УДК 531.36

© 2002 г. А.С. Андреев, К. Ризито

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОБЩЕННОГО СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ

Исследуется влияние диссипативных сил на устойчивость обобщенного стационарного движения механической системы с нестационарными связями. Предварительно решается задача о предельном поведении решений неавтономной системы, для которой известны m первых интегралов и функция, убывающая на каждом решении системы. В качестве примера рассматривается движение гироскопа в кардановом подвесе, внешняя рамка которого совершает заданное неравномерное вращение.

Задача об устойчивости стационарных движений механической системы – одна из классических задач теории устойчивости. Она исследовалась в трудах ряда ученых ([1–9] и др.); подробный анализ этих исследований проведен в [10, 11].

Механические системы с нестационарными связями в отличие от систем со стационарными связями в общем случае имеют обобщенные стационарные движения, в которых циклические скорости являются некоторыми функциями времени [12, 13]. Задача об устойчивости обобщенного стационарного движения исследовалась ранее [12–16] (часть полученных результатов включена в книгу [17]) в предположении о наличии диссипативных сил с диссипацией по позиционным скоростям, однако их влияние не было учтено полностью.

1. Первые интегралы предельных систем. Рассмотрим систему, движение которой описывается дифференциальными уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(t,\mathbf{0})\equiv\mathbf{0} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ – вектор n-мерного действительного пространства R^n с нормой $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ (штрих означает транспонирование), $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ – вектор-функция, определенная и непрерывная в области $R^+ \times \Gamma$, $R^+ = [0, +\infty]$ – действительная полуось, $\Gamma \subset R^n$ – открытая область, содержащая точку $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Допустим, что вектор-функция $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет условию Липшица: для любого компактного множества $K \subset \Gamma$ найдется число $L = L(K)$, такое, что

$$\|\mathbf{X}(t,\mathbf{x}_2) - \mathbf{X}(t,\mathbf{x}_1)\| \leq L\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|$$

для любого $t \in R^+$ и любых точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$.

Отсюда следует, что для каждого начального условия $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $(t_0, \mathbf{x}_0) \in R^+ \times \Gamma$, существует единственное решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$, определенное на максимальном интервале $[t_0, \beta)$, $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) \to \partial\Gamma$ при $t \to \beta$.

Кроме того, система (1.1) предкомпактна [18]: для любой последовательности $t_k \to \infty$ найдется подпоследовательность $t_{kl} \to +\infty$, относительно которой существует предельная система уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^*(t,\mathbf{x}), \quad \mathbf{X}^*(t,\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}\lim_{l\to\infty}\int_0^t \mathbf{X}(t_{kl}+\tau,\mathbf{x})d\tau \tag{1.2}$$

Функция $\mathbf{X}^* : R \times \Gamma \to R^n$ в соответствии с известным построением [18] топологической динамики системы (1.1) такова, что для каждой точки $(t_0, \mathbf{x}_0) \in R \times \Gamma$ решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1.2) является единственным.

Введение предельных систем (1.2) позволяет определить следующее свойство квазиинвариантности положительного предельного множества $\omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)$ решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1.1) относительно семейства предельных систем (1.2).

Теорема 1.1 [18, 19]. Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ – решение системы (1.1), определенное и ограниченное некоторым компактом $K \subset \Gamma$, $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) \in K$ при всех $t \geqslant t_0$.

Тогда для каждой предельной точки $\mathbf{p} \in \omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)$ существует предельная система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^*(t,\mathbf{x})$ и решение этой системы $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$, $-\infty < t < +\infty$, такое что

$$\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{p}, \quad \mathbf{x}^*(t) \in \omega^+(t_0, \mathbf{x}_0), \quad \forall t \in R$$

Первым интегралом системы (1.1) [13, 17] является функция $U : R^+ \times \Gamma \to R$, которая непрерывна, удовлетворяет условию Липшица локально по $\mathbf{x}$ и постоянна вдоль каждого решения системы (1.1)

$$U(t, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)) = c_0 = \mathrm{const}, \quad \forall t \geqslant t_0$$

Ее верхняя правосторонняя производная в силу системы (1.1) равна нулю $D^+(U(t, \mathbf{x}) = 0$.

Предположим, что для системы (1.1) известны $m(1 \leqslant m < n)$ первых независимых интегралов

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{c}, \quad \mathbf{U}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_m)'$ – вектор m-мерного пространства R^m с нормой $\|\mathbf{c}\|^2 = c_1^2 + \ldots + c_m^2$, $\mathbf{U} : R^+ \times \Gamma \to R^m$ – непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица локально по $\mathbf{x}$.

Будем также предполагать, что функция $\mathbf{U}(t, \mathbf{x})$ ограничена, равномерно непрерывна по $(t, \mathbf{x})$ на каждом компактном множестве $K \subset \Gamma$, т.е. удовлетворяет условию: для каждого $K \subset \Gamma$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют числа $r = r(K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такие, что

$$\| U(t, \mathbf{x}) \| \leqslant r, \quad \| U(t_2, \mathbf{x}_2) | - U(t_1, \mathbf{x}_1) \| < \varepsilon \tag{1.4}$$

для любых значений $(t, \mathbf{x})$, $(t_1, \mathbf{x}_1)$ и $(t_2, \mathbf{x}_2) \in R^+ \times K$, таких, что

$$| t_2 - t_1 | < \delta, \quad \| \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \| < \delta$$

При этих условиях семейство сдвигов

$$\{\mathbf{U}_\tau(t, \mathbf{x}) = \mathbf{U}(\tau + t, \mathbf{x}), \ \tau \in R^+\}$$

предкомпактно в некотором функциональном пространстве F_U функций $\mathbf{U}$: $R \times \Gamma \to R^m$ с открыто компактной топологией [19]. Отсюда, в частности, следует, что для любой последовательности $t_k \to +\infty$ существуют подпоследовательность $\{t_{kl}\} \subset \{t_k\}$ и функция $\mathbf{U}^* \in F_U$, такая, что последовательность функций $\mathbf{U}_l(t, \mathbf{x}) = \mathbf{U}(t_{kl} + t, \mathbf{x})$ сходится к $\mathbf{U}^*(t, \mathbf{x})$ равномерно по $(t, \mathbf{x}) \in [-T, T] \times K$ для каждого $T \geqslant 0$ и каждого $K \subset \Gamma$.

