

6. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
7. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
8. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
9. Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability theory by Liapunov's direct method. N. Y., etc.: Springer. 1977 = Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
10. Четаев Н.Г. О некоторых вопросах об устойчивости и неустойчивости для неправильных систем // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 6. С. 639–642.
11. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 423 с.
12. Schuster H. Deterministic chaos. Weinheim: Physik-Verlag, 1984 = Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 237 с.
13. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
14. Reitmann V. Reguläre und chaotische Dynamik. Leipzig: Teubner, 1996. 252 с.
15. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Ред. Р.А. Нелепин. М.: Наука, 1975. 447 с.
16. Леонов Г.А. Проблема Брокетта в теории устойчивости линейных дифференциальных уравнений // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 4. С. 134–155.
17. Perron O. Über eine Matrixtransformation // Math. Z., 1930. Bd. 32. S. 465–473.
18. Виноград Р.Э. Новое доказательство теоремы Перрона и некоторые свойства правильных систем // Успехи мат. наук. 1954. Т. 9. № 2. С. 129–136.

Санкт-Петербург
e-mail: leonov@math.spbu.ru

Поступила в редакцию
25.IX.2001

УДК 531.36

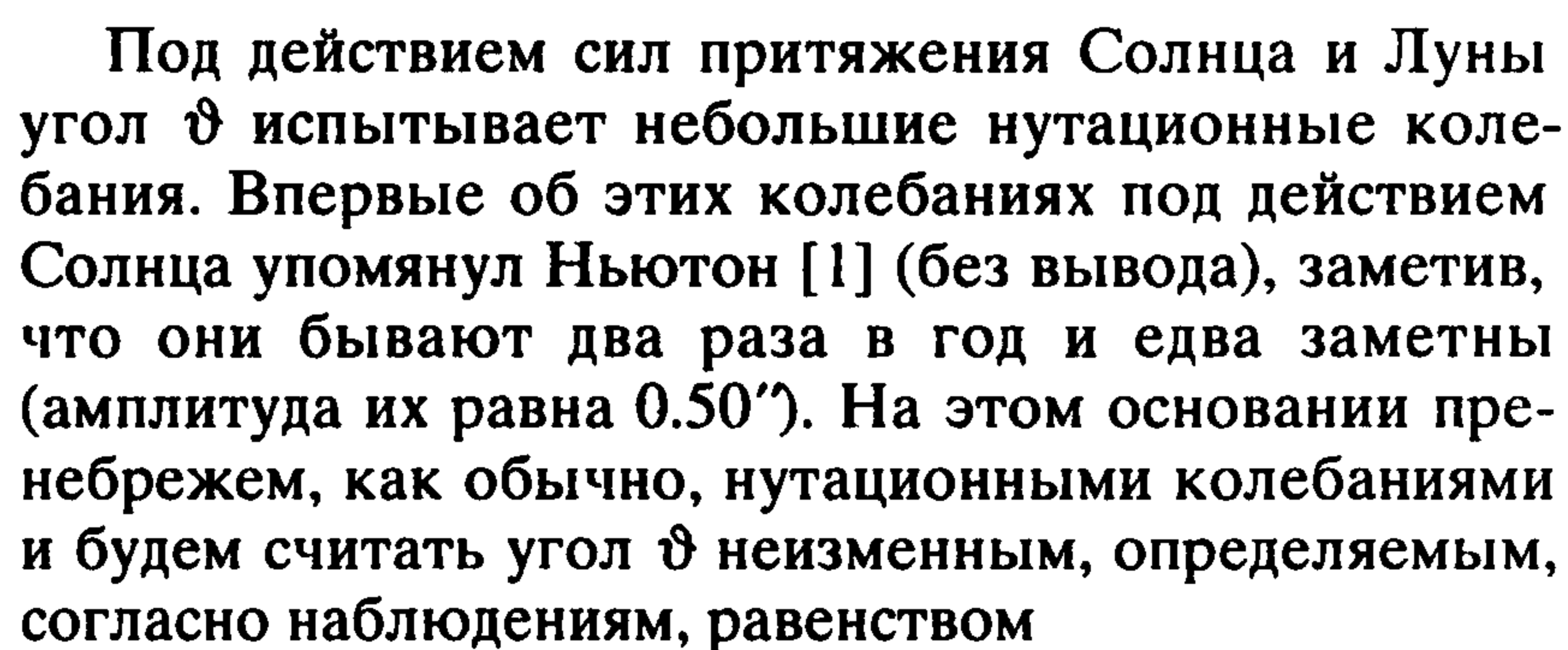
© 2002 г. Д.Р. Меркин

ЗЕМЛЯ – БЫСТРО ВРАЩАЮЩИЙСЯ ГИГАНТСКИЙ ГИРОСКОП

Предлагается метод расчета известной из наблюдений прецессии Земли с периодом 26 тыс. лет. Предполагается, что указанную прецессию можно рассчитывать исходя из прецессионной теории гироскопа, полагая быстро вращающимся гироскопом саму Землю. Прецессия Земли предполагается происходящей под действием момента сил притяжения к Солнцу и момента сил притяжения к Луне.

