

УДК 531.36:534.1

© 2002 г. О.В. Холостова

**О ВНУТРЕННЕМ РЕЗОНАНСЕ
В АВТОНОМНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЕ,
БЛИЗКОЙ К СИСТЕМЕ С ЦИКЛИЧЕСКОЙ КООРДИНАТОЙ**

Рассматривается движение автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, близкой к системе с циклической координатой. Предполагается, что в порождающей системе имеется стационарное вращение, причем отвечающее ему положение равновесия приведенной системы устойчиво в линейном приближении. Предполагается также, что в системе имеется внутренний резонанс: отношение собственной частоты малых колебаний приведенной системы к частоте изменения циклической координаты близко к целому числу. Изучаются нелинейные колебания полной системы в окрестности указанного стационарного вращения. Построены периодические движения, исследованы их ветвление и устойчивость. При помощи методов КАМ-теории рассмотрены условно-периодические движения системы. В качестве примера рассмотрена задача о движении близкого к динамически симметричному тяжелого твердого тела по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости при внутреннем резонансе.

1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана. Рассмотрим движение автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Будем считать, что функция Гамильтона системы содержит малый параметр ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) и представляется в виде

$$H = H^{(0)}(Q_2, P_1, P_2) + \varepsilon H^{(1)}(Q_1, Q_2, P_1, P_2; \varepsilon) \quad (1.1)$$

где Q_i и P_i ($i = 1, 2$) – соответственно координаты и импульсы.

Предполагаем, что гамильтониан (1.1) 2π -периодичен по координате Q_1 , но содержит ее только в своей возмущающей части $\varepsilon H^{(1)}$. Тогда для системы с невозмущенным гамильтонианом $H^{(0)}$ эта координата циклическая. Пусть, кроме того, в невозмущенной системе имеется стационарное вращение

$$Q_1 = \Omega t + Q_1^0, \quad P_1 = P_1^0, \quad Q_2 = P_2 = 0 \quad (\Omega, Q_1^0, P_1^0 - \text{const}) \quad (1.2)$$

причем положение равновесия $Q_2 = P_2 = 0$ приведенной системы устойчиво в линейном приближении.

Будем предполагать, что отношение собственной частоты ω малых колебаний в окрестности указанного положения равновесия к частоте Ω изменения циклической координаты близко к целому числу, и, таким образом, в системе имеется внутренний резонанс.

Рассмотрим движения системы с полным гамильтонианом (1.1) в окрестности стационарного вращения (1.2) порождающей системы. Цель работы – решение вопроса о существовании, числе и устойчивости периодических движений полной системы с гамильтонианом (1.1), а также исследование условно-периодических движений системы.

Положим в (1.1)

$$Q_1 = q, \quad Q_2 = \varepsilon^{1/3} q_2, \quad P_1 = P_1^0 + \varepsilon^{2/3} P, \quad P_2 = \varepsilon^{1/3} p_2$$

Гамильтониан возмущенного движения будет иметь вид (аддитивная постоянная отброшена)

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \omega (q_2^2 + p_2^2) + \Omega P + \varepsilon^{1/3} [h_3(q_2, p_2) + (l_1 q_2 + l_2 p_2) P] + \\ & + \varepsilon^{2/3} [h_4(q_2, p_2) + (m_1 q_2^2 + m_2 q_2 p_2 + m_3 p_2^2) P + n P^2] + \\ & + \varepsilon^{1/3} s(q) + \varepsilon^{2/3} [f_1(q) q_2 + f_2(q) p_2] + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $h_k(q_2, p_2)$ ($k = 3, 4$) – формы k -й степени относительно q_2 и p_2 ; l_i ($i = 1, 2$), m_j ($j = 1, 2, 3$) и n – постоянные коэффициенты; $s(q)$, $f_1(q)$ и $f_2(q)$ – 2π -периодические функции переменной q .

Осуществим ряд канонических замен переменных, упрощающих структуру гамильтониана (1.3). Сначала при помощи близкого к тождественному унивалентного канонического преобразования

$$q = \varphi + \dots, \quad q_2 = q_2^* + \dots, \quad P = I, \quad p_2 = p_2^* + \dots$$

часть гамильтониана, не содержащую координату q , приведем к нормальной форме до членов четвертого порядка включительно относительно переменных $|I|^{1/2}, q_2^*, p_2^*$. Переходя затем к "полярным" координатам φ_2, I_2 по формулам

$$q_2^* = \sqrt{2I_2} \sin \varphi_2, \quad p_2^* = \sqrt{2I_2} \cos \varphi_2$$

запишем преобразованный гамильтониан в виде

$$\begin{aligned} H = & \Omega I + \omega I_2 + \varepsilon^{2/3} (c_{20} I^2 + c_{11} I I_2 + c_{02} I_2^2) + \\ & + \varepsilon^{1/3} s(\varphi) + \varepsilon^{2/3} \sqrt{2I_2} [f_1^*(\varphi) \sin \varphi_2 + f_2^*(\varphi) \cos \varphi_2] + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где c_{ij} – постоянные, функции $f_1^*(\varphi)$ и $f_2^*(\varphi)$ 2π -периодичны по φ .

При помощи унивалентной канонической замены

$$\varphi = \varphi, \quad \varphi_2 = \varphi_2, \quad I = I^* - \varepsilon^{1/3} s(\varphi) / \Omega, \quad I_2 = I_2^*$$

уничтожим в гамильтониане слагаемое $\varepsilon^{1/3} s(\varphi)$.

Далее упростим слагаемые, содержащие функции $f_1^*(\varphi)$ и $f_2^*(\varphi)$. Пусть $\omega/\Omega = N$ (N – целое число). Представим ряды Фурье функций $f_1^*(\varphi)$ и $f_2^*(\varphi)$ в виде

$$f_i^*(\varphi) = a_N^{(i)} \cos N\varphi + b_N^{(i)} \sin N\varphi + \sum_{n \neq N} (a_n^{(i)} \cos n\varphi + b_n^{(i)} \sin n\varphi), \quad i = 1, 2$$

Осуществим 2π -периодическую по φ унивалентную каноническую замену переменных

$$\varphi, \varphi_2, I^*, I_2^* \rightarrow \hat{\varphi}, \hat{\varphi}_2, J, J_2$$

уничтожающую в выражении (1.4) все слагаемые с нерезонансными гармониками.

В преобразованном гамильтониане останутся слагаемые с резонансными гармониками $\cos(\hat{\varphi}_2 - N\hat{\varphi})$ и $\sin(\hat{\varphi}_2 - N\hat{\varphi})$. Запишем этот гамильтониан в виде

$$H = \Omega J + \omega J_2 + \varepsilon^{2/3}(c_{20}J^2 + c_{11}JJ_2 + c_{02}J_2^2) + \varepsilon^{2/3}\kappa\sqrt{J_2} \cos(\hat{\varphi}_2 - N\hat{\varphi} - \gamma) + O(\varepsilon)$$

$$\kappa = \sqrt{2}\kappa_1, \quad \kappa_1 = \sqrt{A_N^2 + B_N^2}, \quad \gamma = \text{arctg} \frac{B_N}{A_N}, \quad A_N = \frac{b_N^{(1)} + a_N^{(2)}}{2}, \quad B_N = \frac{a_N^{(1)} - b_N^{(2)}}{2}$$

Далее сделаем замену переменных

$$\hat{\varphi}, \hat{\varphi}_2, J, J_2 \rightarrow \varphi^*, \varphi_2^*, J^*, J_2^*$$

по формулам

$$\hat{\varphi} = \varphi^*, \quad \hat{\varphi}_2 = \varphi_2^* + N\varphi^* + \gamma, \quad J = J^* - NJ_2^*, \quad J_2 = J_2^*$$

Тогда получим

$$H = \Omega J^* + (\omega - \Omega N)J_2^* + \varepsilon^{2/3}(c_{20}^*J^{*2} + c_{11}^*J^*J_2^* + c_{02}^*J_2^{*2}) + \varepsilon^{2/3}\kappa\sqrt{J_2^*} \cos \varphi_2^* + O(\varepsilon) \quad (1.5)$$

$$c_{20}^* = c_{20}, \quad c_{11}^* = c_{11} - 2Nc_{20}, \quad c_{02}^* = c_{02} - c_{11}N + c_{20}N^2$$

Положим $\omega/\Omega = N + \varepsilon^{2/3}\delta$ и перепишем гамильтониан (1.5) в виде

$$H = \Omega J^* + \varepsilon^{2/3}[c_{20}^*J^{*2} + (\delta\Omega + c_{11}^*J^*)J_2^* + \kappa\sqrt{J_2^*} \cos \varphi_2^* + c_{02}^*J_2^{*2}] + O(\varepsilon)$$

Считая, что $c_{02}^* \neq 0$, осуществим еще одну замену переменных

$$\varphi^*, \varphi_2^*, J^*, J_2^* \rightarrow \theta, \theta_2, \rho, \rho_2$$

по формулам

$$\varphi^* = \theta, \quad \varphi_2^* = \theta_2 + \frac{\pi}{2}(1 - \sigma), \quad J^* = \kappa_*\rho, \quad J_2^* = \kappa_*\rho_2; \quad \sigma = \text{sign} c_{02}^*, \quad \kappa_* = \left(\frac{\kappa}{c_{02}^*}\right)^{2/3}$$

Преобразованный гамильтониан примет вид

$$H = \Omega\rho + \varepsilon^{2/3}\{\hat{\alpha}\rho^2 + \hat{\beta}[(a\delta + b\rho)\rho_2 + \rho_2^2 + \sqrt{\rho_2} \cos \theta_2]\} + O(\varepsilon) \quad (1.6)$$

$$\hat{\alpha} = c_{20}^*\kappa_*, \quad \hat{\beta} = (c_{02}^*\kappa_*^2)^{1/3}, \quad a = \Omega/\hat{\beta}, \quad b = c_{11}^*/c_{02}^*$$

где слагаемое $O(\varepsilon)$ 2π -периодично по θ, θ_2 .