Без особого ограничения общности будем считать, что каждая предельная функция $\mathbf{U}^*(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет условию Липшица локально по $\mathbf{x}$, так что можно определить производную $D^+\mathbf{U}^*(t, \mathbf{x})$ в силу системы (1.2).

Пусть

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^*(t, \mathbf{x}) \tag{1.5}$$

– какая-либо предельная система, определяемая последовательностью $t_k \to +\infty$. Выбором подпоследовательности $\{t_{kl}\} \subset \{t_k\}$ можно найти предельную функцию $\mathbf{U}^*(t, \mathbf{x})$ и составить предельную пару $(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*)$.

Лемма. Пусть совокупность (1.3) есть совокупность первых интегралов системы (1.1). $(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*)$ – предельная пара. Тогда $\mathbf{U}^*(t, \mathbf{x}) = \mathbf{c}$ – совокупность m первых интегралов системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}^*(t, \mathbf{x})$.

Доказательство. Пусть $(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*)$ – предельная пара, определяемая последовательностью $t_k \to +\infty$. Таким образом, при $k \to \infty$ имеем сходимости

$$\mathbf{X}_k(t, \mathbf{x}) = \mathbf{X}(t_k + t, \mathbf{x}) \to \mathbf{X}^*(t, \mathbf{x}), \mathbf{U}_k(t, \mathbf{x}) = \mathbf{U}(t_k + t, \mathbf{x}) \to \mathbf{U}^*(t, \mathbf{x})$$

при этом последняя сходимость является равномерной по $(t, \mathbf{x}) \in [-T, T] \times \mathrm{K}$ для каждого $T \geqslant 0$ и компакта $\mathrm{K} \subset \Gamma$.

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_0 \in \Gamma$, $\alpha < t < \beta$, есть какое-либо решение предельной системы (1.5). По построению такой системы, если из решений системы (1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_k, \mathbf{x}_0)$ составить последовательность $\{\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}(t_k + t, t_k, \mathbf{x}_0)\}$, то $\mathbf{x}_k(t) \to \mathbf{x}^*(t)$ равномерно по $t \in [\gamma_{1k}, \gamma_{2k}] \subset \subset (\alpha, \beta)$ $(\gamma_{1k} \to \alpha, \gamma_{2k} \to \beta$ при $k \to \infty)$ [18].

Вдоль каждого такого решения

$$\mathbf{U}(t, \mathbf{x}(t, t_k, \mathbf{x}_0)) = \mathbf{c}_k = \mathbf{U}(t_k, \mathbf{x}(t_k, t_k, \mathbf{x}_0)) = \mathbf{U}(t_k, \mathbf{x}_0)$$

Соответственно находим

$$\mathbf{U}_k(t, \mathbf{x}_k(t)) = \mathbf{U}(t_k + t, \mathbf{x}_k(t)) = \mathbf{U}(t_k + t, \mathbf{x}(t_k + t, t_k, \mathbf{x}_0)) = \mathbf{c}_k = \mathbf{U}(t_k, \mathbf{x}_0)$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, отсюда получаем

$$\mathbf{U}^*(t, \mathbf{x}^*(t)) = \mathbf{c}_0 = \mathbf{U}^*(0, \mathbf{x}_0), \quad \forall t \in (\alpha, \beta)$$

Лемма доказана.

2. Предельное поведение движений системы с первыми интегралами. Как известно [20], для существования определенно-положительной функции

$$\Phi = \Phi(U_1(t, \mathbf{x}), \ldots, U_m(t, \mathbf{x})), \quad \Phi(\mathbf{0}) = 0$$

необходимо и достаточно, чтобы такой же была функция $U_0(t, \mathbf{x}) = \|\mathbf{U}(t, \mathbf{x})\|$. В случае, когда функция $U_0(t, \mathbf{x})$ является лишь неотрицательной, были обоснованы [12–14] достаточные условия устойчивости нулевого решения системы (1.1) в предположении существования дополнительной функции $V = V(t, \mathbf{x})$, убывающей вдоль решений системы (1.1).

Рассмотрим задачу об исследовании предельного поведения решений системы (1.3) в предположениях, близких к условиям теорем из [14], на основе предельных систем и предельных функций Ляпунова [21].

Для удобства изложения в последующем обозначим через $h : R^+ \to R^+$ функцию типа Хана, т.е. такую функцию, что $h(0) = 0$, функция $h(a)$ непрерывна и строго монотонно возрастает.

Предположим, что для системы (1.1) известны две функции $U : R^+ \times \Gamma \to R^+$, $U(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, и $V : R^+ \times \Gamma \to R$, $V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, первая из которых есть первый интеграл, а вторая является непрерывной, ограниченной снизу, причем $V(t, \mathbf{x}) \geqslant m(\mathrm{K})$ для всех $(t, \mathbf{x}) \in R^+ \times \mathrm{K}$, $\mathrm{K} \subset \Gamma$, и удовлетворяет условию Липшица локально по $\mathbf{x}$, ее производная имеет оценку

$$D^+V(t, \mathbf{x}) \leqslant -W(t, \mathbf{x}), \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in R^+ \times \Gamma$$

где функция $W : R^+ \times \Gamma \to R$, $W(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, удовлетворяет условию Липшица

$$|W(t, \mathbf{x}_2) - W(t, \mathbf{x}_1)| \leqslant l \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|; \; l = l(\mathrm{K}), \; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathrm{K}$$

на каждом компакте $\mathrm{K} \subset \Gamma$.

