УДК 531.36

© 2002 г. Ф.Д. Байрамов, М.Ю. Сафронов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ УСИЛИЯМИ

Методом функций Ляпунова исследуется устойчивость систем с распределенными параметрами и сосредоточенными усилиями, описываемых линейными уравнениями в частных производных (например, упругие конструкции с сосредоточенными массами, демпферами, упругие летательные аппараты с жесткими управляющими рулями и т.п.). Исходные уравнения высокого порядка путем введения дополнительных переменных представляются системой эволюционных уравнений и уравнений связей в частных производных первого порядка. В местах приложения сосредоточенных усилий некоторые фазовые функции терпят разрыв первого рода и выполняются условия сопряжения. Для этих систем разработан метод исследования устойчивости. Переход к уравнениям первого порядка значительно облегчает построение функционалов Ляпунова. В качестве примера рассмотрена устойчивость крутильных колебаний упругого крыла с подвешенным двигателем.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему уравнений первого порядка в частных производных

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B\frac{\partial\psi}{\partial x}+A_0\varphi+B_0\psi,\quad C\frac{\partial\varphi}{\partial x}+D\frac{\partial\psi}{\partial x}+C_0\varphi+D_0\psi=0 \tag{1.1}$$

$$x\in(0,1)\ \ x_i\neq 0,\ \ i=\overline{1,f},\ \ t\in I=[0,\infty)$$

где $\varphi=\varphi(x,t)$ – n-мерный вектор фазовых функций, $\psi=\psi(x,t)$ – s-мерный вектор фазовых функций, производные по времени которых в систему (1.1) не входят, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ – матрицы, элементы которых – ограниченные измеримые функции вместе со своими первыми производными, $A_0(x)$, $B_0(x)$, $C_0(x)$, $D_0(x)$ – матрицы, элементы которых – ограниченные измеримые функции.

Любое линейное уравнение в частных производных произвольного порядка или система таких уравнений путем введения дополнительных переменных приводится к виду (1.1) [1, 2]. Второе уравнение (1.1) появляется не только при понижении порядка частных производных, но и за счет тех уравнений без производных по времени, которые могут входить в исходную систему. Например, уравнение неразрывности – при описании течения несжимаемой жидкости и т.д.

При $x=0$ и $x=1$ заданы однородные граничные условия

$$\Gamma_1\varphi(0,t)+\Gamma_2\psi(0,t)=0,\quad \Gamma_3\varphi(1,t)+\Gamma_4\psi(1,t)=0 \tag{1.2}$$

где $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_4$ – матрицы постоянных.

Пусть в точках $x=x_i(i=\overline{1,f})$ к системе приложены сосредоточенные усилия, зависящие от фазовых функций, а в случае сил инерции – от их первых производных по времени. В этих точках некоторые фазовые функции терпят разрыв первого рода и имеют место следующие условия сопряжения:

$$\chi(x,t)=\chi''(x_i,t)+K_{1i}\chi''(x_i,t)+K_{2i}\frac{d\varphi''(x_i,t)}{dt},\quad i=\overline{1,f} \tag{1.3}$$

Здесь

$$\chi(x,t)=\left\|\begin{matrix}\varphi(x,t)\\ \psi(x,t)\end{matrix}\right\|;\quad \varphi'(x_i,t),\quad \varphi''(x_i,t)$$

$\chi'(x_i, t)$, $\chi''(x_i, t)$ – пределы функций $\varphi(x, t)$ и $\chi(x, t)$ при $x \to x_i$ соответственно слева и справа; $K_{1i}, K_{2i} (i=\overline{1,f})$ – $((n+s)\times(n+s))$-мерные постоянные матрицы коэффициентов, зависящие от вида приложенных усилий.

Решение системы (1.1)–(1.3) на участках между точками x_i при заданных начальных условиях $\varphi_0(x, t)$ рассматривается в классе непрерывно дифференцируемых по t, непрерывных и почти всюду дифференцируемых по x функций, а в точках разрыва x_i уравнения (1.1) заменяются условиями сопряжения (1.3) [3]. Нулевое решение $\varphi = \psi = 0$ соответствует невозмущенному состоянию.