2. Периодические движения системы. 2.1. Изоэнергетическая редукция. Рассмотрим движения системы с гамильтонианом (1.6) на изоэнергетическом уровне. Из равенства $H = \Omega c = \text{const}$ получим

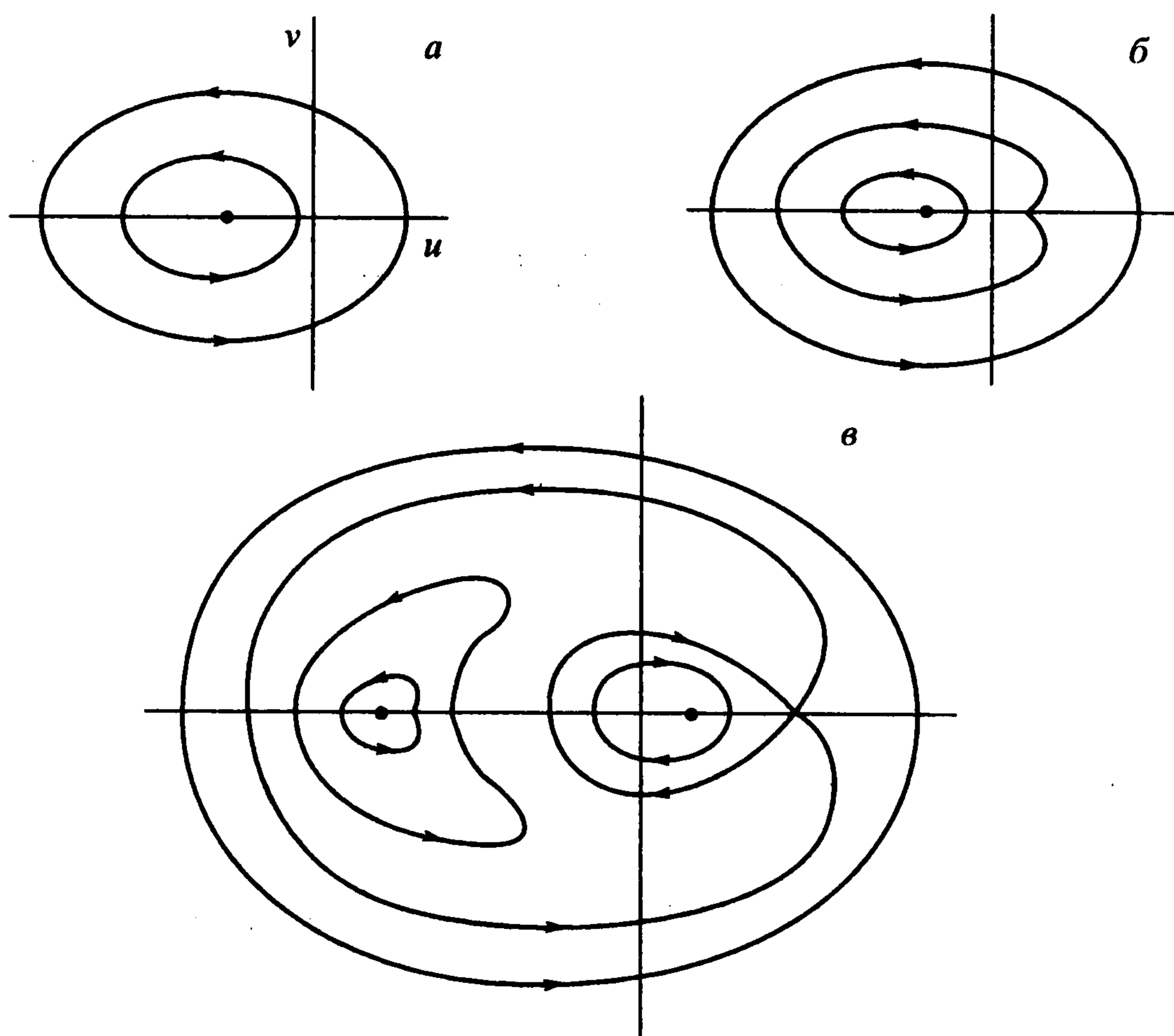
$$\rho = c - \frac{\varepsilon^{2/3}}{\Omega}\{\hat{\alpha}c^2 + \hat{\beta}[(a\delta + bc)\rho_2 + \rho_2^2 + \sqrt{\rho_2} \cos \theta_2]\} + O(\varepsilon) \quad (2.1)$$

Изменение переменных θ_2 и ρ_2 описывается гамильтоновыми уравнениями (уравнениями Уиттекера); функция Гамильтона имеет вид

$$K = H' + O(\varepsilon^{1/3}) \quad (2.2)$$

$$H' = -\mu\rho_2 + \rho_2^2 + \sqrt{\rho_2} \cos \theta_2, \quad \mu = -(a\delta + bc) = \text{const} \quad (2.3)$$

где в качестве независимой взята переменная $\tau = (\varepsilon^{2/3}\hat{\beta}/\Omega)\theta$. Слагаемое $O(\varepsilon^{1/3})$ в (2.2) периодически по τ с периодом $T \sim \varepsilon^{2/3}$.



Фиг. 1

Отметим, что рассматриваемое резонансное соотношение $\omega/\Omega \approx N$ между частотами исходной автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы означает наличие в редуцированной "неавтономной" гамильтоновой системе с одной степенью свободы резонанса в вынужденных колебаниях. Функция H' представляет собой модельный гамильтониан такой системы [1].

Однако если в обычных системах с одной степенью свободы в случае резонанса в вынужденных колебаниях параметр μ в модельном гамильтониане определяет резонансную расстройку, то в рассматриваемой здесь редуцированной системе параметр μ , помимо величины резонансной расстройки, зависит еще от постоянной энергии c системы с двумя степенями свободы.

2.2. Движения модельной системы. Движения системы с модельным гамильтонианом (2.3) исследованы ранее (см. статью [1], а также приведенную в ней библиографию). Приведем здесь необходимые для дальнейшего сведения.

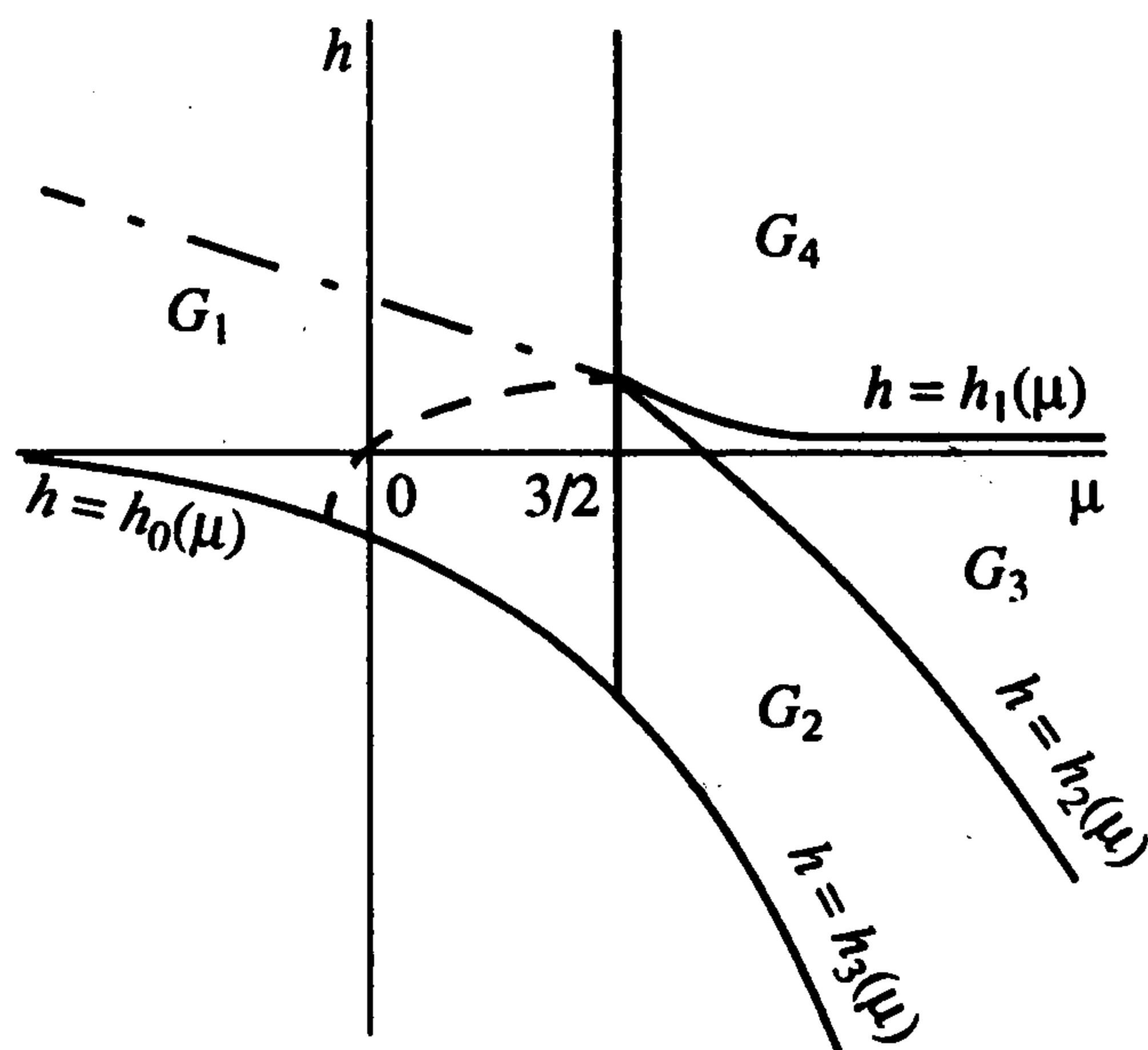
На фиг. 1, а, б, в в плоскости переменных $u = \sqrt{2\rho_2} \cos \theta_2$, $v = \sqrt{2\rho_2} \sin \theta_2$ представлены фазовые портреты модельной системы соответственно для случаев $\mu < 3/2$, $\mu = 3/2$, $\mu > 3/2$. При $\mu < 3/2$ система имеет одно устойчивое положение равновесия (фиг. 1, а)

$$\rho_2^{(0)} = \frac{|\mu|}{3} \operatorname{ch} \frac{\varphi}{3} + \frac{\mu}{3}, \quad \theta_2^{(0)} = \pi \left(\operatorname{ch} \varphi = \frac{27 - 4\mu^3}{4|\mu|^3} \right)$$

