

УДК 539.3

© 2002 г. Г.Ю. Ермоленко

КВАДРАТУРЫ РЕШЕНИЙ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Методом, изложенным ранее [1], строятся квадратуры решений первой и второй начально-краевых задач теории упругости для однородного анизотропного тела конечных размеров с кусочно-гладкой границей произвольной формы.

1. Преобразование Фурье. Преобразование Фурье используемых в работе функций определим следующим образом [2]:

$$f^*(\mathbf{k}) = \int_{R^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}} d\mathbf{x}$$

Для того чтобы функция выражалась через свое преобразование Фурье по формуле обращения [2]

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\dots \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{x}_1 \mathbf{k}_1} d\mathbf{k}_1 \right] \dots \right] e^{i\mathbf{x}_n \mathbf{k}_n} d\mathbf{k}_n \quad (1.1)$$

необходимо, чтобы она удовлетворяла условиям [2]

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_k + t_k, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq c_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) |t_k|^\alpha$$

$$c_1 = \text{const}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad k=1, \dots, n \quad (1.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} c_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) dx_1 \dots dx_{k-1} < \infty, \quad \forall k$$

Теорема 1. Дифференцируемая, обладающая Фурье-образом функция представляется через свой Фурье-образ по формулам (1.1).

Доказательство. Функция, имеющая в точке M частную производную по переменной X_k , удовлетворяет в данной точке условию Гёльдера [3], т.е. существует такая конечная постоянная A_k , что для любого α , удовлетворяющего условию $0 < \alpha \leq 1$, выполняется неравенство

$$|f(x_1, x_2, \dots, x_k + t_k, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq A_k |t_k|^\alpha$$

Пусть область определения G рассматриваемых функций ограничена. Выбрав функции $c_k(x_1, \dots, x_j)$ из условия $c_k(x_1, \dots, x_j) = A_k$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} c_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) dx_1 \dots dx_{k-1} = A_k \int_{G_{k-1}} dx_1 \dots dx_{k-1} < \infty, \quad \forall k$$

т.е. функция $f(\mathbf{x})$ в точке M удовлетворяет условиям (1.2). Отсюда следует, что финит-

ные непрерывно-дифференцируемые функции восстанавливаются по своему Фурье-образу во всех точках своей области определения. Функции же, непрерывно-дифференцируемые в конечной области G и равные нулю вне этой области, восстанавливаются по своему Фурье-образу везде, кроме границы области, где функция и ее производные терпят разрыв.

2. Свертка функций по конечной области и ее преобразование Фурье. Под сверткой функций $f_1(\mathbf{x})$ и $f_2(\mathbf{x})$ по конечной области G_y будем понимать функцию $f(\mathbf{x})$, определяемую в области $G_x \subset R^n$ соотношением

$$f(\mathbf{x}) = \int_{G_y} f_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f_2(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.1)$$

Функции $f_1(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, $f_2(\mathbf{y})$ определены в областях G_{xy} , G_y . Область $G_y \subset R^n$ – конечная, а G_{xy} определяется областями G_x , G_y и выражением $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

Теорема 2. Пусть функции $f(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, $f_2(\mathbf{y})$ – абсолютно интегрируемы в своих областях определений и связаны соотношением (2.1).

Тогда для их Фурье-образов справедливо соотношение

$$f^*(\mathbf{k}) = f_1^*(\mathbf{k}) f_2^*(\mathbf{k})$$

Доказательство. Подвергнем функцию (2.1) преобразованию Фурье

$$\int_{G_x} f(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \int_{G_x} \left\{ \int_{G_y} f_1(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f_2(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} \quad (2.2)$$

Записывая правую часть равенства (2.2) в виде интеграла по области G в $2n$ -мерном пространстве и делая в этом интеграле замену переменных $z_i = x_i - y_i$, $y_i = y_i$ с якобианом, равным единице, приведем его к виду

$$\iint_{G_{zy}} f_1(\mathbf{z}) f_2(\mathbf{y}) e^{-i(\mathbf{z} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{k}} d\mathbf{z} d\mathbf{y} = \int_{G_z} f_1(\mathbf{z}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}} d\mathbf{z} \cdot \int_{G_y} f_2(\mathbf{y}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} d\mathbf{y} \quad (2.3)$$

Здесь G_{zy} – область значений новых переменных, а $G_z = G_{xy}$.

