

УДК 531.36

© 2002 г. Г.А. Леонов

## О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕАРИЗАЦИЙ

Введено понятие устойчивости по Красовскому. Получен критерий неустойчивости по Красовскому для нестационарных линеаризаций. Проведено сравнение этого критерия с теоремой Четаева.

В настоящее время хорошо развита теория устойчивости по первому приближению для нестационарных непериодических линеаризаций [1–9]. Здесь имеется много методов исследования и результатов об устойчивости различного типа: по Ляпунову, асимптотической, экспоненциальной [1–9].

Совершенно другая ситуация с критериями неустойчивости. Здесь широко известен лишь один результат: теорема Четаева о неустойчивости по первому приближению [10, 6].

Следует отметить, что интерес к вопросам неустойчивости стимулируется изучением странных аттракторов и хаотической динамики нелинейных систем [11–14]. Как правило, линеаризация вдоль большинства траекторий, принадлежащих странному аттрактору, является нестационарной, непериодической и имеет положительную ляпуновскую экспоненту.

Другой важной сферой применения критериев неустойчивости является теория управления, где часто применяются нестационарные обратные связи [15, 16]. При этом нелинейности не всегда являются дифференцируемыми. Поэтому здесь будут наложены лишь требования непрерывности в окрестности тривиального решения.

В настоящей работе вводится определение устойчивости по Красовскому и получен критерий неустойчивости по Красовскому для нестационарных линеаризаций. К доказательству этого критерия привлекаются методы, развитые ранее [17, 18].

Рассмотрим систему

$$dx/dt = F(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

где  $F(t, x)$  – непрерывная вектор-функция, такая, что  $F(t, 0) \equiv 0$ .

Несколько расширяя понятие экспоненциальной устойчивости [7, 8] на случай нулевого экспоненциального показателя, введем следующее определение.

*Определение.* Тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$  системы (1) назовем устойчивым по Красовскому, если существуют числа  $R$  и  $\varepsilon$ , такие, что для любого решения  $x(t, t_0, x_0)$  с начальными данными  $|x_0| \leq \varepsilon$  выполняется оценка

$$|x(t, t_0, x_0)| \leq R |x_0|, \quad \forall t \geq t_0 \quad (2)$$

$|x|$  – евклидова норма вектора  $x$ ,  $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ .

Отметим, что число  $R$  не зависит от выбора вектора  $x_0$  из шара  $\{|x| \leq \varepsilon\}$ . В случае, если  $R$  не зависит от выбора  $t_0 \in [0, +\infty)$ , будем говорить о равномерной устойчивости по Красовскому.

Обсуждались ([4], с. 23) очевидные соотношения между свойством (2) и устойчивостью по Ляпунову. Заметим, что многие классические критерии устойчивости по Ляпунову [1–9] являются также критериями устойчивости по Красовскому.

Рассмотрим систему

$$dx/dt = A(t)x + f(t, x), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

где  $A(t)$  – непрерывная, ограниченная на  $[0, +\infty)$   $(n \times n)$ -матрица. Будем полагать, что вектор-

функция  $f(t, x)$  непрерывна и в некоторой окрестности  $U(0)$  точки  $x = 0$  выполнено неравенство

$$|f(t, x)| \leq \kappa |x|^v, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in U(0); \quad \kappa > 0, \quad v > 1 \quad (4)$$

Введем в рассмотрение фундаментальную матрицу  $Z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ , составленную из линейно независимых решений  $z_j(t)$  системы

$$dz/dt = A(t)z \quad (5)$$

*Теорема.* Если выполнено неравенство

$$\sup_k \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{t} \left( I(t) - \sum_{j \neq k} \ln |z_j(t)| \right) \right] > 0, \quad I(t) = \int_0^t \operatorname{tr} A(\tau) d\tau \quad (6)$$

то решение  $x(t) \equiv 0$  системы (3) неустойчиво по Красовскому.