а при $\mu > 3/2$ — три положения равновесия (фиг. 1, в)

$$\rho_2^{(1)} = -\frac{\mu}{3} \cos \frac{\varphi}{3} + \frac{\mu}{3}, \quad \theta_2^{(1)} = 0; \quad \rho_2^{(2)} = -\frac{\mu}{3} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3} \right) + \frac{\mu}{3}, \quad \theta_2^{(2)} = 0$$

$$\rho_2^{(3)} = -\frac{\mu}{3} \cos \left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{\mu}{3}, \quad \theta_2^{(3)} = \pi \left(\cos \varphi = \frac{4\mu^3 - 27}{4\mu^3} \right)$$



Фиг. 2

из которых два, отвечающие большему ($\rho_2^{(3)}$) и меньшему ($\rho_2^{(1)}$) значениям ρ_2 , устойчивы, а одно, отвечающее среднему ($\rho_2^{(2)}$) значению ρ_2 , неустойчиво.

При $\mu = 3/2$ (фиг. 1, б) имеем два положения равновесия – устойчивое $\rho_2 = 1$, $\theta_2 = \pi$ и неустойчивое $\rho_2 = 1/4$, $\theta_2 = 0$.

Обозначим через h константу энергии модельной системы ($H' = h = \text{const}$). В плоскости параметров μ и h указанные положения равновесия осуществляются для точек кривых (фиг. 2)

$$h = h_i(\mu) = -\mu\rho_2^{(i)} + \rho_2^{(i)2} + \sqrt{\rho_2^{(i)}} \cos\theta_2^{(i)}, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

Уровню энергии $h = h_2(\mu)$ отвечают также два асимптотических движения системы (сепаратрисы на фиг. 1, в).

Кривые (2.4), а также прямая $\mu = 3/2$ разбивают плоскость (μ, h) на подобласти с различным характером движения системы.

В областях G_1 и G_2 (фиг. 2) имеем колебания системы вблизи устойчивых положений равновесия $\rho_2 = \rho_2^{(0)}$, $\theta_2 = \pi$ (фиг. 1, а) и $\rho_2 = \rho_2^{(3)}$, $\theta_2 = \pi$ (фиг. 1, в) соответственно. В области G_3 каждой точке (μ, h) отвечают два различных движения системы: колебание вблизи устойчивого положения равновесия $\rho_2 = \rho_2^{(1)}$, $\theta_2 = 0$, и вращение, которому на фиг. 1, в соответствует замкнутая кривая, охватывающая сепаратрису. Уровню энергии $h = h_1(\mu)$ помимо положения равновесия $\rho_2 = \rho_2^{(1)}$, $\theta_2 = 0$ отвечает также одна из траекторий-вращений (штриховая линия на фиг. 1, в). Каждой точке области G_4 отвечает одно вращение системы (замкнутые кривые на фиг. 1, в, охватывающие штриховую линию).

Частоты колебаний и вращений модельной системы зависят от корней многочлена $\varphi(\rho_2) = \rho_2 - (\rho_2^2 - \mu\rho_2 - h)^2$ [1]. В областях G_1, G_2, G_4 многочлен $\varphi(\rho_2)$ имеет два положительных вещественных корня и пару комплексно-сопряженных корней. Обозначим через a_1 и a_2 ($a_1 < a_2$) вещественные и через a_3 и a_4 комплексные корни. Движения системы в указанных областях (колебания или вращения) являются периодическими с частотой

$$\omega_1 = \pi\sqrt{m'm''} / (2K(k_1)) \quad (2.5)$$

где

$$m' = \sqrt{a_{31}a_{42}}, \quad m'' = \sqrt{a_{41}a_{32}}, \quad a_{ij} = a_i - a_j, \quad k_1^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m'^2 + m''^2}{2m'm''} \right)$$

$K(k_1)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

В области G_2 многочлен $\varphi(\rho_2)$ имеет четыре положительных вещественных корня $\rho_2 = a_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Частоты колебания и вращения, отвечающие каждой точке области G_2 , одинаковы и равны

$$\omega_2 = \pi \sqrt{a_{42} a_{31}} / 8(K(k_2)), \quad k_2 = \sqrt{(a_{43} a_{21}) / (a_{42} a_{31})} \quad (2.6)$$

2.3 Периодические решения системы и их устойчивость. Согласно теории периодических движений Пуанкаре [2], из каждого положения равновесия $\theta_2 = \theta_{2*}$, $\rho_2 = \rho_{2*}$ модельной системы (исключим из рассмотрения неустойчивую сложную особую точку $\rho_2 = 1/4$, $\theta_2 = 0$ при $\mu = 3/2$) рождается единственное, аналитическое по $\varepsilon^{1/3}$, T -периодическое по τ , а следовательно, 2π -периодическое по θ решение редуцированной системы, имеющее вид

$$\theta_2 = \tilde{\theta}_2(\theta) = \theta_{2*} + O(\varepsilon^{1/3}), \quad \rho_2 = \tilde{\rho}_2(\theta) = \rho_{2*} + O(\varepsilon^{1/3}) \quad (2.7)$$

Для этих решений из соотношения (2.1) получим

$$\rho = \tilde{\rho}(\theta) = c - \frac{\varepsilon^{2/3}}{\Omega} \{ \hat{\alpha} c^2 + \hat{\beta} [-\mu \rho_{2*} + \rho_{2*}^2 + \sqrt{\rho_{2*}} \cos \theta_{2*}] \} + O(\varepsilon) \quad (2.8)$$

где слагаемое $O(\varepsilon)$ 2π -периодично по θ .

При этом изменение переменной θ от времени описывается уравнением $d\theta/dt = \partial H/\partial p$ (гамильтониан H определен в (1.6)), в правую часть которого подставляются выражения (2.7), (2.8). Имеем

$$d\theta/dt = \Omega_0 + \varepsilon F(\theta; \varepsilon^{1/3}), \quad \Omega_0 = \Omega + \varepsilon^{2/3} (2\hat{\alpha} c^2 + \hat{\beta} b \rho_{2*}) \quad (2.9)$$

где функция $F(\theta; \varepsilon^{1/3})$ 2π -периодична по θ .

Решение уравнения (2.9) представляется соотношением

$$\theta = \tilde{\theta}(t) = \Omega^* t + \theta_0 + O(\varepsilon), \quad \Omega^* = \Omega_0 + O(\varepsilon) = \text{const} \quad (2.10)$$

в котором величина $O(\varepsilon)$ периодична по t с периодом $2\pi/\Omega^*$.

Подставляя выражение (2.10) в равенства (2.7) и (2.8), получим периодическое по времени решение $\tilde{\theta}_2(\tilde{\theta}(t))$, $\tilde{\rho}_2(\tilde{\theta}(t))$, $\tilde{\rho}(\tilde{\theta}(t))$ системы с двумя степенями свободы с периодом

$$\tilde{T} = \frac{2\pi}{\Omega^*} = \frac{2\pi}{\Omega} \left[1 - \frac{\varepsilon^{2/3}}{\Omega} (2\hat{\alpha} c + \hat{\beta} b \rho_{2*}) \right] + O(\varepsilon) \quad (2.11)$$

Число таких периодических решений, в зависимости от величины параметра μ модельной системы, может равняться одному или трем. В последнем случае периоды этих решений по t совпадают только в главной части; члены порядка $\varepsilon^{2/3}$ и выше в (2.11) зависят от равновесного значения ρ_{2*} и поэтому для разных решений различаются.

Неустойчивому при $\mu > 3/2$ положению равновесия модельной системы отвечает неустойчивое периодическое решение вида (2.7), (2.8), так как в этом случае характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений движения имеет положительный вещественный корень. Устойчивым же положениям равновесия модельной системы соответствуют орбитально устойчивые периодические решения (2.7), (2.8) (за исключением, быть может, множества значений параметров нулевой меры), что следует из доказываемой в разд. 3.2 невырожденности приближенного гамильтониана (3.3) и результатов КАМ-теории [3].

В исходных переменных 2π -периодическим по θ решениям (2.7), (2.8) отвечают 2π -периодические по θ_1 движения системы с гамильтонианом (1.1), имеющие вид

$$Q_2 = \varepsilon^{1/3} \sqrt{2\kappa_* \rho_{2*}} \sin \chi + O(\varepsilon^{2/3}), \quad P_2 = \varepsilon^{1/3} \sqrt{2\kappa_* \rho_{2*}} \cos \chi + O(\varepsilon^{2/3})$$

$$P_1 = P_1^0 + \varepsilon^{2/3} \kappa_* (c - N\rho_{2*}) + O(\varepsilon); \quad \chi = N\theta_1 + \theta_{2*} + \pi/2(1 - \sigma) + \gamma \quad (2.12)$$

При этом

$$\theta_1 = \bar{\Omega}t + \theta_0 + O(\varepsilon^{1/3}), \quad \bar{\Omega} = \Omega + O(\varepsilon^{1/3}) = \text{const}$$

где слагаемое $O(\varepsilon^{1/3})$ имеет по времени период $\bar{T} = 2\pi/\bar{\Omega}$. Такой же период по t имеют величины Q_2, P_2, P_1 в равенствах (2.12).

