УДК 531.36

© 2002 г. В.Ф. Журавлёв

ИНВАРИАНТНАЯ НОРМАЛИЗАЦИЯ НЕАВТОНОМНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Предлагается новый алгоритм приведения неавтономных гамильтоновых систем к нормальной форме Биркгофа. В качестве критерия нормальной формы используется условие коммутирования векторных полей возмущенной и невозмущенной частей системы. Инвариантный характер критерия позволяет осуществлять нормализацию в единообразной форме без предварительного упрощения невозмущенной части и без разделения на случаи резонансный – нерезонансный, автономный – неавтономный. Весь алгоритм сведен к одномерной рекуррентной формуле. Результат получен благодаря использованию формулы Кемпбелла – Хаусдорфа для кольца асимптотик, а также решению в виде квадратуры гомологического уравнения.

Рассмотрены три примера, иллюстрирующие различные особенности нового алгоритма. Один из примеров представляет интерес для теории ядерного магнитного резонанса.

1. Введение. Метод локального анализа систем обыкновенных дифференциальных уравнений основывается на представлении рассматриваемой системы в виде суммы двух разных по смыслу частей. Первая часть называется *вырожденной системой* (чаще – порождающей, или невозмущенной). Вторая часть называется *возмущением*. Сколь угодно малое возмущение может приводить к немалым изменениям в поведении системы вплоть до качественного изменения топологии ее фазового потока. Это не только объясняет термин "вырожденная система", но и делает локальный анализ содержательным, так как в противном случае учет в уравнениях малых слагаемых не имел бы большого смысла.

Одним из основных методов локального анализа является метод нормальной формулы Пуанкаре. Если речь идет о гамильтоновой системе, то ее нормальная форма Пуанкаре связана с нормальной формой гамильтониана, которая называется нормальной формой Биркгофа [1]. Наиболее компактное определение этой формы можно найти в [2].

Проиллюстрируем характер такого определения на примере гамильтониана автономной консервативной колебательной системы, представленного в окрестности положения равновесия в виде

$$H(x,y) = i\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k y_k + \sum_{m,l>0} h_{ml} x^m y^l \tag{1.1}$$

Здесь x и y – комплексные комбинации координат и импульсов: $x = p + iq$, $y = p - iq$, положительные постоянные λ_k имеют смысл частот собственных колебаний линейной части системы, гамильтониан которой представлен в диагональном виде, а гамильтониан нелинейной части записан с использованием сокращенных обозначений типа $x^m = x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$. В этом случае говорят, что функция Гамильтона (1.1) имеет нормальную форму Биркгофа, если в нелинейной части присутствуют только такие слагаемые, для которых:

$$\sum_k (m_k - l_k)\lambda_k = 0 \tag{1.2}$$

Такие слагаемые называются резонансными. В неавтономном случае определение сложнее.

Если гамильтониан нелинейной части системы такого вида не имеет, то его приводят к этому виду посредством полиномиальных канонических замен, коэффициенты которых выбирают так, чтобы нерезонансные члены обращались в нуль.

Известны два способа построения таких замен: способ, основанный на использовании производящих функций (так поступал Биркгоф), и способ, в котором вместо производящих функций применяются генераторы Ли [3]. Второй способ удобнее, поскольку не требует обращения степенных рядов, что необходимо в случае производящих функций.

Метод генераторов Ли иногда называют методом Хори. Следует однако, заметить, что этот метод сам Хори применил не для нормализации гамильтонианов, а для поиска дополнительного первого интеграла [4]. Использование генераторов Ли для формирования рекуррентных процедур нормализации было реализовано в [5][1].

2. Инвариантное определение нормальной формы Биркгофа. Указанное выше определение нормальной формы, основанное на использовании комплексных комбинаций обобщенных координат и обобщенных импульсов совместно с приведением невозмущенной части к диагональной форме, выгодно отличается от других известных в литературе определений (например, использующих непосредственно канонические переменные, или переменные действие–угол). В этом определении не требуется отдельно описывать резонансный и нерезонансный случаи, чем и достигается большая компактность.