Семейство сдвигов $\{W_\tau(t, \mathbf{x}) = W(\tau + t, \mathbf{x})\}$ будет предкомпактно в некотором функциональном пространстве F_W функций $W^* : R \times \Gamma \to R$ [18, 21], так что для любой последовательности $t_k \to +\infty$ существует подпоследовательность $\{t_{kl}\} \subset \{t_k\}$, такая, что последовательность $W_l(t,\mathbf{x}) = W(t_{kl}+t,\mathbf{x})$ сходится в F_W к некоторой функции $W^*(t, \mathbf{x})$.

Система (1.5), предельная к (1.1), и функции $U^*(t, \mathbf{x})$ и $W^*(t, \mathbf{x})$, предельные соответственно к $U(t, \mathbf{x})$ и $W(t, \mathbf{x})$, образуют предельную тройку $(\mathbf{X}^*, U^*, W^*)$, если они определяются одной последовательностью $t_k \to +\infty$.

Пусть $(\mathbf{X}^*, U^*, W^*)$ – предельная тройка. Обозначим через $M(c)$ множество точек $\mathbf{y} \in \Gamma$, для каждой из которых решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{x}^*(\mathbf{0}) = \mathbf{y}$, системы (1.5) содержится в множестве

$$\mathbf{x}^*(t) \in \{U^*(t,\mathbf{x}) = c = \mathrm{const}\} \cap \{W^*(t,\mathbf{x}) = 0\}, \quad \forall t \in R$$

Составим объединение $M^*(c)$ множеств $M(c)$ по всем предельным тройкам $(\mathbf{X}^*, U^*, W^*)$.

Теорема 2.1. Предположим, что для системы (1.1) существуют первый интеграл $U\colon R^+ \times \Gamma \to R^+$ и функции $V, W : R^+ \times \Gamma \to R$, такие, что

1) $\max(V(t,\mathbf{x}), U(t,\mathbf{x})) \geq h(\|\mathbf{x}\|), \quad \forall (t,\mathbf{x}) \in R^+ \times \Gamma$;

2) $D^+V(t,\mathbf{x}) \leq -W(t,\mathbf{x}) \leq 0$ для $(t,\mathbf{x}) \in R^+ \times \Gamma$, таких, что $V(t, \mathbf{x}) \geq U(t, \mathbf{x})$.

Тогда решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (1.1) устойчиво.

Кроме того, каждое ограниченное некоторым компактом $K \subset \Gamma$ решение $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1.1), вдоль которого функция

$$V(t,\mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0)) \geq c_0, \quad c_0 = U(t_0,\mathbf{x}_0), \quad \forall t \geq t_0$$

неограниченно приближается к множеству $\{M^*(c) : c = c_0 = \mathrm{const}\}$ при $t \to +\infty$.

Доказательство. Устойчивость решения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ доказана ранее [13, 14] (см. также [17]). Докажем вторую часть теоремы.

Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ – решение системы (1.1), ограниченное компактом K и такое, что $V(t, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)) \geq U(t_0, \mathbf{x}_0) = c_0$ для всех $t \geq t_0$. Из условия *2* теоремы имеем, что вдоль этого решения

$$D^+V(t,\mathbf{x}(t,t_0,x_0) \leq -W(t,\mathbf{x}(t,t_0,\mathbf{x}_0)) \leq 0, \quad \forall t \geq t_0$$

Пусть $\mathbf{p} \in \omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)$, так что существует последовательность $t_k \to +\infty$, такая, что $\mathbf{x}(t_k, t_0, \mathbf{x}_0) \to \mathbf{p}$. Выберем подпоследовательность $\{t_{kl}\} \subset \{t_k\}$, для которой существует предельная тройка $(\mathbf{X}^*, U^*, W^*)$. По теореме 1.1 (см. [18]) последовательность функций $\mathbf{x}_l(t) = \mathbf{x}(t_{kl} + t, t_0, \mathbf{x}_0)$ сходится равномерно по $t \in [-T, T]$ $(T > 0)$ к решению $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$ системы (1.5) с начальным условием $\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{p}$. Согласно лемме, имеем

$$U^*(t,\mathbf{x}^*(t)) = c_0 = \mathrm{const}, \quad \forall t \in R$$

Функция $V(t) = V(t, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)) \to c_1 = \mathrm{const} \geq c_0$ (монотонно убывая, стремится к значению c_1) при $t \to +\infty$. Из неравенств

$$V(t_{kl}+t) - V(t_{kl}-t) \leq -\int_{-t}^{t} W(t_{kl}+\tau,\mathbf{x}(t_{kl}+\tau,t_0,\mathbf{x}_0))d\tau \leq 0$$

предельным переходом при $t_{kl} \to \infty$ получам

$$\mathbf{x}^*(t) \in \{W^*(t,\mathbf{x}) = 0\}, \quad \forall t \in R$$

Таким образом, предельная точка $\mathbf{p} \in \omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)$ содержится в множестве $M(c_0)$, соответствующем предельной тройке $(\mathbf{X}^*, U^*, W^*)$. Все множество $\omega^+(t_0, \mathbf{x}_0) \subset M^*(c_0)$ и, значит, $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) \to M^*(c_0)$ при $t \to +\infty$.

Следствие. Если условие 2 теоремы 2.1 выполнено для всех $(t, \mathbf{x}) \in R^+ \times \Gamma$, то каждое ограниченное некоторым компактом $K \subset \Gamma$ решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ системы (1.1) неограниченно приближается к множеству $\{M^*(c) : c = c_0 = U(t_0, \mathbf{x}_0)\}$ при $t \to +\infty$.