Следовательно, для исходной системы имеется, в зависимости от параметра μ модельной системы, либо одно \bar{T} -периодическое движение вида (2.12), и оно орбитально устойчиво, либо три движения, два из которых орбитально устойчивы, а одно неустойчиво.

В случае трех движений их периоды различаются на величины порядка $\varepsilon^{1/3}$. Функции $Q_2(t), P_2(t)$ для различных движений имеют разные амплитуды (зависящие от ρ_{2*}); фазы движений, соответствующих $\rho_{2*} = \rho_2^{(1)}$ и $\rho_{2*} = \rho_2^{(2)}$, совпадают в главной ($\sim \varepsilon^{1/3}$) части, фаза третьего (для $\rho_{2*} = \rho_2^{(3)}$) движения сдвинута относительно первых двух на π . Значения импульса P_1 для всех трех движений совпадают в главной части и различаются в членах порядка $\varepsilon^{2/3}$.

3. Условно-периодические движения системы. 3.1. Существование условно-периодических движений. Если в выражении (1.6) отбросить слагаемое $O(\varepsilon)$, то получим приближенный гамильтониан. Координата θ в приближенной системе циклическая, отвечающий ей импульс постоянен: $\rho = c_* = \text{const}$.

Запишем приближенный гамильтониан в виде

$$\tilde{H} = \Omega c_* + \varepsilon^{2/3} (\hat{\alpha} c_*^2 + \hat{\beta} H') \quad (3.1)$$

где H' – модельный гамильтониан, определенный в (2.3), в котором $\mu = -(a\delta + bc_*)$. Заметим, что в этом выражении для μ величину c_* можно заменить на постоянную энергии c полной системы (как в (2.3)), так как две постоянные c и c_* различаются на величину порядка $\varepsilon^{2/3}$ (см. (2.1)) и гамильтониан H' в (3.1) содержится в слагаемом $\sim \varepsilon^{2/3}$.

Для приближенного гамильтониана (3.1) введем переменные действие – угол I, w ; I_2, w_2 в каждой из областей колебаний или вращений модельной системы с гамильтонианом H' . Положим

$$I = \rho = c_*, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint \rho_2 d\theta_2 = I_2(h, \mu) \quad (3.2)$$

где интегрирование проводится по замкнутой траектории модельной системы, отвечающей колебанию или вращению, и используется интеграл энергии $H' = h = \text{const}$.

Если функцию $I_2 = I_2(h, \mu)$ обратить, то получим гамильтониан H' , записанный в переменных действие – угол:

$$h = h(I_2, \mu) = h(I_2, \mu(\delta, c_*)) = h(I_2, \mu(\delta, I)) = \tilde{h}(I, I_2)$$

Поэтому приближенный гамильтониан \tilde{H} представляется в виде

$$\tilde{H}(I, I_2) = H^{(0)}(I) + \varepsilon^{2/3} H^{(1)}(I, I_2) \quad (3.3)$$

$$H^{(0)}(I) = \Omega I, \quad H^{(1)}(I, I_2) = \hat{\alpha} I^2 + \hat{\beta} \tilde{h}(I, I_2)$$

Рассмотрим также систему с полным гамильтонианом, записанным в переменных I, w, I_2, w_2 :

$$H = \tilde{H}(I, I_2) + \varepsilon H^{(2)}(I, I_2, w, w_2; \varepsilon^{1/3}) \quad (3.4)$$

Гамильтониан (3.4) вне особых точек и сепаратрис модельной системы аналитичен по всем своим аргументам.

Для приближенного гамильтониана (3.3) выполняются условия

$$1) \frac{\partial H^{(0)}}{\partial I} \neq 0, \quad 2) \frac{\partial H^{(1)}}{\partial I_2} \neq 0, \quad 3) \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial I_2^2} \neq 0$$

Условие 1 проверяется непосредственно, условие 2 следует из формул (2.5) и (2.6). Условие 3 равносильно условию $\partial^2 h / \partial I_2^2 \neq 0$ невырожденности модельного гамильтониана. Проверка последнего проводится в разд. 3.2; будет показано, что модельный гамильтониан удовлетворяет условию невырожденности для всех допустимых значений параметров μ и h , за исключением множества точек (μ, h) , принадлежащих кривой, показанной на фиг. 2 штриховой линией.

На основании результатов КАМ-теории [3], при всех начальных условиях переменные I, I_2 в полной системе с гамильтонианом (3.4) вечно остаются вблизи своих начальных значений. Для большинства начальных условий движения полной системы будут условно-периодическими с частотами $\tilde{\Omega} = \Omega + O(\varepsilon^{2/3})$ и $\tilde{\Omega}_2 = \varepsilon^{2/3} \hat{\beta} d\tilde{h} / dI_2 + O(\varepsilon)$, где $d\tilde{h} / dI_2$ – частота колебания или вращения модельной системы, определяемая формулами (2.5) или (2.6); при этом справедливы оценки

$$|I(t) - I(0)| \sim O(\varepsilon^{1/3}), \quad |I_2(t) - I_2(0)| \sim O(\varepsilon^{1/3})$$

(кроме значений параметров μ и h вне малой окрестности штриховой кривой на фиг. 2). Дополнение к указанному большинству начальных условий имеет порядок $e^{-d/\varepsilon^{2/3}}$, где $d = \text{const} > 0$.

3.2. Проверка условия невырожденности модельного гамильтониана. Проверим условие невырожденности модельного гамильтониана $h(I_2, \mu)$ для областей G_1, \dots, G_4 плоскости параметров (μ, h) (фиг. 2), описанных в разд. 2.2.

Рассмотрим сначала области вращений G_3, G_4 , а также часть области колебаний G_1 , точкам которой отвечают траектории на фиг. 1, а, охватывающие начало координат.

Пользуясь вторым соотношением (3.2) и интегралом энергии модельной системы, запишем

$$\frac{d^2 h}{dI_2^2} = \frac{\omega^3}{2\pi} \oint \frac{\partial^2 H' / \partial \rho_2^2}{(\partial H' / \partial \rho_2)^3} d\theta_2 = \frac{\omega^3}{2\pi} \oint \frac{2 - 1/4 \cos \theta_2 \rho_2^{-3/2}}{(-\mu + 2\rho_2 + 1/2 \cos \theta_2 \rho_2^{-1/2})^3} d\theta_2 \quad (3.5)$$

где $\omega = dh/dI_2$ – частота рассматриваемого колебания или вращения.

Так как на указанных траекториях угол θ_2 монотонно возрастает, то $\partial H' / \partial \rho_2 = d\theta_2/d\tau > 0$ и знаменатель дроби в соотношении (3.5) положителен. Числитель же этой дроби положителен на таких траекториях, на которых $\rho_2 > 1/4$ при всех значениях угла θ_2 . При этом $d^2 h / dI_2^2 > 0$, и выполняется условие невырожденности.

Среди траекторий, отвечающих колебаниям при $\mu < \frac{3}{2}$, есть траектория, проходящая через точку $\rho_2 = \frac{1}{4}$, $\theta_2 = 0$. На этой траектории $\frac{1}{4} \leq \rho_2 \leq s_1$, где s_1 – единственный в рассматриваемой области корень уравнения

$$\rho_2^2 - \sqrt{\rho_2} - \mu\rho_2 = (9 - 4\mu)/16$$

На всех траекториях, охватывающих данную, имеем $\rho_2 > \frac{1}{4}$, и выполняется условие невырожденности. Этим траекториям отвечают точки области G_1 , лежащие выше прямой $h = -\mu/4 + 9/16$, показанной на фиг. 2 штрихпунктирной линией.

Пусть теперь $\mu \geq \frac{3}{2}$. При $\mu = \frac{3}{2}$ (фиг. 1, б) на сепаратрисе имеем $\frac{1}{4} < \rho_2 \leq \frac{9}{4}$, а при $\mu > \frac{3}{2}$ (фиг. 1, в) на внешней петле сепаратрисы выполняется соотношение

$$\rho_2^{(2)} < \rho_2 \leq s_2, \quad s_2 = \rho_2^{(2)} + \mu + \sqrt{2(\mu^2 - \sqrt{\rho_2^{(2)}})}$$

причем справедлива оценка $\rho_2^{(2)} > \mu/6 > \frac{1}{4}$ [1].

Таким образом, при $\mu \geq \frac{3}{2}$ на всех траекториях–вращениях модельной системы имеем $\rho_2 > \frac{1}{4}$, поэтому $d^2h/dl_2^2 > 0$, и выполняется условие невырожденности.

Заметим еще, что в области колебаний в окрестности устойчивого равновесия $\rho_2 = \rho_2^{(1)}$, $\theta_2 = \theta_2^{(1)}$, которым отвечают точки уже рассмотренной области G_3 , также выполняется условие невырожденности: частоты ω_2 колебаний и вращений в области G_3 одинаковы (см. формулу (2.6)), а условие невырожденности в силу соотношения $d^2h/dl_2^2 = d\omega_2/dl_2 = \omega_2 d\omega_2/dh$ сводится к неравенству $d\omega_2/dh \neq 0$, одинаковому для колебаний и вращений из области G_3 .

Проверим теперь условие невырожденности для точек области G_2 и части области G_1 ниже прямой $h = -\mu/4 + 9/16$.

