{2}{3})$ хорошо согласуется с точным уравнением границы $q_f(c)$ из (5.3).

Рассмотрим теперь точку на границе между областями устойчивости и дивергенции ($c = 0$, $q = 1$), где матрица \mathbf{A} системы (5.1) имеет простые собственные значения $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$. Вычислим нормальный вектор \mathbf{f} к границе области дивергенции. Сначала найдем СВ нулевого СЗ

$$\mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Подставляя эти выражения в формулы (3.1), получим

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 12 \\ -3 \end{Bmatrix}, \quad |\mathbf{f}| = 3\sqrt{17}$$

Условие ортогональности (3.7) позволяет найти орт касательной \mathbf{t} , а формула (3.2) дает матрицу \mathbf{H}

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{Bmatrix} -132 & 12 \\ 12 & 0 \end{Bmatrix}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4.1), получим приближенное уравнение границы между областями устойчивости и дивергенции в координатах x , y

$$y = -\frac{12\sqrt{17}}{289} x^2$$

Поскольку координата y возрастает в направлении вектора нормали \mathbf{f} , область дивергенции выпукла в точке $(0, 1)$ (фиг. 6). Это согласуется с выводами разд. 3 о выпуклости области дивергенции при отрицательной определенности матрицы \mathbf{H} . Перестройка ЧК $\omega(x)$ в окрестности этой точки аппроксимируется уравнением (4.2) при $\lambda = \omega^2$, принимающим здесь вид

$$\omega^2 - \frac{36}{17} x^2 = 3\sqrt{17}y \quad (5.10)$$

Чтобы получить представление о точности аппроксимации (5.10), сравним ее с характеристическим уравнением (5.2), записанным в системе координат, связанной с векторами \mathbf{t} и $\mathbf{n} = \mathbf{f}/|\mathbf{f}|$. После замены параметров

$$c = \frac{1}{\sqrt{17}}(x + 4y), \quad q = 1 + \frac{1}{\sqrt{17}}(4x - y)$$

характеристическое уравнение (5.2) принимает вид

$$\omega^2 - \frac{36}{17}x^2 - 3\sqrt{17}y = \omega^4 + \omega^2 \frac{3}{\sqrt{17}}(4x - y) + \frac{12}{17}y(7x - 20y) \quad (5.11)$$

Сравнивая точное уравнение (5.11) с приближенным (5.10), заключим, что последнее, являясь гораздо более простым, хорошо описывает перестройку ЧК в окрестности точки $(x = 0, \omega = 0)$ при малых значениях y (фиг. 8).

Работа выполнена при поддержке Международной ассоциации по содействию сотрудничеству с учеными из независимых государств бывшего Советского Союза (IN-TAS YSF 01/1-057).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Claudon J.-L.* Characteristic curves and optimum design of two structures subjected to circulatory loads // *J. Mec.* 1975. V. 14. № 3. P. 531–543.
2. *Hanaoka M., Washizu K.* Optimum design of Beck's column // *Computers and Structures.* 1980. V. 11. № 6. P. 473–480.
3. *Kounadis A.N., Katsikadelis J.T.* On the discontinuity of the flutter load for various types of cantilevers // *Intern. J. Solids Structures.* 1980. V. 16. № 4. P. 375–383.
4. *Сейранян А.П., Шаранюк А.В.* Чувствительность и оптимизация критических параметров в задачах динамической устойчивости // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1983. № 5. С. 174–183.
5. *Langthjem M.A., Sugiyama Y.* Optimum shape design against flutter of a cantilevered column with an end-mass of finite size subjected to a non-conservative load // *J. Sound and Vibrations.* 1999. V. 226. № 1. P. 1–23.
6. *Болотин В.В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
7. *Циглер Г.* Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971. 192 с.
8. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
9. *Сейранян А.П.* Бифуркации в однопараметрических циркуляционных системах // *Изв. РАН. МТТ.* 1994. № 1. С. 142–148.
10. *Seyranian A.P., Kirillov O.N.* Bifurcation diagrams and stability boundaries of circulatory systems // *Theor. and Appl. Mech.* 2001. V. 26. P. 135–168.
11. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I // *Успехи мат. наук.* 1960. Т. 15. Вып. 3. С. 3–80.
12. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
13. *Seyranian A.P., Mailybaev A.A.* On stability boundaries of conservative systems // *ZAMP.* 2001. V. 52. № 4. P. 669–679.
14. *Сейранян А.П.* Анализ чувствительности собственных значений и развитие неустойчивости // *Stroinicky Casopis.* 1991. Т. 42. № 3. С. 193–208.
15. *Пановко Я.Г., Губанова И.И.* Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1964. 336 с.