Рассмотрим устойчивость решения $\varphi = \psi = 0$ системы (1.1)–(1.3) по двум мерам [4]

$$\rho=\int_0^1 \varphi^T\varphi dx,\quad \rho_0=\int_0^1 \varphi^T(x,t)\varphi(x,t)dx+\sum_{i=1}^{f} \varphi''^T(x_i,t)\varphi''(x_i,t)$$

где ρ и ρ_0 стесняют текущие и начальные возмущения соответственно.

2. Исследование устойчивости. Для решения поставленной задачи функцию Ляпунова будем строить в виде

$$V=\sum_{i=1}^{f+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi^T\upsilon_i(x)\varphi dx+\sum_{i=1}^{f} \varphi''^T(x_i,t)\omega_i\varphi''(x_i,t) \tag{2.1}$$

где $\upsilon_i(x)(i=\overline{1,f+1})$, $\omega_i(i=\overline{1,f})$–$(n \times n)$-мерные симметричные матрицы; элементы матриц $\upsilon_i(x)(i=\overline{1,f+1})$ – непрерывные и почти всюду дифференцируемые по x функции при $x \in (x_{i-1}, x_i)$; $x_0 = 0$, $x_{f+1} = 1$.

Воспользуемся методикой, приведенной ранее [2], и найдем производную функционала V. В силу первого уравнения (1.1) она равна

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{f+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\{\varphi^T\upsilon_i\left(A\frac{\partial\varphi}{\partial x}+B\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial\varphi^T}{\partial x}A^T+\frac{\partial\psi^T}{\partial x}B^T\right)\upsilon_i\varphi+\varphi^T(\upsilon_iA_0+A_0^T\upsilon_i)\varphi+$$

$$+\varphi^T\upsilon_iB_0\psi+\psi^TB_0^T\upsilon_i\varphi\}dx+\sum_{i=1}^{f} 2\varphi''^T(x_i,t)\omega_i\frac{d\varphi''(x_i,t)}{dt} \tag{2.2}$$

Следуя методу множителей Лагранжа, прибавим к этой производной выражение

$$\sum_{i=1}^{f+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(\varphi^TP_{1i}+\psi^TP_{2i})\left\{\left(C\frac{\partial\varphi}{\partial x}+D\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+C_0\varphi+D_0\psi\right\}dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{f+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left\{\left(\frac{\partial\varphi^T}{\partial x}C^T+\frac{\partial\psi^T}{\partial x}D^T\right)+\varphi^TC_0^T+\psi^TD_0^T\right\}(P_{1i}^T\varphi+P_{2i}^T\psi)dx \tag{2.3}$$

равное нулю в силу второго уравнения (1.1). Здесь $P_{1i}=P_{1i}(x)$ и $P_{2i}=P_{2i}(x)$ $(i=\overline{1,f+1})$ – пока произвольные $(n \times n')$- и $(s \times n')$-мерные матрицы, элементы которых – непрерывные и почти всюду дифференцируемые по x функции. В выражении (2.3) скобки $(\varphi^TP_{1i}+\psi^TP_{2i})$, $(P_{1i}^T\varphi+P_{2i}^T\psi)$ $(i=\overline{1,f+1})$ играют роль множителей Лагранжа.