Еще Гиппарх, сравнивая свои наблюдения с наблюдениями предшественников, нашел, что ось Земли делает один оборот вокруг неподвижной оси прецессии примерно за 26 тыс. лет, причем прецессия земной оси происходит в сторону, противоположную видимому движению Солнца. Сравнивая угловую скорость ω суточного вращения Земли с угловой скоростью ω_π прецессии ее оси, найдем $\omega/\omega_\pi \sim 9.5 \cdot 10^6$. Это дает основание считать Землю гигантским быстро вращающимся гироскопом, к которому можно применить элементарную теорию, и в значительной степени упростить теоретическое обоснование прецессии земной оси.

Построим правую ортогональную систему координат $Ox\eta z$, в которой начало O находится в центре Земли, ось z направлена по ее оси собственного вращения к Северному полюсу, ось x направлена по линии узлов OY ; тогда ось y расположится в экваториальной плоскости Земли $Q - Q'$. Отметим на эклиптике $E - E'$ положение Солнца S . Дуга $YS = \lambda$ определяет долготу Солнца, которая всегда отсчитывается от линии узлов в сторону видимого движения Солнца. Положение подвижного трехгранника $Ox\eta z$ относительно неподвижных осей $Q\xi\eta\zeta$ (оси $O\xi$ и $O\eta$ расположены в плоскости эклиптики) определяется углом прецессии ψ и углом ϑ между осями ζ и z (см. фигуру); ось $O\xi$ выбирается произвольно.



Задача состоит в том, чтобы, пользуясь законом прецессии оси гироскопа, определить закон изменения угла ψ под действием сил притяжения Солнца и Луны.

$$M_x = 3 \frac{fM}{r^3} (C - A) \sin \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \lambda = \kappa \sin \vartheta \cos \vartheta (1 - \cos 2\lambda)$$

$$M_{\tau} = 0$$

$$\mathbf{x} = \frac{3}{2} \frac{fM}{r^3} (C - A) = \frac{3}{2} \omega_0^2 (C - A) \quad (3)$$

Вычисляя интегралы по λ от M_x , M_y найдем, что среднегодовое значение моментов сил тяготения Солнца направлено по линии узлов OY и определяется равенством

Перейдем к вычислению среднегодового значения моментов сил тяготения Луны, считая ее орбиту относительно Земли круговой. Учитывая, что массы Земли и Луны соизмеримы, угловую скорость ω_1 Луны относительно Земли определим из равенства

Здесь m – масса Земли, m_1 – масса Луны, r_1 – среднее расстояние от Земли до Луны.

Среднегодовое значение моментов сил тяготения Луны можно получить из равенства (4), если величину fM/r^3 заменить на $f m_1 / r_1^3$, определенную из равенства (5):

334

Воспользуемся теперь законом прецессии оси гироскопа

$$d\mathbf{K}/dt = \mathbf{u} \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{K} = C\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{u}$ – линейная скорость конца вектора $\mathbf{K}$, равную по модулю и коллинеарная моменту внешних сил. Угол между вектором $\boldsymbol{\omega}$ и направлением вектора угловой скорости прецессии равен $\pi - \vartheta$. Следовательно, угловая скорость прецессии земной оси будет равна

$$\dot{\psi} = \frac{\langle M_S \rangle + \langle M_M \rangle}{C\omega \sin(\pi - \vartheta)}$$

Пользуясь равенствами (4), (6) и $fM/r^3 = \omega_0^2$, то получим

$$\dot{\psi} = -\frac{3}{2} \left[\frac{\omega_0^2}{\omega} + \frac{\omega_1^2}{(1+m/m_1)\omega} \right] \frac{C-A}{C} \cos \vartheta$$

Интегрируя это равенство по t от 0 до $2\pi/\omega_0$, найдем изменение угла прецессии за один год:

$$\psi = -3\pi \left[\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{1}{(1+m/m_1)} \frac{\omega_1}{\omega} \frac{\omega_1}{\omega} \right] \frac{C-A}{C} \cos \vartheta \quad (8)$$

Для системы Солнце – Земля – Луна имеем

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{365 \cdot 25}, \quad \frac{\omega_1}{\omega} = \frac{1}{27 \cdot 32}, \quad \frac{m}{m_1} = 81,5 \quad (9)$$

Кроме того, для Земли установлено

$$(C-A)/C = 0.00325 \quad (10)$$

Пользуясь равенствами (1), (9), (10) и разбивая равенство (8) на две части, найдем годовое изменение угла ψ , происходящее от сил притяжения Солнца и Луны:

$$\psi_S = -15.87, \quad \psi_M = -34.38$$

В сделанных упрощающих предположениях общая прецессия за год равна $50.25''$, что весьма близко к непосредственно наблюдаемой величине годичной прецессии $50.236''$. (Гиппарх ошибся менее чем на 1%; действительно, время полного оборота земной оси вокруг оси эклиптики равно в годах $360^\circ/\psi = 360 \cdot 60 \cdot 60 / 50.236 = 25798$.)

Использованный здесь метод значительно проще и короче, чем применение уравнений Эйлера, и каждое действие физически наглядно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ньютон И. Математические начала натуральной философии // Собр. соч. акад. А.Н. Крылова. Т. 7. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. 696 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
2.IV.2001