Для точек малой окрестности кривой $h = h_2(\mu)$ области G_2 , отвечающих колебаниям вблизи сепаратрис, положим $h = h_2(\mu) - \Delta$ ($0 < \Delta \ll 1$), тогда из выражения (2.5) имеем $\omega_1 \approx -a/\ln \Delta$, $a = \text{const} > 0$. Отсюда вытекает, что

$$d\omega_1/dh = -d\omega_1/d\Delta \approx -a/(\Delta \ln^2 \Delta) < 0$$

и, следовательно, в окрестности сепаратрис области колебаний G_2 выполняется условие невырожденности.

Для точек вблизи кривых $h = h_0(\mu)$ и $h = h_3(\mu)$ областей G_1 и G_2 , отвечающих колебаниям в окрестности устойчивых равновесий $\rho_2 = \rho_2^{(0)}$, $\theta_2 = \theta_2^{(0)}$ и $\rho_2 = \rho_2^{(3)}$, $\theta_2 = \theta_2^{(3)}$, имеем

$$h = h_k(\mu) + B_1 l_2 + B_2 l_2^2 + O(l_2^3), \quad k = 0, 3 \quad (3.6)$$

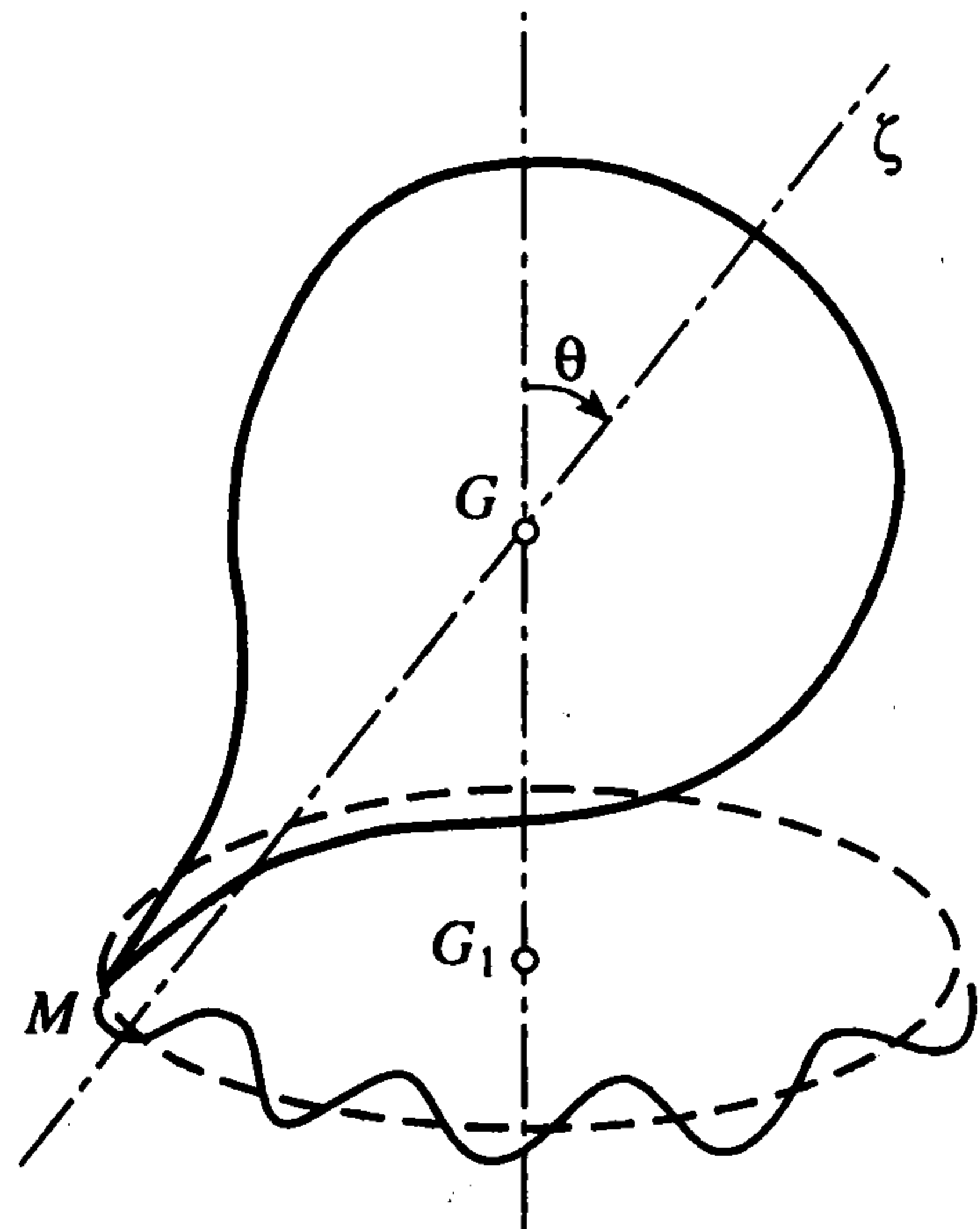
$$B_1 = (\mu - 2\rho_2^{(k)})^2 + 2\sqrt{\rho_2^{(k)}}, \quad B_2 = [(\mu - 2\rho_2^{(k)})^4 - \frac{1}{2}\sqrt{\rho_2^{(k)}}(\mu - 2\rho_2^{(k)})^2 - \rho_2^{(k)}] / B_1$$

Если $B_2 \neq 0$, то гамильтониан (3.6) удовлетворяет условию невырожденности. Последнее нарушается при выполнении равенства

$$(\mu - 2\rho_2^{(k)})^2 = \frac{\sqrt{17} + 1}{4} \sqrt{\rho_2^{(k)}}, \quad k = 0, 3 \quad (3.7)$$

В области G_2 имеем $B_2 < 0$ при всех $\mu > \frac{3}{2}$. В области G_1 уравнение (3.7) удовлетворяется при $\mu = \mu_* = -0.188959 \dots$. Если $\mu_* < \mu < \frac{3}{2}$, то $B_2 < 0$; при $\mu < \mu_*$ имеем $B_2 > 0$.

Для точек областей G_1 и G_2 вне малых окрестностей рассмотренных границ условие невырожденности модельного гамильтониана проверялось при помощи расчета на компьютере. Эти расчеты показали, что $d^2h/dl_2^2 < 0$ для всех точек области G_2 (как и для точек этой области вблизи кривых $h = h_2(\mu)$, $h = h_3(\mu)$, что показано выше аналитическим путем). В то же время в области G_1 существует кривая (показанная на фиг. 2 штриховой линией), на которой нарушается условие невырожденности. Эта кривая начинается на кривой $h = h_0(\mu)$ при $\mu = \mu_*$, проходит через начало координат и заканчивается в точке $(\frac{3}{2}; \frac{3}{16})$ на граничной прямой $\mu = \frac{3}{2}$ (из этой же точки выходят граничные кривые $h = h_1(\mu)$ и $h = h_2(\mu)$ областей G_2, G_3, G_4). Для точек области G_1 правее указанной кривой $d^2h/dl_2^2 < 0$, для точек левее этой кривой $d^2h/dl_2^2 > 0$.



Фиг. 3

Таким образом, условие невырожденности модельного гамильтониана выполняется во всех областях колебаний и вращений модельной системы, за исключением точек (μ, h) , принадлежащих описанной кривой.

4. Пример: тело с острием на гладкой плоскости. 4.1. *Постановка задачи.* Рассмотрим движение тяжелого твердого тела по неподвижной абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, считая, что в одной из точек поверхности тело имеет острие (нулевой радиус кривизны поверхности), движущееся по этой плоскости. Острие расположено близко к одной из главных центральных осей инерции тела. Моменты инерции тела относительно двух других главных центральных осей инерции предполагаем близкими.

Пусть $Oxuz$ – неподвижная система координат, начало которой лежит на опорной плоскости, а ось Oz направлена вертикально вверх. Введем также связанную с телом систему координат $G\xi\eta\zeta$ с началом в центре масс G тела и осями, направленными по главным центральным осям инерции тела. Обозначим через x, y, z координаты точки G , ориентацию тела зададим при помощи углов Эйлера ψ, θ, φ .

Пусть острие M тела близко к оси $G\zeta$ (фиг. 3); обозначим через ξ, η, ζ координаты точки M в системе координат $G\xi\eta\zeta$ (ξ и η предполагаем малыми) и через l – расстояние GM , тогда $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l^2$. Расстояние от центра масс тела до опорной плоскости определяется выражением

$$GG_1 = f(\theta, \varphi) = -\xi \sin \theta \sin \varphi - \eta \sin \theta \cos \varphi - \zeta \cos \theta$$

Кинетическая и потенциальная энергия тела запишутся в виде [4]

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} (A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi + m f_\theta^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (C + m f_\varphi^2) \dot{\varphi}^2 + \\ & + \frac{1}{2} [(A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi) \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta] \dot{\psi}^2 + m f_\theta f_\varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} + \\ & + (A - B) \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \dot{\theta} \dot{\psi} + C \cos \theta \dot{\theta} \dot{\psi}, \quad \Pi = m g f(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (4.1)$$

где m – масса тела, A, B, C – его главные центральные моменты инерции ($A = B$).

Из выражений (4.1) следует, что координаты x, y и ψ циклические. Следовательно, величины \dot{x}, \dot{y} и импульс p_ψ постоянны, и задача сводится к исследованию системы

с двумя степенями свободы с обобщенными координатами θ и φ . Без ограничения общности можно считать, что $\dot{x} = \dot{y} = 0$.