Замечания. 1°. Пусть $t_l \to +\infty$ и $c \in R$. Определим множества $\underline{V}_\infty^{-1}(t,c)$ и $\overline{V}_\infty^{-1}(t,c)$ как множества точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \Gamma$, для каждой из которых существуют последовательности $\mathbf{x}_l \to \mathbf{x}$ и $\mathbf{y}_l \to \mathbf{y}$, такие, что соответственно

$$\underline{\lim_{l\to+\infty}} V(t_l+t,\mathbf{x}_l)=c, \quad \overline{\lim_{l\to+\infty}} V(t_l+t,\mathbf{y}_l)=c$$

Тогда локализация $\omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)$ в условиях теоремы 2.1 и следствия может быть уточнена следующим выводом: существует значение $c = c_1 = \text{const} \geqslant c_0$, такое, что для каждой предельной точки $\mathbf{p} \in \omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)$ соответствующее решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{p}$, системы (1.5) таково, что

$$\mathbf{x}^*(t)\in\{\underline{V}_\infty^{-1}(t,c):c=c_1=\text{const}\geqslant c_0\}, \quad \forall t\in R$$

Если вдоль решения системы (1.1) $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ при некотором $t_1 \geqslant t_0$ имеет место неравенство $V(t_1, \mathbf{x}(t_1, t_0, \mathbf{x}_0)) < c_0$, то локализация $\omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)$ представима в виде: для каждой точки $\mathbf{p} \in \omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)$ найдется решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$, $\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{p}$ некоторой предельной системы (1.5), такое, что

$$\mathbf{x}^*(t)\in\{\overline{V}_\infty^{-1}(t,c):c\leqslant c_0\}\cap\{U^*(t,\mathbf{x})=c_0\}, \quad \forall t\in R$$

2°. В силу условия (1.4) функция $U = U(t, \mathbf{x})$ допускает бесконечно малый высший предел. Поэтому если дополнительно предположить, что

$$|V(t,\mathbf{x})|\leqslant h_1(\|\mathbf{x}\|), \quad \forall(t,\mathbf{x})\in R^+\times\Gamma$$

то, согласно известным результатам [13, 14], устойчивость решения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ в теореме 2.1 является равномерной.

Аналогично теореме 2.1 доказывается следующая теорема.

Теорема 2.2. Предположим, что для системы (1.1) существуют первый интеграл $U : R^+ \times \Gamma \to R^+$ и две функции V, W: $R^+ \times \Gamma \to R$, такие, что

1) функция $V(t, \mathbf{x})$ определенно-положительна на множестве $\{U(t, \mathbf{x}) = 0\}$, т.е.

$$V(t,\mathbf{x})\geqslant h_1(\|\mathbf{x}\|), \quad \forall(t,\mathbf{x})\in R^+\times\Gamma : U(t,\mathbf{x})=0$$

допускает бесконечно малый высший предел, т.е.

$$|V(t,\mathbf{x})\leqslant h_2(\|\mathbf{x}\|), \quad \forall(t,\mathbf{x})\in R^+\times\Gamma$$

ее производная

$$D^+V(t,\mathbf{x})\leqslant -W(t,\mathbf{x})\leqslant 0, \quad \forall(t,\mathbf{x})\in R^+\times\Gamma$$

2) для каждой предельной тройки $(\mathbf{X}^*, U^*, W^*)$ множество

$$\{U^*(t,\mathbf{x})=0\}\cap\{W^*(t,\mathbf{x})=0\}$$

не содержит решений системы (1.5), кроме нулевого, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Тогда

1) нулевое решение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ равномерно устойчиво и является равномерно притягивающим для решений $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$, вдоль которых интеграл

$$U(t, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)) = c_0 = 0$$

2) каждое решение, вдоль которого интеграл $U(t, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)) = c_0 \neq 0$ (c_0 – достаточно мало), неограниченно приближается к множеству $M^*(c_0)$ при $t \to +\infty$.

3. Устойчивость обобщенного стационарного движения. Рассмотрим механическую систему с нестационарными, голономными и идеальными связями, положение которой определяется $n + m$ ($n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$) обобщенными координатами $\mathbf{q}' = (q_1, q_2, ..., q_n)$ и $\mathbf{z}' = (z_1, z_2, ..., z_m)$. При этом допустим, что $q_1, q_2, ..., q_n$ – позиционные координаты, $z_1, z_2, ..., z_m$ – циклические и соответственно функция Лагранжа имеет вид

$$L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{z}})=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}'A(t,\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}+\dot{\mathbf{q}}'B(t,\mathbf{q})\dot{\mathbf{z}}+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{z}}'C(t,\mathbf{q})\dot{\mathbf{z}}-\dot{\mathbf{q}}'\mathbf{g}(t,\mathbf{q})-\dot{\mathbf{z}}'\mathbf{f}(t,\mathbf{q})-\Pi(t,\mathbf{q}) \quad (3.1)$$

где $A(t, \mathbf{q})$ и $C(t, \mathbf{q})$ – положительно-определенные матрицы размерности $n \times n$ и $m \times m$, матрица $B(t, \mathbf{q})$ имеет размерность $n \times m$, $\mathbf{g}(t, \mathbf{q})$ и $\mathbf{f}(t, \mathbf{q})$ – матрицы-столбцы размерности $n \times 1$ и $m \times 1$, скалярная функция $\Pi(t, \mathbf{q})$ – потенциальная энергия. Предположим, что все функции переменных $(t, \mathbf{q})$, входящие в выражение (3.1), определены и непрерывно дифференцируемы до второго порядка включительно в области $R^+ \times \Gamma_0$, $\Gamma_0 = \{\mathbf{q} \in R^n\colon \|\mathbf{q}\| < \beta_0,\ 0 < \beta_0 \leqslant +\infty\}$ ($\|\mathbf{q}\|$ – евклидова норма вектора $\mathbf{q} \in R^n$), ограничены вместе со всеми своими производными при $(t, \mathbf{q}) \in R^+ \times \Gamma_1$, $\Gamma_1 = \{\mathbf{q}\colon \|\mathbf{q}\| \leqslant \beta_1,\ 0 < \beta_1 < \beta_0\}$, а также

$$\det A \geqslant \alpha_0, \det C \geqslant \alpha_0, \det(A - BC^{-1}B') \geqslant \alpha_0 = \mathrm{const}\, t > 0, \forall (t, \mathbf{q}) \in R^+ \times \Gamma_1$$