Определение можно сделать еще более компактным, если оно вообще не будет зависеть от того, в каких переменных записан исходный гамильтониан. Для этого достаточно обратиться к известному общему свойству, характеризующему нормальную форму независимо от способа ее определения: слагаемые в представлении (1.1), удовлетворяющие условию (1.2) и названные резонансными, не могут быть устранены никакими каноническими преобразованиями; эти слагаемые являются первыми интегралами невозмущенной системы.

Понятно, что это свойство не зависит от того, в каких переменных описывается система, оно является фундаментальным топологическим свойством нормальной формы, означающим, что векторные поля возмущенной и невозмущенной систем коммутируют. Естественно именно это свойство выбрать в качестве определения нормальной формы. Тогда конкретный вид резонансных членов для конкретно выбранных переменных будет следствием такого определения.

Определение. Возмущенный гамильтониан

$$H(t,q,p) = H_0(t,q,p) + H_*(t,q,p) \tag{2.1}$$

имеем нормальную форму Биркгофа тогда и только тогда, когда возмущение является первым интегралом невозмущенной части:

$$\partial H_* / \partial t + \{H_0, H_*\} = 0 \tag{2.2}$$

Для целей приведения в дальнейшем произвольного возмущенного гамильтониана к указанной форме дополнительно потребуем, чтобы гамильтониан был периодической функцией времени и чтобы общее решение невозмущенной системы было известно и было условно периодическим. •

Приведенное определение можно сделать еще более компактным, если время считать новой обобщенной координатой: $q_0 \equiv \lambda_0 t$ (величина λ_0 – равна отношению 2π к периоду) и ввести сопряженный этой координате импульс p_0, так что гамильтониан переписывается следующим образом: $H \to \lambda_0 p_0 + H$. Тогда определение нормальной

[1] См. также: *Маркеев А.П., Соколовский А.Г.* Некоторые вычислительные алгоритмы нормализации гамильтоновых систем: Препринт № 31. М.: Ин-т прикладной математики АН СССР, 1976. 61 с.

формы в виде $\{H_0, H_*\} = 0$ является общим как для автономного, так и для неавтономного случаев.

Данное определение удобно в последующем при формировании алгоритма нормализации. Как и само определение, этот алгоритм будет инвариантным по отношению к используемым переменным.

3. Алгоритм нормализации. Будем искать каноническое преобразование, приводящее гамильтониан

$$H(q, p) = H_0(q, p) + H_*(q, p)$$

к нормальной форме с помощью генераторов Ли.

Генератором Ли называется оператор некоторой вспомогательной гамильтоновой системы, фазовый поток которой индуцирует однопараметрическое семейство канонических преобразований, действующих в том же фазовом пространстве в котором определен и преобразовываемый гамильтониан. Гамильтониан этой вспомогательной системы называется производящим гамильтонианом.

Пусть $G(q, p)$ – искомый производящий гамильтониан. Это означает, что решение задачи Коши

$$dp / d\tau = \partial G / \partial p, \quad dp / d\tau = -\partial G / \partial q; \quad q(0) = u, \quad p(0) = v$$

определяет искомые канонические преобразования

$$q = q(\tau, u, v), \quad p = p(\tau, u, v)$$

Эти преобразования и обратные к ним могут быть записаны с помощью следующих рядов Ли:

$$q = u + \tau\{u, G\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{u, G\}, G\} + \ldots, \quad p = v + \tau\{v, G\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{v, G\}, G\} + \ldots,$$

$$u = q - \tau\{q, G\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{q, G\}, G\} - \ldots, \quad v = p - \tau\{p, G\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{p, G\}, G\} - \ldots$$

В этих формулах в случае прямых преобразований обозначения аргументов q и p в производящем гамильтониане $G(q, p)$ заменены обозначениями u и v: $G(u, v)$. Сама функция G в обоих случаях одна и та же.

Преобразованный гамильтониан связан с исходным также рядом Ли

$$\overline{H}(u, v) = H(u, v) + \tau\{H, G\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{H, G\}, G\} + \ldots \tag{3.1}$$

В дальнейшем будем считать, что малость возмущения формализована присутствием перед ним в качестве множителя малого параметра ε:

$$H(q, p) = H_0(q, p) + \varepsilon H_*(q, p)$$

В реальных задачах малый параметр может присутствовать естественным образом в виде некоторого конкретного параметра на самом деле малого по смыслу решаемой задачи. Если же такого параметра нет, то он может быть введен посредством преобразования подобия: $q \to \varepsilon q$, $p \to \varepsilon q$, где ε – скалярный параметр, рассматриваемый в окрестности нуля.