Перейдем к каноническим переменным, введя обобщенные импульсы

$$p_\psi = \partial T / \partial \dot{\psi}, \quad p_\theta = \partial T / \partial \dot{\theta}, \quad p_\varphi = \partial T / \partial \dot{\varphi}$$

При помощи множителя $ml\sqrt{lg}$ сделаем импульсы безразмерными; введем безразмерное время $\tau = \sqrt{g/lt}$, а также параметры $\varepsilon, \beta, \gamma, a, b$ по формулам

$$\varepsilon = \frac{A-B}{B} \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad \beta = \frac{B}{ml^2}, \quad \gamma = \frac{C}{ml^2}, \quad \xi = \varepsilon la, \quad \eta = \varepsilon lb$$

Используя некоторые соотношения, приведенные ранее [4], можно получить следующее выражение для функции Гамильтона приведенной системы (для импульсов оставлены прежние обозначения, величина p_ψ рассматривается как параметр):

$$H = H^{(0)} + \varepsilon H^{(1)} + O(\varepsilon^2) \quad (4.2)$$

$$H^{(0)} = \frac{1}{2} \left[\frac{p_\theta^2}{\beta + \sin^2 \theta} + \frac{p_\varphi^2}{\gamma} + \frac{(p_\varphi \cos \theta - p_\psi)^2}{\beta \sin^2 \theta} \right] + \cos \theta$$

$$H^{(1)} = -\frac{\beta}{2} \left[\cos \varphi \frac{p_\theta}{\beta + \sin^2 \theta} - \sin \varphi \frac{p_\varphi \cos \theta - p_\psi}{\beta \sin \theta} \right]^2 + \quad (4.3)$$

$$+ \frac{1}{\beta \gamma} (-a \cos \varphi + b \sin \varphi) [(\beta \sin^2 \theta + \gamma \cos^2 \theta) p_\varphi - \gamma \cos \theta p_\psi] \frac{p_\theta}{\beta + \sin^2 \theta} -$$

$$- \frac{1}{2} (a \sin \varphi + b \cos \varphi) \sin 2\theta \frac{p_\theta^2}{(\beta + \sin^2 \theta)^2} - (a \sin \varphi + b \cos \varphi) \sin \theta$$

Гамильтониану (4.2) отвечает система, близкая к системе с циклической координатой, так как координата φ содержится только в возмущающей части.

4.2. *Случай $\varepsilon = 0$. Регулярная прецессия тела.* Случай $\varepsilon = 0$ соответствует движению динамически симметричного ($A = B$) тела с острием, расположенным на оси его динамической симметрии ($\xi = \eta = 0$). Для системы с приближенным гамильтонианом (4.3) имеем $p_\varphi = \text{const}$. Примем далее, что значения постоянных величин p_φ и p_ψ совпадают, и положим $p_\varphi = p_\psi = \alpha$. Гамильтониан $H^{(0)}$ запишется в виде

$$H^{(0)} = \frac{1}{2} \left[\frac{p_\theta^2}{\beta + \sin^2 \theta} + \frac{\alpha^2}{\beta} \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right] + \cos \theta \quad (4.4)$$

Система с гамильтонианом (4.4) имеет частные решения (положения равновесия) вида $p_\theta = 0$, $\theta = \theta_0 = \text{const}$, где $\theta_0 = 0$ или θ_0 является корнем уравнения $\cos^4(\theta/2) = \alpha^2/(4\beta)$. Первое из них отвечает такому движению, когда тело вращается вокруг вертикально расположенной оси симметрии с постоянной угловой скоростью ("спящий" волчок). Это движение устойчиво по отношению к переменным θ, p_θ при выполнении условия $\alpha^2 > 4\beta$, которое может быть переписано в виде

$$C^2 r_0^2 > 4Bmgl \quad (4.5)$$

где r_0 – угловая скорость вращения тела вокруг вертикали. Неравенство (4.5) представляет собой аналог известного условия Майевского – Четаева устойчивости "спящего" волчка Лагранжа с неподвижной точкой.

Второе из указанных положений равновесия приближенной системы существует и устойчиво при $\alpha^2 < 4\beta$, т.е. при выполнении неравенства (4.5) с противоположным знаком. Этому положению равновесия отвечает регулярная прецессия рассматриваемого динамически симметричного тела; постоянные угловые скорости прецессии ψ' и собственного вращения φ' определяются выражениями

$$\psi' = \frac{\alpha}{2\beta \cos^2(\theta_0/2)}, \quad \varphi' = \Omega = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha \cos \theta_0}{2\beta \cos^2(\theta_0/2)} \quad (4.6)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по τ .

В случае регулярной прецессии центр масс G тела остается неподвижным, точка M описывает в плоскости своего движения окружность радиуса $l \sin \theta_0$ (штриховая линия на фиг. 3).

Заметим, что так как угол θ наклона оси симметрии тела к вертикали не может превосходить $\pi/2$, то $1/4 < \cos^4(\theta_0/2) < 1$ и, значит, регулярная прецессия существует при $\beta < \alpha^2 < 4\beta$. При этом достаточно рассмотреть случай $\alpha > 0$, так как при замене α на $-\alpha$ меняются только направления вращений тела (знаки угловых скоростей в выражениях (4.6)), но не величины этих угловых скоростей.

4.3. Преобразование возмущенного гамильтониана. Примем решение

$$p_\theta = 0, \quad \theta = \theta_0 = 2 \arccos[\alpha^2/(4\beta)]^{1/4}, \quad p_\varphi = \alpha$$

приближенной системы за невозмущенное и рассмотрим движения полной системы с гамильтонианом (4.2) в окрестности этого движения. Положим в (4.2)

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon^{1/3} x_2, \quad p_\theta = \varepsilon^{1/3} y_2, \quad \varphi = q, \quad p_\varphi = \alpha + \varepsilon^{2/3} P$$

Затем при помощи замены

$$x_2 = a_* q_2, \quad y_2 = p_2 / a_*, \quad a_* = (\omega_0^2 \beta_*)^{-1/4}, \quad \omega_0^2 = 4 \sin^2(\theta_0/2), \quad \beta_* = \beta + \sin^2 \theta_0$$

приведем квадратичную по x_2, y_2 часть гамильтониана к нормальной форме. Преобразованный гамильтониан примет вид

$$H = \frac{1}{2} \omega (q_2^2 + p_2^2) + \Omega P + \varepsilon^{1/3} (a_1 q_2^3 + a_2 q_2 p_2^2 + a_3 q_2 P) + \varepsilon^{2/3} (b_1 q_2^4 + b_2 q_2^2 p_2^2 + b_3 q_2^2 P + b_4 P^2) - \varepsilon^{1/3} (a \sin \theta_0 \sin q + b \sin \theta_0 \cos q + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 \sin^2 q) - \varepsilon^{2/3} [(f_1 \sin q + f_2 \cos q) q_2 + (f_3 \sin q + f_4 \cos q) p_2 + d_1 \sin^2 q q_2 + d_4 \sin q \cos q p_2] + O(\varepsilon)$$

где

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{\beta_*}}, \quad a_1 = a_*^3 \operatorname{tg}(\theta_0/2), \quad a_2 = -\frac{\sqrt{\omega_0} \sin 2\theta_0}{2\beta_*^{7/4}}, \quad a_3 = \frac{a_* \sin \theta_0}{\alpha}$$

$$b_1 = \frac{a_*^4 (6 + \omega_0^2)(2 + \omega_0^2)}{96 \cos^2(\theta_0/2)}, \quad b_2 = -\frac{\beta \cos 2\theta_0 - \sin^2 \theta_0 (3 - 2 \sin^2 \theta_0)}{2\beta_*^3}$$

$$b_3 = \frac{a_*^2 (2 + \omega_0^2)}{4\alpha}, \quad b_4 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\gamma} + \frac{\operatorname{ctg}^2 \theta_0}{\beta} \right], \quad d_1 = \alpha a_3, \quad d_2 = \alpha \omega_0^2 a_1, \quad f_1 = a_* a \cos \theta_0$$

$$f_2 = a_* b \cos \theta_0, \quad f_3 = -b f_*, \quad f_4 = a f_*, \quad f_* = \frac{\alpha [\beta \sin^2 \theta_0 - \gamma \cos \theta_0 (1 - \cos \theta_0)]}{\alpha_* \beta \gamma \beta_*^2}$$

Далее при помощи метода Депри – Хори приведем часть гамильтониана, не содержащую координату q , к нормальной форме до членов четвертого порядка включительно, затем при помощи канонической замены

$$a, p, q_2, p_2 \rightarrow \hat{\phi}, J, \hat{q}_2, \hat{p}_2$$

(как в разд. 2) уничтожим слагаемые $\sim \varepsilon^{1/3}$, содержащие координату q . После перехода к "полярным" координатам $\hat{\phi}_2, J_2$ по формулам

$$\hat{q}_2 = \sqrt{2J_2} \sin \hat{\phi}_2, \quad \hat{p}_2 = \sqrt{2J_2} \cos \hat{\phi}_2$$

и уничтожения в гамильтониане слагаемого с нерезонансной гармоникой $\sin \hat{\phi}$ получим (оставляем для переменных прежние обозначения)

$$H = \Omega J + \omega J_2 + \varepsilon^{2/3}(c_{20}J^2 + c_{11}JJ_2 + c_{02}J_2^2) + \varepsilon^{2/3}[\kappa_1^+ \cos(\hat{\phi}_2 - \hat{\phi} - \delta_1^+) + \kappa_1^- \cos(\hat{\phi}_2 + \hat{\phi} - \delta_1^-) + \kappa_2^+ \cos(\hat{\phi}_2 - 2\hat{\phi} - \delta_2^+) + \kappa_2^- \cos(\hat{\phi}_2 + 2\hat{\phi} - \delta_2^-)] + O(\varepsilon) \quad (4.7)$$

$$\kappa_1^\pm = \sqrt{\frac{1}{2}[(f_1 \pm \hat{f}_4)^2 + (f_2 \mp \hat{f}_3)^2]}, \quad \kappa_2^\pm = |\kappa_{2*}^\pm|, \quad \kappa_{2*}^\pm = \frac{\sqrt{2}}{4}(\hat{d}_2 \pm d_1)$$

$$\delta_1^\pm = \arctg \frac{f_2 \mp \hat{f}_3}{\hat{f}_4 \pm f_1}, \quad \delta_2^\pm = \pm \frac{\pi}{2} \text{sign } \kappa_{2*}^\pm$$

$$\hat{f}_3 = f_3 + \frac{a_3 b}{\omega} \sin \theta_0, \quad \hat{f}_4 = f_4 - \frac{a_3 a}{\omega} \sin \theta_0, \quad \hat{d}_2 = d_2 - \frac{a_3}{\omega} \sin^2 \theta_0$$