Пусть на систему действуют также обобщенные силы по позиционным координатам, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, которые непрерывно дифференцируемы в области $R^+ \times \Gamma_0 \times R^n$ и ограничены со своими производными при $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in R^+ \times \Gamma_1 \times \Gamma_2$, $\Gamma_2 = \{\dot{\mathbf{q}} : \| \dot{\mathbf{q}} \| \leqslant \beta_2,\ 0 < \beta_2 < +\infty\}$.

Движение системы описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{z}}} = \mathbf{0} \tag{3.2}$$

Из последних уравнений находим циклические интегралы

$$\partial L / \partial \dot{\mathbf{z}} = B'(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + C(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{f}(t, \mathbf{q}) = \mathbf{c} \tag{3.3}$$

где $\mathbf{c}' = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ – m произвольных постоянных. Разрешая уравнения (3.3) относительно $\dot{\mathbf{z}}$, получаем соотношения

$$\dot{\mathbf{z}} = C^{-1}(t, \mathbf{q})(\mathbf{c} + \mathbf{f}(t, \mathbf{q}) - B'(t, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) \tag{3.4}$$

Из условий, наложенных на функции, входящие в равенства (3.3) и (3.4), находим, что $\partial L / \partial \dot{\mathbf{z}}$ и $\dot{\mathbf{z}}$ – ограниченные, равномерно-непрерывные функции по $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{z}}) \in R^+ \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_3$ и $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c}) \in R^+ \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \Gamma_4$, где

$$\Gamma_3 = \{\dot{\mathbf{z}} \in R^m : \| \dot{\mathbf{z}} \| \leqslant \beta_3,\ 0 < \beta_3 < +\infty\}$$

$$\Gamma_4 = \{\mathbf{c} \in R^m : \| \mathbf{c} \| \leqslant \beta_4,\ 0 < \beta_4 < +\infty\}$$

Используя соотношения (3.3) и (3.4), находим функцию Рауса в следующей форме:

$$R = L - \dot{\mathbf{z}}' \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{z}}}\bigg|_{\dot{\mathbf{z}} = C^{-1}(\mathbf{c} + \mathbf{f} - B'\dot{\mathbf{q}})} = R_2 + R_1 - W$$

$$R_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 1/2\dot{\mathbf{q}}'F\dot{\mathbf{q}}, \quad F(t, \mathbf{q}) = A - BC^{-1}B'$$

$$R_1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c}) = \mathbf{E}'\dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{E}(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}) = BC^{-1}(\mathbf{c} + \mathbf{f}) - \mathbf{g}$$

$$W(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}) = \Pi + 1/2(\mathbf{c} + \mathbf{f})'C^{-1}(\mathbf{c} + \mathbf{f})$$

F – положительно-определенная матрица, функция W называется приведенной потенциальной энергией.

Уравнения движения могут быть выражены посредством уравнений Рауса

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial R_2}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} - G\dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{Q}, \quad \frac{d\mathbf{c}}{dt} \equiv \mathbf{0} \tag{3.5}$$

Матрица G определяется равенством

$$G(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}) = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} - \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}}\right)' = -G'$$

и может рассматриваться как матрица линейных гироскопических сил. В отличие от системы со стационарными связями в уравнениях (3.5) появились дополнительные слагаемые $(-\partial\mathbf{E}/\partial t)$, которые можно трактовать как инерционные силы, обусловленные нестационарностью связей.

Допустим, что для некоторого значения $(\mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0) \in \Gamma_0 \times R^m$ при всех $t \geqslant t_0$ имеет место равенство

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}(t,\mathbf{q}_0,\mathbf{c}_0)+\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(t,\mathbf{q}_0,\mathbf{c}_0)=\mathbf{Q}(t,\mathbf{q}_0,\mathbf{0}) \tag{3.6}$$

Тогда система (3.5) имеет при $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$ положение относительного равновесия

$$\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0},\quad \mathbf{q}(t)=\mathbf{q}_0 \quad (t\geqslant t_0) \tag{3.7}$$

которому соответствует обобщенное стационарное движение (ОСД) системы (3.2) [13, 14]

$$\dot{\mathbf{q}}(t)=\mathbf{0},\quad \mathbf{q}(t)=\mathbf{q}_0,\quad \dot{\mathbf{z}}(t)=C^{-1}(t,\mathbf{q}_0)(\mathbf{c}_0+\mathbf{f}(t,\mathbf{q}_0)) \tag{3.8}$$

В этом движении в отличие от стационарного циклические скорости не являются постоянными, а изменяются вместе с циклическими координатами в общем случае по нелинейному закону.

Рассмотрим задачу о предельном поведении движений системы (3.2) вблизи ОСД (3.8), используя лемму и теорему 2.2.