Предположим, что производящий гамильтониан разыскивается как функция ε: $G(q, p, \varepsilon)$. Назовем *асимптотикой k-го порядка* функции $G(q, p, \varepsilon)$ любую функцию $G_k(q, p, \varepsilon)$, отличающуюся от точной членами более высокого порядка малости, чем ε^k: $G_k = G + o(\varepsilon^k)$. Аналогичное определение имеется в виду и для искомого гамильтониана в нормальной форме, а также и для исходного гамильтониана в том случае, если малый параметр введен с помощью преобразования подобия.

Напомним основные свойства кольца асимптотик:

1) сложение $(G'+G'')_k = G'_k + G''_k$; нуль кольца асимптотик k-го порядка есть любая функция порядка большего, чем k : $0_k = o(\varepsilon^k)$;

2) умножение: $(G' \cdot G'')_k = G'_k \cdot G''_k$; единица: $1_k = 1 + o(\varepsilon^k)$ (кольцо асимптотик является унитарным);

3) сдвиг по шкале порядков: $(\varepsilon^s \cdot G)_k = \varepsilon^s G_{k-s}$ $(k - s \geqslant 0)$.

В дальнейшем поставим задачу последовательного нахождения асимптотик искомых гамильтонианов $\overline{H}$ и G, начиная с самых младших. Для этого перепишем формулу (3.1) для последовательных асимптотик, отождествив параметр производящей гамильтоновой группы τ с малым параметром ε: $\tau = \varepsilon$. В результате получаем цепочку конечных рядов

$$\begin{gathered}\overline{H}_0(u, v) = H_0(u, v), \quad \overline{H}_1(u, v) = H_1(u, v) + \tau\{H_0, G_0\} \\ \overline{H}_2(u, v) = H_2(u, v) + \tau\{H_1, G_1\} + \frac{\tau^2}{2!}\{\{H_0, G_0\}, G_0\}, \ldots \\ \ldots, \overline{H}_k(u, v) = H_k(u, v) + \tau\{H_{k-1}, G_{k-1}\} + \ldots + \frac{\tau^k}{k!}\underbrace{\{\ldots\{}_{k-\text{раз}} H_0, G_0\}, G_0\}, \ldots\}, \ldots\end{gathered} \tag{3.2}$$

Были использованы упомянутые выше свойства кольца асимптотик.

Воспользуемся еще раз свойством сдвига порядка для преобразования следующей скобки:

$$\{H_{k-1}, G_{k-1}\} = \{H_0, G_{k-1}\} + \{H_{k-1} - H_0, G_{k-1}\} = \{H_0, G_{k-1}\} + \{H_{k-1} - H_0, G_{k-2}\}$$

Последнее равенство следует из того, что $H_{k-1} - H_0 \approx \varepsilon$. Перепишем выражения (3.2) с учетом этого представления так:

$$\begin{gathered}\overline{H}_0 = H_0, \quad \overline{H}_1 = \tau\{H_0, G_0\} + H_1 \\ \overline{H}_2 = \tau\{H_0, G_1\} + \tau\{H_1 - H_0, G_0\} + \frac{\tau^2}{2}\{\{H_0, G_0\}, G_0\} + H_2, \ldots \\ \ldots, \overline{H}_k = \tau\{H_0, G_{k-1}\} + R_k \quad (k > 1), \ldots\end{gathered} \tag{3.3}$$

Через R_k обозначена функция, содержащая только младшие по отношению к G_{k-1} асимптотики:

$$R_k = H_k + \tau\{H_{k-1} - H_0, G_{k-2}\} + \sum_{i=2}^{k} \frac{\tau^i}{i!}\underbrace{\{\ldots\{}_{i-\text{раз}} H_{k-i}, G_{k-i}\}, G_{k-i}\}, \ldots\} \tag{3.4}$$

Первое приближение излагаемого метода приведения гамильтониана H к нормальной форме состоит в нахождении из второго уравнения системы (3.3) $\overline{H}_1$ и G_0. Если этим приближением ограничиваются, то асимптотику G_0 производящего гамильтониана можно не строить, поскольку она потребуется для нахождения второго приближения.