Выполняя интегрирование по частям, получим

$$\frac{dV}{dt}=\sum_{i=1}^{f+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left\{-\varphi^T w_i\varphi+\psi^T\left(P_{2i}D_0+D_0^T P_{2i}^T-\frac{\partial P_{2i}D}{\partial x}\right)\psi+\right.$$

$$+\varphi^T\left[P_{1i}D_0+C_0^T P_{2i}^T+\upsilon_i B_0-\frac{\partial(\vartheta_i B+P_{1i}D)}{\partial x}\right]\psi+$$

$$+\psi^T\left[D_0^T P_{1i}^T+P_{2i}C_0+B_0^T\upsilon_i-\frac{\partial(B^T\upsilon_i+D^T P_{1i}^T)}{\partial x}\right]\varphi+$$

$$+\frac{\partial\varphi^T}{\partial x}(A^T\upsilon_i+C^T P_{1i}^T-\upsilon_i A-P_{1i}C)\varphi+\frac{\partial\psi^T}{\partial x}(D^T P_{2i}^T-P_{2i}D)\psi+$$

$$\left.+\frac{\partial\varphi^T}{\partial x}(C^T P_{2i}^T-\upsilon_i B-P_{1i}D)\psi+\psi^T(P_{2i}C-B^T\upsilon_i-D^T P_{1i}^T)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right\}dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{f}2\varphi''^T(x_i,t)\omega_i\frac{d\varphi''^T(x_i,t)}{dt}+$$

$$+\sum_{i=1}^{f+1}[\chi'^T(x_i,t)Q_i(x_i,t)\chi'(x_i,t)-\chi''^T(x_{i-1},t)Q_i(x_{i-1},t)\chi''(x_{i-1},t))] \qquad (2.4)$$

$$Q_i(x)=\begin{Vmatrix}\upsilon_i(x)A(x)+P_{1i}(x)C(x) & \upsilon_i(x)B(x)+P_{1i}(x)D(x)\\ B^T(x)\upsilon_i(x)+D^T(x)P_{1i}^T(x) & P_{2i}(x)D(x)\end{Vmatrix},\quad i=\overline{1,f+1}$$

$$w_i=\frac{\partial(\upsilon_i A+P_{1i}C)}{\partial x}-\upsilon_i A_0-A_0^T\upsilon_i-P_{1i}C_0-C_0^T P_{1i}^T,\quad i=\overline{1,f+1}$$

Пусть матрицы $\upsilon_i, P_{1i}, P_{2i}$ удовлетворяют уравнениям

$$\upsilon_i A+P_{1i}C=A^T\upsilon_i+C^T P_{1i}^T,\quad P_{2i}D=D^T P_{2i}^T$$

$$\upsilon_i B+P_{1i}D=C^T P_{2i}^T,\quad P_{2i}D_0+D_0^T P_{2i}^T=\frac{\partial P_{2i}D}{\partial x} \qquad (2.5)$$

$$\upsilon_i B_0+P_{1i}D_0+C_0^T P_{2i}^T=\frac{\partial(\upsilon_i B+P_{1i}D)}{\partial x};\quad x\in(x_{i-1},x_i),\ i=\overline{1,f+1}$$

$$K_{2i}Q_i(x_i)K_{2i}=0,\quad i=\overline{1,f}$$

и граничным условиям

$$\chi^T(x_0,t)Q_1(x_0,t)\chi(x_0,t)=0,\ \chi^T(x_{f+1},t)Q_{f+1}(x_{f+1},t)\chi(x_{f+1},t)=0 \qquad (2.6)$$

Подставив в соотношение (2.4) $\chi'(x_i,t)$ из уравнения (1.3) и $d\varphi''(x_i,t)/dt$ из уравнения (1.1), получим

$$\frac{dV}{dt}=-\sum_{i=1}^{f+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi^T(x,t)w_i\varphi(x,t)dx-\sum_{i=1}^{f}\chi''^T(x_i,t)h_i\chi''(x_i,t)+$$

$$+2\sum_{i=1}^{f}\chi''^T(x_i,t)\,\|R_iA\quad R_iB\|\left.\frac{\partial\chi''^T(x_i,t)}{\partial x}\right|_{x\to x_i+0} \qquad (2.7)$$

$$R_i=\begin{Vmatrix}\omega_i\\0\end{Vmatrix}+(K_{1i}^T+E)Q_i(x_i)\begin{Vmatrix}K_{2i}\\0\end{Vmatrix}$$

$$h_i = -\| R_iA_0 \quad R_iB_0 \| - \left\| \begin{matrix} A_0^T R_i^T \\ B_0^T R_i^T \end{matrix} \right\| - K_{1i}^T Q_i(x_i,t) - K_{1i}^T Q_i(x_i,t) K_{1i} - Q_i(x_i,t) K_{1i} -$$

$$-Q_i(x_i,t) + Q_{i+1}(x_i,t)$$

(E – единичная матрица).