В силу условий, наложенных на функцию L и обобщенные силы $\mathbf{Q}$, уравнения движения (3.2) будут предкомпактными при их открыто компактном топологическом представлении [19]. При этом предельные уравнения имеют аналогичный вид и могут рассматриваться как уравнения движения некоторой предельной механической системы [21, 22] с функцией Лагранжа

$$L^*(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{z}})=1/2\dot{\mathbf{q}}'A^*(t,\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}+\dot{\mathbf{q}}'B^*(t,\mathbf{q})\dot{\mathbf{z}}+1/2\dot{\mathbf{z}}'C^*(t,\mathbf{q})\dot{\mathbf{z}}-\dot{\mathbf{q}}'\mathbf{g}^*(t,\mathbf{q})- \tag{3.9}$$

$$-\dot{\mathbf{z}}'\mathbf{f}^*(t,\mathbf{q})-\Pi^*(t,\mathbf{q})$$

под действием обобщенных сил $\mathbf{Q}^*$, где, например,

$$A^*(t,\mathbf{q})=\lim_{t_k\to+\infty}A(t+t_k,\mathbf{q}),\quad \mathbf{Q}^*(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=\lim_{t_k\to+\infty}\mathbf{Q}(t_k+t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$$

при этом сходимость равномерна по $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in [0, T] \times \Gamma_1 \times \Gamma_2$.

Предельные уравнения имеют циклические интегралы вида (3.3) и соответственно могут быть составлены предельная функция Рауса R^* и уравнения, предельные к (3.5),

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2^*}{\partial \dot{\mathbf{q}}}-\frac{\partial R_2^*}{\partial \mathbf{q}}=-\frac{\partial W^*}{\partial \mathbf{q}}-G^*\dot{\mathbf{q}}-\frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t}+\mathbf{Q}^*,\quad \frac{d\mathbf{c}}{dt}=\mathbf{0} \tag{3.10}$$

Если для значения $(\bar{\mathbf{q}}_0,\bar{\mathbf{c}}_0) \in \Gamma_0 \times R^m$ при всех $t \in R$ имеют место равенства

$$\frac{\partial W^*}{\partial \mathbf{q}}(t,\bar{\mathbf{q}}_0,\bar{\mathbf{c}}_0)+\frac{\partial \mathbf{E}^*}{\partial t}(t,\bar{\mathbf{q}}_0,\bar{\mathbf{c}}_0)=\mathbf{Q}^*(t,\bar{\mathbf{q}}_0,\mathbf{0}) \tag{3.11}$$

то система (3.10) имеет положение относительного равновесия

$$\dot{\mathbf{q}}^*(t)=\mathbf{0},\quad \mathbf{q}^*(t)=\bar{\mathbf{q}}_0,\quad \mathbf{c}=\bar{\mathbf{c}}_0 \tag{3.12}$$

а для системы (3.9) соответственно можно определить ОСД

$$\dot{\mathbf{q}}^*(t)=\mathbf{0},\quad \mathbf{q}^*(t)=\bar{\mathbf{q}}_0,\quad \dot{\mathbf{z}}^*(t)=(C^*(t,\bar{\mathbf{q}}_0))^{-1}(\bar{\mathbf{c}}_0+\mathbf{f}^*(t,\bar{\mathbf{q}}_0)) \tag{3.13}$$

Замечание. Предельные свойства движений системы (3.1) или (3.5), согласно теореме 1.1, определяются в общем случае не одной, а целым семейством предельных систем. Если решение (3.7) представляет собой какое-либо положение относительного равновесия системы (3.5) при $t \geq t_0$, то оно является им же для каждой предельной системы (3.10) при всех $t \in R$. Взаимосвязь между соответствующими ОСД (3.8) и (3.13) исходной системы (3.1) и предельной системы (3.9) определяется соотношениями

$$\dot{\mathbf{q}}^*(t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}^*(t) = \bar{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{q}_0,$$

$$\lim_{t_k \to \infty} \dot{\mathbf{z}}(t_k + t) = \lim_{t_k \to +\infty} C^{-1}(t_k + t, \mathbf{q}_0)(\mathbf{c}_0 + \mathbf{f}(t_k + t, \mathbf{q}_0)) = \dot{\bar{\mathbf{z}}}^*(t)$$

равномерно по $t \in [0, \beta]$ для каждого $\beta \in R$. Если для некоторого возмущенного движения (3.1) $(\dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t), \tilde{\mathbf{q}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t))$ его положительное предельное множество составляется из этих предельных ОСД, то имеем следующее свойство притяжения данного возмущенного движения к ОСД (3.8):

$$\lim_{t_k \to +\infty} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t_k + t) = \mathbf{0}, \quad \lim_{t_k \to +\infty} \tilde{\mathbf{q}}(t_k + t) = \mathbf{q}_0$$

$$\lim_{t_k \to +\infty} (\dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t_k + t) - \dot{\mathbf{z}}(t_k + t)) = \mathbf{0}$$

равномерно по $t \in [0, \beta]$, $\beta \in R$.

Заметим, что помимо положений относительного равновесия (3.7) любая из предельных систем (3.10) может иметь иные такие положения. Будем в дальнейшем полагать, что для каждого $\mathbf{c} = \text{const}$ их множество является конечным и одним и тем же для каждой предельной системы (3.10).

Для удобства дальнейшего изложения введем функцию $W_0(t, \mathbf{q}, \mathbf{c})$ и функцию $\gamma: R^+ \to R^+$, ограниченную, равномерно-непрерывную, положительную в среднем, так что соответственно

$$W_0(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}) = W(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}) - W(t, \mathbf{q}_0, \mathbf{c}_0), \quad \int_t^{t+\beta} \gamma(\tau) d\tau \geq \gamma_0 > 0$$

для любого $t \in R^+$ и некоторого $\beta = \text{const} > 0$. Функция $\gamma^*(t)$, предельная к $\gamma(t)$, будет такова, что для любого $t \in R$ найдется отрезок $[\alpha_1, \alpha_2] \subset [t, t + \beta]$, на котором $\gamma^*(t) > 0$.