Полное построение первого приближения состоит в следующем. Добавим к уравнению первого приближения критерий нормальной формы

$$\overline{H}_1 = \tau\{H_0, G_0\} + H_1, \quad \{H_0, \overline{H}_1\} = 0 \tag{3.5}$$

Получена система двух линейных дифференциальных уравнений в частных производимых первого порядка для нахождения двух функций $\overline{H}_1(u, v)$ и $G_0(u, v)$. Системы такого типа называются *гомологическими* [6].

Приведем решение гомологической системы в явном виде. Для этого запишем общее решение

$$q = q(t, u, v), \quad p = p(t, u, v) \tag{3.6}$$

порождающей системы

$$dq / dt = \partial H_0 / \partial p, \quad dp / dt = -\partial H_0 / \partial q$$

с начальными условиями $q(0) = u$, $p(0) = v$.

Если подставить решение (3.6) в систему (3.5) (вместо переменной u вставить $q(t, u, v)$, а вместо переменной v вставить $p(t, u, v)$), то второе уравнение удовлетворяется тождественно. В первом уравнении $\overline{H}_1$ не изменит своего вида, поскольку $\overline{H}_1$ по определению есть первый интеграл порождающей системы. Скобка Пуассона вдоль траекторий порождающей системы равна полной производной по времени от G_0:

$$\{H_0, G_0\} = dG_0 / dt$$

Поэтому, интегрируя обе части этого уравнения по времени, получим

$$\int_0^t H_1[q(t, u, v), p(t, u, v)]dt = t\overline{H}_1 + \tau[G_0(u, v) - G_0(q(t, u, v)\, p(t, u, v))] \tag{3.7}$$

Таким образом, установлено, что, взяв интеграл по времени от асимптотики первого порядка заданного гамильтониана вдоль траекторий порождающей системы, получаем асимптотику первого порядка нормальной формы в виде множителя при t, а асимптотику первого порядка производящего гамильтониана в виде не зависящего от времени коэффициента при τ.

Перейдем ко второму приближению. Интегрируя по времени третье уравнение системы (3.3) вдоль траекторий (3.6), получаем

$$\int_0^t (\tau\{H_1 - H_0, G_0\} + \frac{\tau^2}{2}\{\{H_0, G_0\}, G_0\} + H_2)dt = t\overline{H}_2 + \tau G_1 - \tau G_1(t)$$

и так далее.

Произвольное приближение определяется следующей рекуррентной формулой:

$$\int_0^t R_k[q(t, u, v), p(t, u, v)]dt = t\overline{H}_k + \tau G_{k-1}(u,v) - \tau G_{k-1}[q(t, u, v), p(t, u, v)] \tag{3.8}$$

Функция $R_k(u, v)$ дается формулой (3.4) и полностью определена предыдущим приближением.

Таким образом, в любом приближении коэффициент при t в правой части равенства (3.8) есть искомая асимптотика нормальной формы, а не зависящий от времени коэффициент при τ есть соответствующая асимптотика производящего гамильтониана.

Замечание. Функцию $G_{k-1}(u, v)$ в формуле (3.8) можно построить также и посредством прямого вычисления следующим образом. Как установлено, искомая асимптотика нормальной формы $\overline{H}_k$ равна среднему по времени вдоль решений порождающей системы от функции R_k: $\overline{H}_k = \langle R_k \rangle$. Поэтому для нахождения искомой асимптотики производящего гамильтониана G_{k-1} достаточно разрешить относительно нее уравнение $\tau\{H_0, G_{k-1}\} + \tilde{R}_k = 0$, где $\tilde{R}_k = R_k - \langle R_k \rangle$ – дополнение к среднему. Решение подобного уравнения осуществляется так (см., например, [7]). Решения порождающей системы $\dot{u} = \partial H_0 / \partial v$, $\dot{v} = -\partial H_0 / \partial u$ в переменных u и v, т.е. $u = \varphi(t, u_0, v_0)$ и $v = \phi(t, u_0, v_0)$, следует подставить в выражение для $\tilde{R}_k(u, v)$ и вычислить

$$N_k(t, u_0, v_0) = \int \tilde{R}_k[\varphi(t, u_0, v_0), \phi(t, u_0, v_0)]dt.$$

После чего, разрешив u_0 и v_0 через u и v, найти

$$G_{k-1}(u, v) = -(1/\tau)N_k[t, \varphi(-t, u, v), \phi(-t, u, v)]$$

Нетрудно показать, что полученная так функция действительно явно от времени не зависит.