*Доказательство.* Положим  $t_0 = 0$  и проведем процедуру ортогонализации Шмидта

$$\begin{aligned} v_1(t) &= z_1(t), \quad v_2(t) = z_2(t) - v_1(t)^* z_2(t) \frac{v_1(t)}{|v_1(t)|^2}, \dots \\ \dots, v_n(t) &= z_n(t) - v_1(t)^* z_n(t) \frac{v_1(t)}{|v_1(t)|^2} - \dots - v_{n-1}(t)^* z_n(t) \frac{v_{n-1}(t)}{|v_{n-1}(t)|^2} \end{aligned}$$

Из этих соотношений следуют равенства

$$v_i(t)^* v_j(t) = 0, \quad \forall j \neq i; \quad |v_j(t)|^2 = v_j(t)^* z_j(t)$$

Последнее равенство влечет за собой оценку

$$|v_j(t)| \leq |z_j(t)| \quad (7)$$

Введем в рассмотрение унитарную матрицу

$$U(t) = \left( \frac{v_1(t)}{|v_1(t)|}, \dots, \frac{v_n(t)}{|v_n(t)|} \right)$$

и сделаем замену  $x = U(t)y$  в системе (3):

$$dy/dt = B(t)y + g(t, y) \quad (8)$$

где

$$B(t) = U(t)^{-1} A(t) U(t) - U(t)^{-1} \dot{U}(t), \quad g(t, y) = U(t)^{-1} f(t, U(t)y)$$

Известно [8], что  $B(t)$  – верхняя треугольная матрица с диагональными элементами  $b_{jj}(t)$  удовлетворяющими условию

$$J_{jj}(t) \equiv \int_0^t b_{jj}(\tau) d\tau = \ln \frac{|v_j(t)|}{|v_j(0)|} \quad (9)$$

Заметим, что в силу процесса ортогонализации выполнено соотношение

$$Z(t) = U(t)Q(t)$$

где  $Q(t)$  – верхняя треугольная матрица с диагональными элементами  $|v_j(t)|$ . Поэтому справедливо тождество

$$\prod_{j=1}^n |v_j(t)| = |\det Z(t)| = |\det Z(0)| \exp I(t)$$

Отсюда и из соотношений (7) и (9) получим оценку

$$J_{jj}(t) \geq \ln \frac{|\det Z(0)| \exp I(t)}{\prod_{i \neq j} |z_i(t)| |z_j(0)|} = I(t) - \sum_{i \neq j} \ln |z_i(t)| - \ln |z_j(0)| + \ln |\det Z(0)| \quad (10)$$

Не умаляя общности, в условии (6) можно считать, что супремум достигается при  $k = n$ . Поэтому из соотношений (6) и (10) следует существование числа  $\mu > 0$ , такого, что при достаточно больших  $t$  выполнена оценка

$$J_{nn}(t) \geq \mu t \quad (11)$$

Из последнего уравнения системы (8)

$$\dot{y}_n = b_{nn}(t)y_n + g_n(t, y)$$

следует равенство

$$y_n(t) = \exp J_{nn}(t) \left( y_n(0) + \int_0^t (\exp(-J_{nn}(\tau)) g_n(\tau, y(\tau)) d\tau \right) \quad (12)$$

Предполагая выполненной оценку (2), из условия (4) и ортогональности  $U(t)$  получим соотношение

$$|g(t, y(t))| \leq \kappa R^v |y(0)|^v \quad (13)$$

Заметим, что из оценки (11) следует существование числа  $\rho$ , для которого выполнено неравенство

$$\int_0^t \exp(-J_{nn}(\tau)) d\tau \leq \rho \quad \forall t \geq 0 \quad (14)$$

Выберем теперь начальные данные  $y(0)$  так, чтобы  $y_n(0) = |y(0)| = \delta$  и число  $\delta$  удовлетворяло соотношениям

$$\delta \leq \varepsilon, \quad \delta > \rho \kappa R^v \delta^v \quad (15)$$

Существование числа  $\delta$ , удовлетворяющего второму неравенству (15), следует из условия  $v > 1$ .

Из формулы (12), оценки (11) и неравенств (13)–(15) следует соотношение

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_n(t) = +\infty$$

Оно противоречит предположению о выполнении неравенства (2). Следовательно, решение  $x(t) \equiv 0$  неустойчиво по Красовскому. Теорема доказана.