где, как показывают расчеты,

$$c_{20} = \frac{1}{2\gamma} + \frac{1 - 4 \sin^2(\theta_0/2)}{8\beta \sin^2(\theta_0/2)}, \quad c_{11} = -\frac{\cos^2(\theta_0/2)(\beta + 4 \sin^4(\theta_0/2))}{2\alpha\beta_*^{3/2} \sin(\theta_0/2)}$$

$$c_{02} = -\frac{4 + 3 \text{ctg}^2(\theta_0/2)}{16\beta_*} + \frac{\sin^2 \theta_0 + 3 \cos \theta_0}{4\beta_*^2} - \frac{\beta \cos^2 \theta_0}{4\beta_*^3}$$

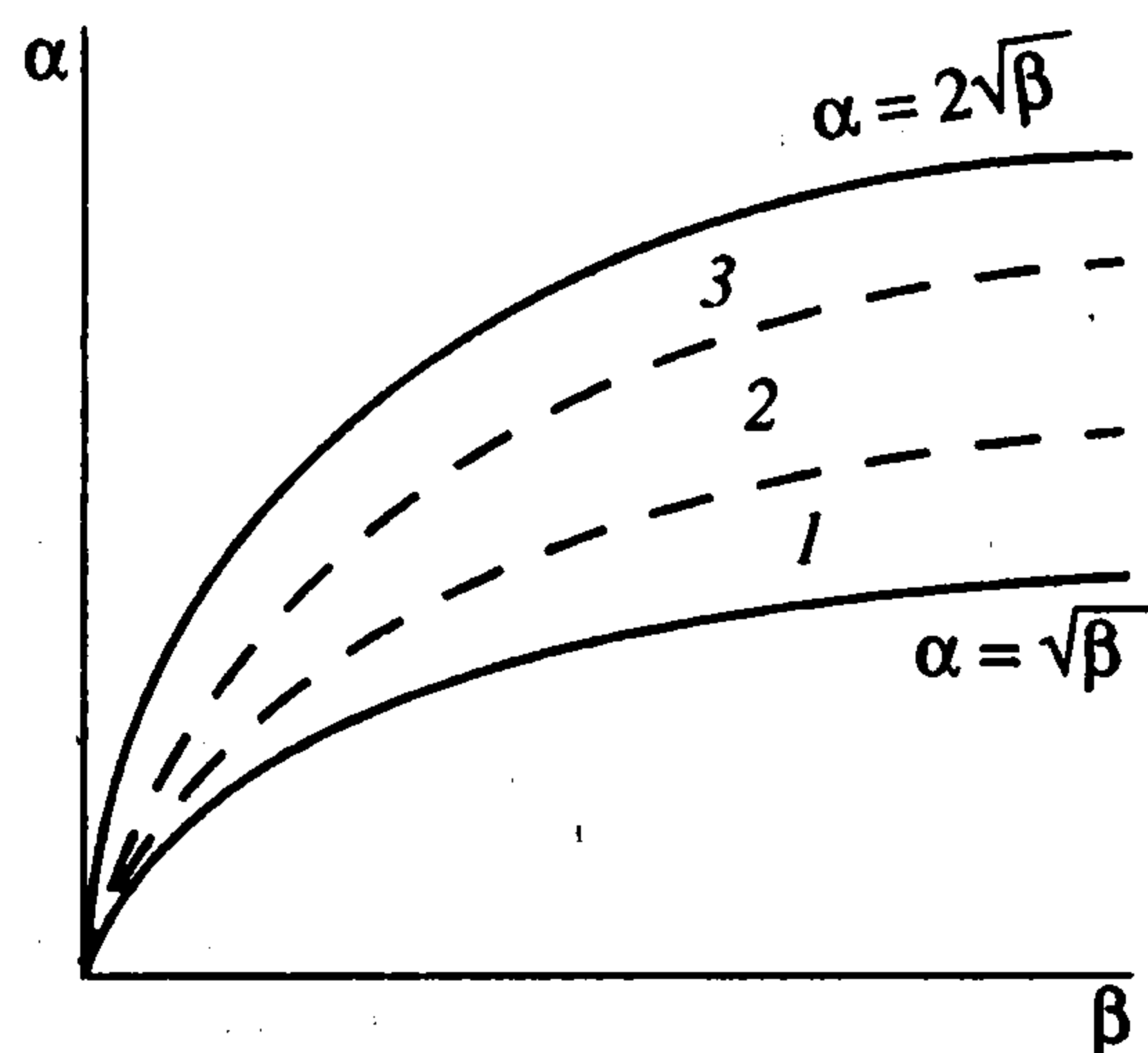
4.4. *Условия существования резонансов.* Так как $\omega > 0$, а величина Ω может принимать значения любого знака, то в случае $\Omega > 0$ в системе возможны резонансы $\omega \approx \Omega$ и $\omega \approx 2\Omega$, а в случае $\Omega < 0$ – резонансы $\omega \approx -\Omega$ и $\omega \approx -2\Omega$. Резонансные соотношения $\omega \approx N\Omega$ ($N = 1, 2, -1, -2$) реализуются при

$$\gamma = \gamma_N(\alpha, \beta) = \frac{2\alpha\beta\sqrt{\beta_*} \cos^2(\theta_0/2)}{(2/N)\beta \sin \theta_0 \cos(\theta_0/2) + \alpha\sqrt{\beta_*} \cos \theta_0} \quad (4.8)$$

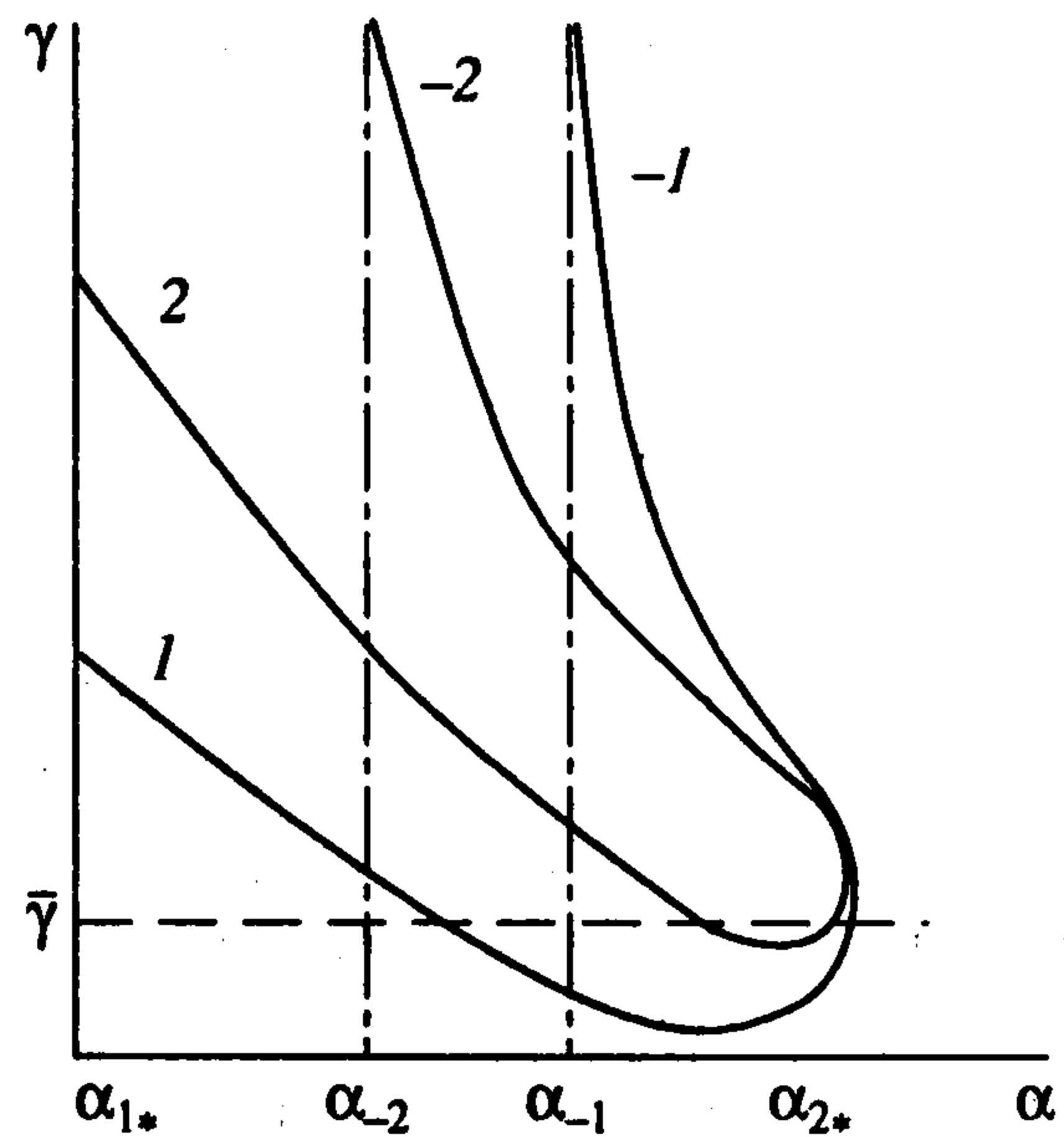
Величины γ_1 и γ_2 в выражении (4.8) при $\alpha > 0$ всегда положительны, поэтому резонансы $\omega \approx 2\Omega$ и $\omega \approx \Omega$ имеют место для всех точек (α, β) области $\beta < \alpha^2 < 4\beta$, или, что то же, области $\sqrt{\beta} < \alpha < 2\sqrt{\beta}$ (фиг. 4) существования регулярной прецессии. Величины же γ_{-1} и γ_{-2} меняют знак при переходе через кривые $\alpha = \alpha_{-1}(\beta)$ и $\alpha = \alpha_{-2}(\beta)$ в плоскости (α, β) , задаваемые неявно соотношениями

$$(2/N)\sin \theta_0 \cos(\theta_0/2) = -\alpha \cos \theta_0 \sqrt{\beta + \sin^2 \theta_0} \quad (\cos^4(\theta_0/2) = \alpha^2/(4\beta)) \quad (4.9)$$