4. О некоторых особенностях случая неавтономного гамильтониана. В неавтономном случае гамильтониан имеет вид (2.1), и, как уже было указано в разд. 2, изложенный алгоритм может быть применен после добавления к гамильтониану импульса, сопряженного времени t, который обозначим буквой T:

$$H(t, T, q, p) = T + H_0(t, q, p) + H_*(t, q, p) \tag{4.1}$$

Для удобства пользования полученными в разд. 3 формулами при рассмотрении конкретных примеров переменные t и T лучше обозначить, как q_0 и p_0.

Предположим, что гамильтониан (4.1) уже приведен к нормальной форме гамильтониана, т.е. для выражения (2.1) справедливо равенство (2.2). Неавтономный гамильтониан в нормальной форме также неавтономен. Это же можно сказать и про соответствующую ему систему Гамильтона. Однако она обладает важным свойством, позволяющим сильно упростить по сравнению с неавтономными системами общего вида ее анализ.

Теорема. Если система с гамильтонианом (2.1) удовлетворяет условию нормальной формы, то для построения общего решения соответствующих уравнений Гамильтона $\dot{q} = H_p$, $\dot{p} = -H_q$ достаточно:

а) найти общее решение $q = q(t', u', v')$, $p = p(t', u', v')$ порождающей системы

$$\dot{q} = \partial H_0 / \partial p, \quad \dot{p} = -\partial H_0 / \partial q$$

б) найти общее решение $q = q(t', u'', v'')$, $p = p(t, u'', v'')$ системы, определяемой только возмущением,

$$\dot{q} = \partial H_* / \partial p, \quad \dot{p} = -\partial H_* / \partial q$$

при условии, что в этой системе явно входящее в гамильтониан время положено равным нулю: $H_*(0, q, p)$.

Тогда общее решение исходной неавтономной системы представляется композицией в произвольном порядке полученных решений (вместо произвольных постоянных в решении второй системы подставляются решения первой или наоборот).

Доказательство. Воспользуемся расширением гамильтониана к автономной форме (4.1) и запишем уравнения Гамильтона

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{T} = -\frac{\partial H_0}{\partial t} - \frac{\partial H_*}{\partial p}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{\partial H_*}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_0}{\partial q} - \frac{\partial H_*}{\partial q}$$

с начальным условием $t(0) = 0$.

В силу условия $\{T + H_0, H_*\} = 0$ общее решение этой системы есть композиция решений следующих систем (доказательство можно найти, например, в [7]):

$$\dot{t} = 1, \quad \dot{T} = -\frac{\partial H_0}{\partial t}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H_0}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_0}{\partial q}, \quad t(0) = 0 \ \text{(система 1)}$$

$$\dot{t} = 0, \quad \dot{T} = -\frac{\partial H_*}{\partial t}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H_*}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_*}{\partial q}, \quad t(0) = 0 \ \text{(система 2)}$$

Интегрируя первые уравнения в обеих системах и подставляя найденные таким образом $t \equiv t$ для первой системы и $t \equiv 0$ для второй в оставшиеся уравнения и выполняя после их решения необходимую композицию, и получаем утверждаемое в теореме свойство.

5. Примеры. Следующие ниже примеры иллюстрируют различные особенности предложенного алгоритма нормализации.

В первом примере, хорошо известном в учебной литературе, иллюстрируется техника построения двух приближений. Он позволяет легко увидеть отличия от техники, которая используется в известных алгоритмах.