Теорема 3.1. Пусть система (3.1) имеет ОСД (3.8), отвечающее значению $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$, при этом

1) функция $W_0(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}_0)$ определенно-положительна по $(\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$;

2) действующие силы и связи таковы, что

$$-\frac{\partial}{\partial t}(R_2(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + R_1(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c})) + \frac{\partial}{\partial t} W_0(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}) + Q'(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \leq -\gamma(t) h_1(\| \dot{\mathbf{q}} \|) \leq 0$$

$$\forall (t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c}) \in R^+ \times \{(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c}) : \| \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \| \leq \delta, \ \| \dot{\mathbf{q}} \| \leq \delta, \ \| \mathbf{c} - \mathbf{c}_0 \| \leq \delta > 0\}$$

3) ОСД (3.8) является изолированным для значения $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$, причем таким образом, что для любого $\eta > 0$ найдется $\varepsilon = \varepsilon(\eta) > 0$, такое, что выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} W_0(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}_0) + \frac{\partial}{\partial t} E(t, \mathbf{q}, \mathbf{c}_0) \right\| \geq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0, \quad \forall \mathbf{q} \in \{0 < \eta \leq \| \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \| \leq \delta\}$$

Тогда рассматриваемое ОСД (3.8) равномерно устойчиво, является равномерно притягивающим для возмущенных движений с циклическими постоянными $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$. Каждое возмущенное движение из области устойчивости (3.8), отвечающее значению $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 \neq \mathbf{c}_0$, неограниченно приближается при $t \to +\infty$ к одному из ОСД предельных систем, соответствующих значению $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1$.

Доказательство. Полагая

$$U = \| \mathbf{c} - \mathbf{c}_0 \|^2, \quad V = R_2 + W_0$$

из условий, наложенных на систему, и условий 1 и 2 теоремы находим, что при $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$ функция $V(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c}_0)$ определенно-положительна по $\mathbf{q} - \mathbf{q}_0$ в окрестности ОСД (3.8),

$$| V(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c} | \leq h_2(\| \dot{\mathbf{q}} \| + \| \mathbf{q} - \mathbf{q}_0 \| + \| \mathbf{c} - \mathbf{c}_0 \|)$$

$$\dot{V}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{c}) \leq -\gamma(t) h_1(\| \dot{\mathbf{q}} \|) \leq 0$$

В силу условия 3 теоремы предельное множество

$$N^* = \{\gamma^*(t) h_1(\| \dot{\mathbf{q}} \|) = 0\}$$

при $\mathbf{c} = \mathbf{c}_0$ не содержит движений предельных систем, кроме положений относительного равновесия

$$\dot{\mathbf{q}}^*(t) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}^*(t) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}_0$$

При $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 \neq \mathbf{c}_0$ максимально инвариантное подмножество $M^*(\mathbf{c}_1) \subset N$ представляет собой конечное множество положений (3.12), одно и то же для каждой предельной системы. В соответствии с теоремой 2.2. и замечанием имеем искомый результат.

Пример. Рассмотрим следующую задачу об устойчивости нестационарных вращательных движений гироскопа в кардановом подвесе. Пусть неподвижная ось вращения $O\zeta$ внешнего кольца карданова подвеса совершенного симметричного гироскопа вертикальна, соответственно ось вращения Ox внутреннего кольца подвеса перпендикулярна $O\zeta$, ось Oz – ось вращения симметричного ротора, центр тяжести ротора и внутреннего кольца общей массой m лежит на оси Oz с координатой z_0, $A = B$, C, A_1, B_1, C_1 – главные моменты инерции ротора и внутреннего кольца соответственно относительно системы координат $Oxyz$, A_2 – момент инерции внешнего кольца относительно $O\zeta$. За независимые координаты, определяющие положение равновесия рассматриваемой механической системы, примем традиционные эйлеровы углы: ψ – угол поворота внешней рамки, угол прецессии, θ – угол поворота внутренней рамки, угол между Oz и $O\zeta$, угол нутации, φ – угол поворота ротора вокруг оси Oz относительно внутреннего кольца, угол собственного вращения [23].

Пусть внешнее кольцо вращается по нестационарному закону

$$\psi = \psi(t), \quad | \psi(t) | \leq l, \quad | \dot{\psi}(t) | \leq l, \quad \forall t \geq 0$$

Допустим, что кроме силы тяжести на систему действуют также силы вязкого трения на оси внутреннего кольца [24], образующие момент $M_\theta = -\gamma(t) f(\dot{\theta})$, $\gamma(t)$ – функция, интегрально-положительная в среднем, $f(0) = 0$, $f(a)a > 0$ при $a \neq 0$.

Рассматриваемая система голономна, ее функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2}(A + A_1)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\dot{\varphi}^2 + C\dot{\psi}(t)\cos\theta\dot{\varphi} + \frac{1}{2}C\dot{\psi}^2(t)\cos^2\theta + \frac{1}{2}(A_2 + (A + B_1)\sin^2\theta +$$

$$+ C_1\cos^2\theta)\dot{\psi}^2(t) - Mgz_0\cos\theta$$

Координата φ – циклическая, соответствующий циклический интеграл

$$C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}(t)\cos\theta) = c = \mathrm{const}$$

Игнорируя φ, находим функцию Рауса

$$R = R_2 - W, \quad R_2(\dot{\theta}) = \frac{1}{2}(A + A_1)\dot{\theta}^2, \quad W(t, \theta, c) = Mgz_0\cos\theta - c\dot{\psi}(t)\cos\theta -$$

$$-\frac{1}{2}(A + B_1)\dot{\psi}^2\sin^2\theta - \frac{1}{2}C_1\dot{\psi}^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\frac{c^2}{C} - \frac{1}{2}A_2\dot{\psi}^2(t)$$

Положения относительного равновесия приведенной системы определяются из уравнения

$$\partial W / \partial\theta = -\sin\theta(c\dot\psi(t) - Mgz_0 + D\dot\psi^2(t)\cos\theta) = 0, \quad D = C_1 - A - B_1$$

Если $\dot\psi(t) \neq \mathrm{const}$, это уравнение имеет только решения $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, первому из которых соответствует ОСД

$$\dot\theta = 0, \quad \theta = 0, \quad \dot\varphi = c / C - \dot\psi(t) \tag{3.14}$$

в котором плоскость внутренней рамки вертикальна, совпадает с плоскостью внешней рамки, а ось Oz ротора направлена вертикально вверх. Второму решению соответствует аналогичное ОСД с осью Oz, направленной вертикально вниз.