Для того чтобы производная dV/dt (2.7) не содержала членов с производной по x, выберем матрицы ω_i $(i = \overline{1,f})$ из условия

$$R_iA(x_i) = R_iB(x_i) = 0, \quad i = \overline{1,f} \tag{2.8}$$

Согласно методу функций Ляпунова [5], нулевое решение системы (1.1)–(1.3) будет асимптотически устойчивым по двум мерам ρ и ρ_0, если функционал V (2.1) непрерывен по мере ρ_0 и определенно положителен по мере ρ, а его приозводная dV/dt определенно отрицательна по мере ρ.

Непрерывность функционала V (2.1) по мере ρ_0 непосредственно следует из непрерывности, а следовательно, ограниченности элементов матрицы $\upsilon_i(x)$ при $x \in (x_{i-1}, x_i)$ $(i = \overline{1, f+1})$. Остальные условия этого утверждения будут выполняться, если матрицы ω_i, h_i – неотрицательные, а матрицы $\upsilon_i(x)$, $w_i(x)$ – определенно положительные при любом $x \in (x_{i-1}, x_i)$, т.е.

$$\omega_i \geqslant 0,\ h_i \geqslant 0,\quad i = \overline{1,f};\quad \upsilon_i(x) > 0,\ w_i(x) > 0,\quad x \in (x_{i-1}, x_i),\quad i = \overline{1, f+1} \tag{2.9}$$

Пример. Рассмотрим устойчивость крутильных колебаний крыла с подвешенным к нему двигателем, которые описываются уравнением и граничными условиями в безразмерной форме

$$J\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(GI\frac{\partial y}{\partial x}\right) - M_1 y - M_2\frac{\partial y}{\partial x},\quad x \in (0,1),\quad x \neq x_* \tag{2.10}$$

$$y(0,t) = \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{x=1} = 0,\quad \lim_{x \to x_* - 0} y(x,t) = \lim_{x \to x_* - 0} y(x,t) - J_*\frac{d^2 y(x_*,t)}{dt^2}$$

Здесь

$$t = t_0\sqrt{\frac{g}{l}},\quad x = \frac{z}{l},\quad x_* = x_1 = \frac{z_*}{l},\quad GI = \frac{G_0 I_0}{m_k g l^2},\quad J = \frac{J_0}{m_k l^2}$$

$$M_1 = \frac{M_{10}}{m_k g},\quad M_2 = \frac{M_{20}}{m_k g},\quad J_* = \frac{J_{*0}}{m_k l^2}$$