Пример 1. *Уравнение Дуффинга*

$$\ddot{q} + q + q^3 = 0$$

Соответствующий этому уравнению гамильтониан заменой $x = q - ip$, $y = q + ip$ приводится к виду

$$H = i(xy + \varepsilon(x+y)^4/32), \quad \varepsilon = 1$$

Первое приближение нормальной формы. Траектории порождающей системы, имеющей гамильтониан $H_0 = ixy$, таковы: $x = ue^{it}$, $y = ve^{-it}$. Интегрируя вдоль них гамильтониан, находим

$$\int_0^t H dt = i\int_0^t \left[uv + \frac{\tau}{32}(ue^{it} + ve^{-it})^4\right]dt =$$

$$= ituv + \frac{\tau}{32}\left(\frac{1}{4}u^4e^{4it} + 2u^3ve^{2it} + 6itu^2v^2 - 2uv^3e^{-2it} - \frac{1}{4}v^4e^{-4it}\right) + \tau G_0 \quad (\tau = \varepsilon)$$

$$G_0 = -\frac{1}{32}\left(\frac{1}{4}u^4 + 2u^3v - 2uv^3 - \frac{1}{4}v^4\right)$$

Асимптотика первого порядка нормальной формы есть коэффициент при t:

$$\overline{H}_1 = i\left(uv + \frac{3}{16}\tau u^2v^2\right)$$

Первое приближение G_0 для производящего гамильтониана есть не зависящий от времени коэффициент при τ.

Второе приближение нормальной формы. Вычислим R_2:

$$R_2 = H + \tau\{H - H_0, G_0\} + \frac{\tau^2}{2}\{\{H_0, G_0\}, G_0\}, \quad H - H_0 = \frac{i\tau}{32}(u+v)^4$$

Найдем

$$\{H_0, G_0\} = -\frac{i}{32}(u^4 + 4u^3v + 4uv^3 + v^4)$$

Подставим $H - H_0$ и $\{H_0, G_0\}$ в выражение для R_2, после чего проинтегрируем $R_2(u, v)$ вдоль траекторий порождающей системы $u \to u\exp it$, $v \to v\exp(-it)$. Выделяем в полученном выражении коэффициент при t

$$\overline{H}_2 = i\left(uv + \frac{3\tau}{16}u^2v^2 - \frac{17\tau^2}{256}u^3v^3\right)$$

Это и есть при $\tau = 1$ нормальная форма гамильтониана осциллятора Дуффинга во втором приближении. Поскольку этим приближением и ограничиваемся, то функцию G_1, необходимую для построения третьего приближения, приводить не будем.

Следующий пример иллюстрирует тот факт, что предложенный алгоритм нормализации не связан условием обязательного представления гамильтониана в полиномиальной форме. Все существующие алгоритмы работают с полиномиальными гамильтонианами.

Пример 2. *Гамильтониан в виде рациональной функции.* Пусть гамильтониан, подлежащий нормализации, имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) + \frac{\varepsilon}{1+q^2}$$

Общее решение порождающей системы ($\varepsilon = 0$) имеет вид

$$q = u\cos t + v\sin t, \quad p = -u\sin t + v\cos t$$

Для построения первого приближения нормальной формы достаточно проинтегрировать гамильтониан по времени после подстановки в него записанного решения

$$\int_0^t H(u\cos t + v\sin t, -u\sin t + v\cos t)dt = \left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \varepsilon w\right]t + \varepsilon w[\operatorname{arctg}(ws(t)) - \operatorname{arctg} s(t)]_0^t;$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}}, \quad s(t) = \frac{-u\sin t + v\cos t}{u\cos t + v\sin t}$$

Отсюда следует первое приближение нормальной формы (коэффициент при t)

$$\overline{H}_1 = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \varepsilon w$$

Первое приближение производящего гамильтониана, задающего каноническое преобразование, приводящее исходный гамильтониан к этому виду, есть не зависящий от t коэффициент при ε:

$$G_0 = -w\left(\operatorname{arctg}\frac{wv}{u} - \operatorname{arctg}\frac{v}{u}\right)$$

В следующем примере иллюстрируется инвариантность рассматриваемого алгоритма по отношению к выбору исходных канонических переменных в нормализуемом гамильтониане. Во всех существующих алгоритмах требуется предварительное приведение порождающего гамильтониана к одной из простейших форм. В предлагаемом алгоритме это делать необязательно.

Пример 3. *Волчок Лагранжа на вибрирующем основании.* Рассмотрим задачу об устойчивости волчка Лагранжа в случае вибрации основания вдоль вертикальной оси. Задача о динамике волчка Лагранжа на вибрирующем в горизонтальной плоскости основании была рассмотрена ранее в [8] применительно к явлению ядерного магнитного резонанса (ЯМР).