Функция $W_0(t, \theta, c_0) = W(t, \theta, c_0) - W(t, 0, c_0)$ определенно-положительна по θ, $\partial W_0(t, \theta, c)/\partial t \leqslant 0$ при условиях

$$c_0\dot\psi(t) - Mgz_0 + D\dot\psi^2(t) \geqslant \nu_0 = \mathrm{const} > 0 \tag{3.15}$$

$$\ddot\psi(t)(c + 2D\dot\psi(t)) \leqslant 0$$

для $c : |c - c_0| < \delta > 0$.

По теореме 3.1 заключаем, что ОСД (3.14) при значении $c = c_0$, удовлетворяющем условиям (3.15), является равномерно устойчивым по $\dot\theta$, θ, $\dot\varphi$ и равномерно притягивающим относительно возмущенных движений со значением $c = c_0$.

Из условий (3.15) следует, что $\dot\psi(t) \to \dot\psi_0 = \mathrm{const}$ при $t \to +\infty$. Поэтому предельные ОСД представляют собой обычные стационарные движения гироскопа для случая $\dot\psi = \dot\psi_0 = \mathrm{const}$, существование и устойчивость которых подробно исследованы [23] (см. также [25]). Согласно полученным ранее результатам [23, 25] и теореме 3.1, находим, что для значений $c : |c - c_0| < \delta > 0$ каждое возмущенное движение стремится при $t \to +\infty$ к стационарному движению

$$\dot\theta = 0, \quad \theta = 0, \quad \dot\psi = c / C - \dot\psi_0 \tag{3.16}$$

Непосредственно на основе теоремы о локализации положительного предельного множества из [21] можно также исследовать предельное поведение в целом движений, для которых $c = c_0$ удовлетворяет условиям (3.15).

Если

$$|c_0\dot\psi_0 - Mgz_0| > |D|\dot\psi_0^2 \tag{3.17}$$

то каждое соответствующее движение гироскопа стремится при $t \to +\infty$ либо к движению (3.16), либо к движению

$$\dot\theta = 0, \quad \theta = \pi, \quad \dot\psi = \frac{c}{C} + \dot\psi_0$$

Если же знак неравенства в (3.17) противоположный, то к этим предельным движениям добавляется также стационарное движение

$$\dot\theta = 0, \quad \theta = \theta_0, \quad \cos\theta_0 = -\frac{c_0\dot\psi_0 - Mgz_0}{D\dot\psi_0^2}, \quad \dot\psi = \frac{c_0}{C} - \dot\psi_0\cos\theta_0$$

Авторы благодарят В.В. Румянцева за внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01005, 00-15-96150, 02-01-00877).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Routh E.J.* A Theatise on the Stability of a given State of Motion. London: McMillan, 1877. 108 p.
2. *Routh E.J.* The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. London: McMillan, 1884. 343 p.
3. *Ляпунов А.М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Харьков: Изд-во Харьк. мат. о-ва. 1888. 54 с.
4. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.
5. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений // ПММ. 1966. Т. 30. Вып. 5. С. 922–933.
6. *Румянцев В.В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
7. *Румянцев В.В.* Сравнение трех методов построения функций Ляпунова // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 916–921.
8. *Salvadori L.* Un'osservazione su di un criterio di stabilità del Routh // Rend. Accad. Sci. fis. e math. Soc. Naz. Sci. lett. ed arti. Napoli. 1953. V. 20. № 1/2. P. 269–272.
9. *Salvadori L.* Sull'estenzione ai sistemi dissipative del criterio di stabilità del Routh // Ric. mat. 1966. V. 15. № 1. P. 162–167.
10. *Карапетян А.В., Румянцев В.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. Т. 6. М.: ВИНИТИ, 1983. 132 с.
11. *Карапетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998. 165 с.
12. *Risito C.* The comparison method applied to the stability of systems with known first integrals // Zag. Dragan Nielin. 1974. V. 15. P. 25–45.
13. *Habets P., Risito C.* Stability criteria for systems with first integrals, generalizing theorems of Routh and Salvadori // Actes de la Conf. Intern. "Equa-Diff. 73". Paris: Hermann, 1973. P. 569–580.
14. *Risito C.* Metodi per lo studio della stabilità di sistemi con integrali primi noti // Ann. mat. pura ed appl. 1976. V. 107. P. 49–94.
15. *Cantarelli G.* Metodo per lo studio della stabilità dei moti merostatici generalizzati // Riv. mat. Univ. Parma. 1983. V. 9. P. 391–401.
16. *Cantarelli G.* Sulla stabilità dei moti merostatici generalizzati dei sistemi olonomi reonomi con coordinate ignorabili // Riv. mat. Univ. Parma. 1986. V. 12. P. 263–274.
17. *Rouche N., Habets P., Laloy M.* Stability Theory by Liapunov's Direct Metod. Berlin etc.: Springer, 1977. = *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
18. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equation // J. Differ. Equat. 1977. V. 23. № 2. P. 216–223.
19. *Sell G.R.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. V. 12. № 2. P. 241–283.
20. *Пожарицкий Г.К.* О построении функций Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 2. С. 145–154.
21. *Андреев А.С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 2. С. 225–232.
22. *Андреев А.С.* Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 388–396.
23. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе // ПММ. 1958. Т. 22. 1958. Вып. 3. С. 374–378.
24. *Николаи Е.Л.* Гироскоп в кардановом подвесе. М.: Наука, 1964. 136 с.
25. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.

Ульяновск, Парма (Италия)

Поступила в редакцию
20.XI.2001