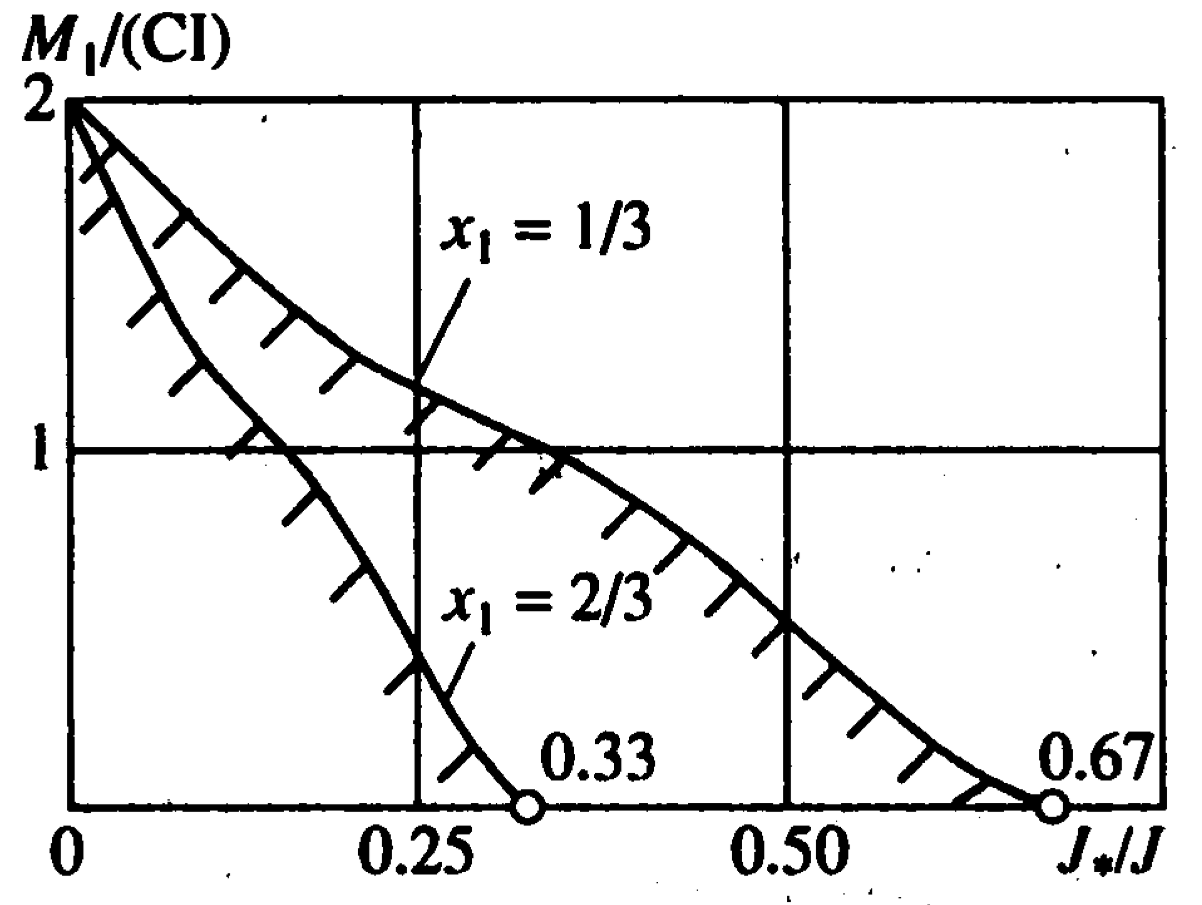
t_0 – время, l – длина консоли крыла, z – координаты точек крыла, z_* – координата места крепления двигателя, $y = y(x, t)$ – угол закручивания сечения крыла с координатой x, g – ускорение силы тяжести, $G_0I_0 = G_0I_0(x)$ – жесткость крыла на кручение, m_k – масса крыла, $M_{10} = M_{10}(x)$ – коэффициент погонного момента аэродинамических сил, $M_{20} = M_{20}(x)$ – коэффициент аэродинамического демпфирования, J_{*0} – момент инерции двигателя относительно оси жесткости крыла, $J_0 = J_0(x)$ – распределенный момент инерции крыла относительно оси жесткости.

Вводя новые переменные, запишем уравнения (2.10) в виде системы (1.1)–(1.3), где

$$\varphi_1 = y(x,t),\quad \varphi_2 = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t},\quad \varphi_3 = GI\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/J \\ 0 & GI & 0 \end{Vmatrix},\quad A_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -M_1/J & -M_2/J & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},\quad K_{21} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_* & 0 \end{Vmatrix}$$

$$C = \| 1 \quad 0 \quad 0 \|,\quad C_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{GI} \end{Vmatrix},\quad \Gamma_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix},\quad \Gamma_3 = \| 0 \quad 0 \quad 1 \|$$