*Замечания.* 1°. На самом деле доказан несколько более сильный результат: при выполнении условия (6) не может иметь места оценка

$$|x(t, t_0, x_0)| \leq R |x_0|^\alpha, \quad \forall t \geq t_0$$

где  $\alpha$  – любое положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\alpha > v^{-1}$$

2°. Условия (4) и (6) менее ограничительны, чем условия теоремы Четаева [10] о неустойчивости по Ляпунову. Однако здесь доказано более слабое утверждение: о неустойчивости по Красовскому. Вопрос о неустойчивости по Ляпунову при условиях (4) и (6) остается открытым.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950. 472 с.
2. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
3. Lefschetz S. Differential Equations: Geometric Theory. N. Y.; L.: Interscience, 1957. = Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 387 с.
4. Cesari L. Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations. Berlin: Springer, 1959. = Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 477 с.
5. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.

6. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955. 207 с.
7. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
8. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
9. Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability theory by Liapunov's direct method. N. Y., etc.: Springer. 1977 = Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
10. Четаев Н.Г. О некоторых вопросах об устойчивости и неустойчивости для неправильных систем // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 6. С. 639–642.
11. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 423 с.
12. Schuster H. Deterministic chaos. Weinheim: Physik-Verlag, 1984 = Шустер Г. Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 237 с.
13. Анищенко В.С. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990. 312 с.
14. Reitmann V. Reguläre und chaotische Dynamik. Leipzig: Teubner, 1996. 252 с.
15. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления / Ред. Р.А. Нелепин. М.: Наука, 1975. 447 с.
16. Леонов Г.А. Проблема Брокетта в теории устойчивости линейных дифференциальных уравнений // Алгебра и анализ. 2001. Т. 13. Вып. 4. С. 134–155.
17. Perron O. Über eine Matrixtransformation // Math. Z., 1930. Bd. 32. S. 465–473.
18. Виноград Р.Э. Новое доказательство теоремы Перрона и некоторые свойства правильных систем // Успехи мат. наук. 1954. Т. 9. № 2. С. 129–136.

Санкт-Петербург  
e-mail: leonov@math.spbu.ru

Поступила в редакцию  
25.IX.2001

УДК 531.36

© 2002 г. Д.Р. Меркин

## ЗЕМЛЯ – БЫСТРО ВРАЩАЮЩИЙСЯ ГИГАНТСКИЙ ГИРОСКОП

Предлагается метод расчета известной из наблюдений прецессии Земли с периодом 26 тыс. лет. Предполагается, что указанную прецессию можно рассчитывать исходя из прецессионной теории гироскопа, полагая быстро вращающимся гироскопом саму Землю. Прецессия Земли предполагается происходящей под действием момента сил притяжения к Солнцу и момента сил притяжения к Луне.

Еще Гиппарх, сравнивая свои наблюдения с наблюдениями предшественников, нашел, что ось Земли делает один оборот вокруг неподвижной оси прецессии примерно за 26 тыс. лет, причем прецессия земной оси происходит в сторону, противоположную видимому движению Солнца. Сравнивая угловую скорость  $\omega$  суточного вращения Земли с угловой скоростью  $\omega_\pi$  прецессии ее оси, найдем  $\omega/\omega_\pi \sim 9.5 \cdot 10^6$ . Это дает основание считать Землю гигантским быстро вращающимся гироскопом, к которому можно применить элементарную теорию, и в значительной степени упростить теоретическое обоснование прецессии земной оси.

Построим правую ортогональную систему координат  $Ox\eta z$ , в которой начало  $O$  находится в центре Земли, ось  $z$  направлена по ее оси собственного вращения к Северному полюсу, ось  $x$  направлена по линии узлов  $OY$ ; тогда ось  $y$  расположится в экваториальной плоскости Земли  $Q - Q'$ . Отметим на эклиптике  $E - E'$  положение Солнца  $S$ . Дуга  $YS = \lambda$  определяет долготу Солнца, которая всегда отсчитывается от линии узлов в сторону видимого движения Солнца. Положение подвижного трехгранника  $Ox\eta z$  относительно неподвижных осей  $Q\xi\eta\zeta$  (оси  $O\xi$  и  $O\eta$  расположены в плоскости эклиптики) определяется углом прецессии  $\psi$  и углом  $\vartheta$  между осями  $\zeta$  и  $z$  (см. фигуру); ось  $O\xi$  выбирается произвольно.