Потеря устойчивости вертикального положения волчка при горизонтальной вибрации возникает, когда частота вибрации близка к частоте прецессионных колебаний волчка. Известное в литературе явление ЯМР есть резонанс прецессионного типа. Представляет интерес выяснить, при каких условиях возможен ЯМР второго рода, т.е. резонанс нутационного типа.

Запишем функцию Лагранжа, характеризующую динамику малых отклонений волчка от вертикали (например, в углах Крылова–Булгакова):

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (h + \Delta)(x\dot{y} - \dot{x}y) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)(1 + 2k\cos 2ht)$$

Здесь h – собственный кинетический момент, Δ определяет расстройку частот, k – интенсивность вертикальных колебаний основания.

Перейдем к безразмерному времени $t \to t'/h$, сохранив в дальнейшем для нового времени прежнее обозначение. Новая функция Лагранжа примет вид

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (1+\delta)(x\dot{y} - \dot{x}y) + \varepsilon(x^2 + y^2)(1 + 2k\cos 2t), \quad \varepsilon = \frac{1}{2h^2}, \quad \delta = \frac{A}{h}$$

Полагая, что собственный кинетический момент h велик, будем считать ε и δ малыми параметрами одинакового порядка малости.

Преобразование Лежандра позволяет получить функцию Гамильтона $H = H_0 + H_*$, в которой невозмущенная часть и возмущение имеют вид

$$H_0 = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + p_x^2 + p_y^2) - xp_y + yp_x$$

$$H_* = -\delta(xp_y - yp_x) + (x^2 + y^2)[2\delta - \varepsilon(1 + 2k\cos 2t)]$$

Связь обобщенных импульсов с исходными фазовыми переменными такая:

$$p_x = \dot{x} - (1+\delta)y, \quad p_y = \dot{y} + (1+\delta)x$$

Напомним, что в соответствии с вышеизложенным неавтономный гамильтониан должен быть приведен к автономному виду. В данном случае необходимо обозначить $2t = q_0$ и к H_0 прибавить $2p_0$.

Процедуру нормализации гамильтониана H осуществляем, не приводя его невозмущенную часть H_0 к диагональному виду. Для этого сразу выписываем общее решение порождающей системы

$$\dot{q}_0 = 2, \quad \dot{x} = p_x + y, \quad \dot{y} = p_y - x, \quad \dot{p}_x = -x + p_y, \quad \dot{p}_y = -y - p_x$$

которое имеет вид

$$q_0 = q_0' + 2t$$

$$x = x' + p_y' + (x' - p_y')\cos 2t + (y' + p_x')\sin 2t$$

$$y = y' - p_x' - (x' - p_y')\sin 2t + (y' + p_x')\cos 2t$$

$$p_x = -y' + p_x' - (x' - p_y')\sin 2t + (y' + p_x')\cos 2t$$

$$p_y = x' + p_y' - (x' - p_y')\cos 2t - (y' + p_x')\sin 2t$$

Штрихом помечены значения соответствующих функций при $t = 0$.

Подставляя это решение в исходный гамильтониан, вычисляя после этого от него интеграл от 0 до t и выделяя коэффициент при t, получим

$$\overline{H} = 2p_0 + \frac{1}{2}\xi_+ + yp_x - xp_y + \delta(yp_x - xp_y) + \frac{\delta - 2\varepsilon}{4}\xi_+ + \frac{\varepsilon k}{2}\xi_- \cos q_0 - \varepsilon k(xp_x + yp_y)\sin q_0$$

$$\xi_\pm = x^2 + y^2 \pm (p_x^2 + p_y^2)$$

(штрихи опущены). Здесь можно вернуться к исходному обозначению времени $q_0 = 2t$.

Основываясь на приведенной в разд. 4 теореме, для исследования далее устойчивости вертикального положения равновесия достаточно рассмотреть лишь возмущенную часть полученной нормальной формы в точке $t = 0$:

$$\overline{H}_* = \delta(yp_x - xp_y) + \frac{\delta - 2\varepsilon}{4}\xi_+ + \frac{\varepsilon k}{2}\xi_-$$

Характеристический полином этой линейной системы имеет вид

$$\lambda^4 + 2\gamma_+\lambda^2 + \gamma_-^2 = 0; \quad \gamma_\pm = \delta^2 \pm [(\delta/2 - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 k^2]$$

откуда и следует условие устойчивости $(\delta/2 - \varepsilon)^2 > \varepsilon^2 k^2$, которое перепишем в исходных обозначениях параметров: $(\Delta h - 1)^2 > k^2$.