Кривые $\alpha = \alpha_{-1}(\beta)$ и $\alpha_{-2}(\beta)$ показаны на фиг. 4 верхней и нижней штриховой линией соответственно. В подобласти 1 на фиг. 4 имеем $\gamma_{-2} < 0$, в подобластях 1 и 2 – $\gamma_{-1} < 0$. Поэтому в подобласти 1 реализуются только резонансы $\omega = \Omega$, $\omega = 2\Omega$, в подобласти 2 – резонансы $\omega = \Omega$, $\omega = \pm 2\Omega$, в подобласти 3 реализуются все четыре резонанса



Фиг. 4



Фиг. 5

$\omega = \pm 2\Omega$, $\omega = \pm \Omega$ (однако эти резонансы относятся к разным телам, так как отвечают разным значениям параметра γ).

Для физической интерпретации условий существования резонансов опишем эти же результаты несколько иначе. Зафиксируем параметр $\beta = \bar{\beta}$ и рассмотрим функции $\gamma = \Gamma_N(\alpha) \equiv \gamma_N(\alpha, \bar{\beta})$ ($N = 1, 2$) при $\alpha_{1*} \leq \alpha \leq \alpha_{2*}$ ($\alpha_* = \sqrt{\bar{\beta}}$, $\alpha_{2*} = 2\sqrt{\bar{\beta}}$) и $\gamma = \Gamma_M(\alpha) \equiv \gamma_M(\alpha, \bar{\beta})$ при $\alpha_M < \alpha < \alpha_{2*}$ ($\alpha_M = \alpha_M(\bar{\beta})$, $M = -1, -2$).

Все четыре функции $\gamma = \Gamma_N(\alpha)$ ($N = -2, -1, 1, 2$) имеют единственную общую точку $(2\sqrt{\bar{\beta}}, 2\sqrt{\bar{\beta}})$ на правой границе области своего определения (в этой точке графики функций имеют вертикальные касательные). Для всех остальных значений α из областей определения этих функций справедливы неравенства $\Gamma_{-1}(\alpha) > \Gamma_{-2}(\alpha) > \Gamma_2(\alpha) > \Gamma_1(\alpha)$.

Функция $\gamma = \Gamma_1(\alpha)$ имеет при $0 < \bar{\beta} < 2/7$, а функция $\gamma = \Gamma_2(\alpha)$ — при $0 < \bar{\beta} < 8$ точку минимума, абсцисса которой определяется неявно следующим уравнением:

$$\alpha \bar{\beta} (1 + \sin^2(\theta_0/2)) + 3\alpha \sin^2(\theta_0/2) \sin^2 \theta_0 = N \sin \theta_0 \cos(\theta_0/2) \beta_*^{3/2}, \quad N = 1, 2$$

где $N = 1$ для функции $\gamma = \Gamma_1(\alpha)$ и $N = 2$ для функции $\gamma = \Gamma_2(\alpha)$. При $\bar{\beta} \geq 2/7$ и $\bar{\beta} \geq 8$ точка минимума лежит вне областей определения функций $\gamma = \Gamma_1(\alpha)$ и $\gamma = \Gamma_2(\alpha)$ соответственно; на этих интервалах изменения $\bar{\beta}$ рассматриваемые функции монотонно возрастают. На левой границе области определения имеем $\Gamma_N(\alpha_{1*}) = (2/N) \sqrt{2\bar{\beta}(\bar{\beta} + 1)}$ ($N = 1, 2$), причем для функции $\gamma = \Gamma_1(\alpha)$ при $0 < \bar{\beta} < 1/7$ ($\bar{\beta} \geq 1/7$) выполняются соотношения $\Gamma_1(\alpha_{1*}) > \Gamma_1(\alpha_{2*})$ ($\Gamma_1(\alpha_{1*}) \leq \Gamma_1(\alpha_{2*})$), а для функции $\gamma = \Gamma_2(\alpha)$ при $0 < \bar{\beta} < 1$ ($\bar{\beta} \geq 1$) имеем $\Gamma_2(\alpha_{1*}) > \Gamma_2(\alpha_{2*})$ ($\Gamma_2(\alpha_{1*}) \leq \Gamma_2(\alpha_{2*})$).

Функции $\gamma = \Gamma_{-1}(\alpha)$ и $\gamma = \Gamma_{-2}(\alpha)$ монотонно убывают всюду в областях своего определения.

На фиг. 5 приведен пример анализа резонансных случаев для значений $\bar{\beta}$ из интервала $(0, 1/7)$ (для других значений $\bar{\beta}$ такой анализ может быть проведен аналогично). Сплошными линиями на фиг. 5 показаны графики функций $\gamma = \Gamma_N(\alpha)$ ($N = -2, -1, 1, 2$). Числа около графиков соответствуют номеру N .

Зафиксируем параметры $\beta = \bar{\beta}$ и $\gamma = \bar{\gamma}$, задающие рассматриваемое тело. Чтобы определить, при каких угловых скоростях его прецессии и собственного вращения (характеризуемых параметром α) возникают резонансы вида $\omega = N\Omega$ ($N = -2, -1, 1$ или 2), нужно найти число и абсциссы точек пересечения прямой $\gamma = \bar{\gamma}$ с графиками функций $\gamma = \Gamma_N(\alpha)$. Одна из таких прямых показана на фиг. 5 штриховой линией; она пересекает каждый из графиков функций $\gamma = \Gamma_1(\alpha)$ и $\gamma = \Gamma_2(\alpha)$ в двух точках, поэтому для выбранных $\bar{\beta}$ и $\bar{\gamma}$ есть два резонанса вида $\omega = \Omega$ и два резонанса вида $\omega = 2\Omega$, отвечающие разным значениям параметра α (разным угловым скоростям). Для других значений $\bar{\gamma}$ число резонансных случаев меняется в пределах от нуля до четырех.

4.5. *Периодические движения тела.* Пусть теперь параметры α, β, γ таковы, что имеет место одно из соотношений $\omega \approx N\Omega$ ($N = -2, -1, 1$ или 2). Тогда, следуя алгоритму, описанному в разд. 1 и 2, получим следующие 2π -периодические по φ движения тела, близкие к регулярной прецессии: угол θ отклонения оси $G\zeta$ тела от вертикали задается соотношением (θ_{2*}, ρ_{2*} – равновесные значения переменных θ_2, ρ_2 модельной системы)

$$\theta = \theta(\varphi) = \theta_0 + \varepsilon^{1/3} a_* \sqrt{2\kappa_* \rho_{2*}} \sin\left(N\varphi + \theta_{2*} + \frac{\pi}{2}(1 - \sigma) + \delta\right) + O(\varepsilon^{2/3})$$

где $\delta = \delta_N^+$ или $\delta = \delta_N^-$ ($N = 1$ или 2), $\kappa_* = (\kappa / c_{02}^*)^{2/3}$, а $\kappa = \kappa_N^+$ или $\kappa = \kappa_N^-$; величина c_{02}^* вычисляется по формуле, приведенной в (1.5), $\sigma = \text{sign } c_{02}^*$.

Угловые скорости $\psi'(\varphi)$ и $\varphi'(\varphi)$ прецессии и собственного вращения отличаются от своих невозмущенных постоянных значений (4.6) 2π -периодическими поправками порядка $\varepsilon^{1/3}$ и выше. Так как при достаточно малых значениях ε величина $\psi'(\varphi)$ сохраняет постоянный знак (в частности, $\psi' > 0$ при $\alpha > 0$), то точка M тела описывает в плоскости своего движения кривую, показанную на фиг. 3. Точки этой кривой отклонены от окружности радиуса $l \sin \theta_0$ (траектории точки M в невозмущенном движении) на величины порядка $\varepsilon^{1/3}$ и выше.

Зависимость угла φ от времени τ для рассматриваемых движений задается соотношением

$$\varphi(\tau) = \bar{\Omega}\tau + \varphi_0 + O(\varepsilon^{1/3}), \quad \bar{\Omega} = \Omega + O(\varepsilon^{1/3}) = \text{const}$$

в котором слагаемое $O(\varepsilon^{1/3})$ имеет по τ период $\bar{T} = 2\pi / \bar{\Omega}$. Такой же период по τ имеют величины θ, ψ' и φ' .

В зависимости от величины резонансной расстройки и постоянной энергии (определяющих значение параметра μ модельной системы) существуют одно или три описанных периодических движения тела, близких к регулярной прецессии.

В случае существования одного (при $\mu < 3/2$) такого движения оно устойчиво по отношению к переменным $\theta, \rho_\theta, \rho_\varphi$; в случае существования трех движений ($\mu > 3/2$) два из них, отвечающих наименьшей и наибольшей амплитудам отклонения от невозмущенного значения θ_0 , устойчивы, а одно, отвечающее средней по величине амплитуде, неустойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. Холостова О.В. О движении гамильтоновой системы с одной степенью свободы при резонансе в вынужденных колебаниях // Изв. РАН. МГТ. 1996. № 3. С. 167–175.
2. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 492 с.
3. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
4. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.X.2001