а матрицы $B, B_0, D, D_0, \Gamma_2, \Gamma_4, K_{11}$ – нулевые. По уравнениям (2.4)–(2.8) построены матрицы $\upsilon_i(x), f_i(x) (i = 1, 2)$, ω, h со следующими элементами:

$$\upsilon_i^{(11)} = M_2 + M_1 c_2, \quad \upsilon_i^{(21)} = \upsilon_i^{(12)} = J(x), \quad \upsilon_i^{(31)} = \upsilon_i^{(13)} = (i-2)J_*(GIc_2)$$

$$\upsilon_i^{(22)} = J(x)c_2, \quad \upsilon_i^{(32)} = \upsilon_i^{(23)} = 2(i-1)(1-x)\tilde{J}_* J(x)/(GI), \quad \upsilon_i^{(33)} = c_2/(GI)$$

$$f_i^{(11)} = 2M_1, \quad f_i^{(22)} = 2M_2 c_2 - 2J(x) + (i-1)\tilde{J}_* d((1-x)J(x))/dx$$

$$f_i^{(13)} = 2(i-1)(1-x)\tilde{J}_* M_1, \quad f_i^{(23)} = 2(i-1)(1-x)\tilde{J}_* M_2/(GI)$$

$$f_i^{(33)} = 2/GI + 2(i-1)\tilde{J}_* d((1-x)/(GI))dx, \quad x \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = 1,2$$

$$\tilde{J}_* = J_*/((1-x_1)J(x_1)); \quad \omega^{(11)} = J_*/c_2, \quad \omega^{(12)} = J_*, \quad \omega^{(22)} = J_* c_2$$

$$h^{(33)} = 2J_*/(GI(x_1)J(x_1))$$

Здесь $f_i^{(kj)}$, $\upsilon_i^{(kj)}$, $\omega^{(kj)}$, $h^{(kj)}$ – элементы матриц f_i, υ_i, ω и h соответственно. Остальные элементы матриц f_i, υ_i, ω и h равны нулю.

Используя неравенство [2]

$$2\int_0^1 \varphi_1^2 dx \leq \int_0^1 \left(\frac{\varphi_3}{GI}\right)^2 dx \leq \frac{1}{\min\limits_x GI}\int_0^1 \frac{\varphi_3^2}{GI} dx$$

и учитывая произвольность выбора постоянной c_2, из соотношений (2.9) найдем условия асимптотической устойчивости крутильных колебаний крыла в виде

$$\min_x M_2 > 0, \quad 1 + \tilde{J}_* \xi > 0$$

$$\min_x M_1 + 4\min_x (GI)(1 + \tilde{J}_* \xi)/(1 + \sqrt{1 + 16J_*/J(x_1)}) > 0$$

$$\xi = \min_{x_1 < x < 1} [GId((1-x)/(GI))/dx] > 0$$

Для крыла постоянного профиля (GI, J, M_1, M_2 = const) условия устойчивости примут вид

$$M_2 > 0, \ 1 - \tilde{J}_* > 0, \ M_1 + 4GI(1 - \tilde{J}_*)/(1 + \sqrt{1 + 16J_*/J(x)}) > 0$$

На фигуре приведена область устойчивости, определяемая последними неравенствами в области параметров $M_1/(GI)$, $J_*/J(x_1)$ при разных значениях x_1. Штриховка произведена со стороны области устойчивости. Видно, что увеличение момента инерции двигателя и расстояния x_1 от точки подвеса двигателя до сечения заделки крыла приводят к уменьшению области устойчивости крыла.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Байрамов Ф.Д., Сиразетдинов Т.К.* Условие знакоопределенности интегральных квадратичных форм и устойчивости систем с распределенными параметрами // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 567–575.
2. *Байрамов Ф.Д.* Устойчивость и оптимальная стабилизация систем с распределенными параметрами. М.: Машиностроение, 1995. 160 с.
3. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 424 с.
4. *Мовчан А.А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 988–1001.
5. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987. 231 с.

Набережные Челны

Поступила в редакцию
23.III.2001