6. Замечания. 1°. Основная идея предлагаемого алгоритма была опубликована [9] для автономных систем и в более узкой постановке.

2°. Отличительные особенности нового алгоритма:

а) порождающая система определяется только условием существования у нее известного условно-периодического общего решения;

б) критерий нормальной формы, используемый при формировании алгоритма, представляет собой условие коммутирования векторных полей возмущенной и невозмущенной частей системы;

в) алгоритм инвариантен к выбору исходных фазовых переменных в преобразовываемом гамильтониане;

г) резонансный, нерезонансный, автономный, неавтономный случаи рассматриваются в рамках единой схемы;

д) алгоритм не требует представления гамильтониана в полиномиальной форме;

е) в основу алгоритма положены не операции с рядами, а свойства кольца асимптотик; это позволило избежать схем типа многогранников Ньютона и выразить окончательный результат в виде одной рекуррентной формулы;

ж) решение гомологического уравнения получено в виде квадратуры.

3°. При вычислении асимптотик могут появляться недостоверные члены. Этого легко избежать, если в процессе вычислений любые члены более высокого порядка, чем порядок вычисляемой асимптотики, полагать равными нулю.

4°. Сведение алгоритма к вычислению квадратуры не сужает его возможности, а напротив, расширяет их. Если полагать преобразовываемый гамильтониан записанным в полиномиальной форме (как это и делается в других известных алгоритмах), то интегрировать приходится тригонометрические гармоники в целых положительных степенях, что сразу сводится к конечным формулам.

5°. В случае, близком к резонансному, возникает проблема малых знаменателей. Если спектр решения порождающей системы не зависит от начальных условий, то случай следует превратить в точно резонансный удалением малых членов из порождающей части в возмущение. Если спектр зависит от начальных условий, то, как и обычно, ситуация сложнее и требует различать случаи протыкания резонансной поверхности и случаи застревания вблизи нее.

6°. Возможны дальнейшие упрощения алгоритма. Используя уравнение первого приближения в системе (3.3), получим

$$\tau\{H_0, G_0\} = \overline{H}_1 - H_1$$

Это выражение можно использовать для уменьшения количества вычисляемых скобок Пуассона в последнем слагаемом в формуле (3.4):

$$\frac{\tau^k}{k!}\underbrace{\{\ldots\{}_{i-\text{раз}} H_0, G_0\}, G_0\}\ldots\} = \frac{\tau^{k-1}}{k!}\underbrace{\{\ldots\{}_{i-1-\text{раз}}\ \overline{H}_1 - H_1, G_0\}, G_0\}\ldots\}$$

Например, для построения второго приближения резольвента R_2 принимает вид

$$R_2 = \tau\{\tfrac{1}{2}(\overline{H}_1 + H_1) - H_0, G_0\} + H_2$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birkhoff G.D.* Dynamical Systems. N.Y.: Amer. Math. Soc., 1927. = *Биркгоф Д.Д.* Динамические системы. М., Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
2. *Брюно А.Д.* Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990. 296 с.
3. *Lie M.S.* Theorie der Transformationgruppen. V. 1, I Leipzig, Teubner, 1888.
4. *Hori G.-I.* Theory of general perturbation with unspecified canonical variables // Publ. Astron. Soc. Jap. 1966. V. 18, № 4. P. 287–296.
5. *Mersman W.A.* A new algorithm for the Lie transformation // Celest. Mech. 1970. V. 3. № 1. P. 81–89.
6. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
7. *Журавлёв В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Наука. Физматлит, 2001. 320 с.
8. *Журавлёв В.Ф.* Об одной форме уравнений движения симметричного твердого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 3. С. 5–11.
9. *Журавлёв В.Ф.* Новый алгоритм нормализации гамильтоновых систем по Биркгофу // ПММ. 1977. Том 61. Вып. 1. С. 12–17.

Москва

Поступила в редакцию
6.II.2001