Из соотношений (2.2) и (2.4) следует утверждение теоремы.

3. Квадратура решения второй начально-краевой задачи. Рассмотрим вторую начально-краевую задачу динамической теории упругости [4]

$$\sigma_{lm,m}(\mathbf{x}, t) + F_l(\mathbf{x}, t) = \rho \ddot{u}_l(\mathbf{x}, t); \quad \varepsilon_{lj}(\mathbf{x}, t) = (u_{l,j}(\mathbf{x}, t) + u_{j,l}(\mathbf{x}, t)) / 2$$

$$\sigma_{lm}(\mathbf{x}, t) = \Gamma_{lmnp} \varepsilon_{pq}(\mathbf{x}, t); \quad \sigma_{lm}(\mathbf{x}_S, t) n_m(\mathbf{x}_S) = P_l(\mathbf{x}_S, t) \quad (3.1)$$

$$u_i(\mathbf{x}, t = 0) = u_{i0}(\mathbf{x}); \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, t = 0) = u_{i1}(\mathbf{x})$$

Здесь $\sigma_{lm}(\mathbf{x}, t)$, $\varepsilon_{pq}(\mathbf{x}, t)$ и Γ_{lmnp} – компоненты тензоров напряжений, деформаций и упругих постоянных, $F_l(\mathbf{x}, t)$ и $u_l(\mathbf{x}, t)$ – составляющие массовой силы и вектора перемещений, $u_{i0}(\mathbf{x})$ и $u_{i1}(\mathbf{x})$ – начальное распределение перемещений и их скоростей в деформируемом теле, S – поверхность, ограничивающая тело, $\mathbf{x}$ и t – координаты точек пространства и текущее время.

Подвергнем равенства (3.1) преобразованию Лапласа по времени t

$$\sigma_{lm,m}^*(\mathbf{x}, p) + \rho p^2 u_l^*(\mathbf{x}, p) = -F_l^*(\mathbf{x}, p) + \rho(p u_{l0}(\mathbf{x}) + u_{l1}(\mathbf{x}))$$

$$\sigma_{lm}^*(\mathbf{x}, p) = \Gamma_{lmnp} \varepsilon_{pq}^*(\mathbf{x}, p); \quad \varepsilon_{nq}^*(\mathbf{x}, p) = (u_{n,q}^*(\mathbf{x}, p) + u_{q,n}^*(\mathbf{x}, p)) / 2 \quad (3.2)$$

$$\sigma_{lm}^*(\mathbf{x}_S, p) n_m(\mathbf{x}_S) = P_l^*(\mathbf{x}_S, p)$$

Построим квадратуру решения исходной краевой задачи. Для этого воспользуемся свойствами фундаментального решения $R_{ln}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p)$ уравнения задачи (3.2), согласно которому любое его частное решение может быть представлено в виде [5]

$$u_l^*(\mathbf{x}, p) = \int_W R_{ln}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) \Psi_n^*(\mathbf{y}, p) d\mathbf{y} \quad (3.3)$$

Поместим деформируемое тело, занимающее объем V , в объем V_1 большего размера, так чтобы ограничивающая его поверхность S_1 не имела с поверхностью S общих точек. Объем, представляющий собой разность объемов V и V_1 , обозначим через V_2 : $V_2 = V_1 - V$; объем V_2 ограничен поверхностью S_2 , причем $S_2 = S_1 + S$.

Пусть функция $\Psi_n^*(\mathbf{y}, p)$ в объеме V совпадает с функцией $\Phi_n^*(\mathbf{y}, p)$ – правой частью динамического уравнения (3.2). Тогда из соотношения (3.3) получим

$$u_l^*(\mathbf{x}, p) = \int_V R_{ln}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) \Phi_n^*(\mathbf{y}, p) d\mathbf{y} + \int_{V_2} R_{ln}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) \Psi_n^{l*}(\mathbf{y}, p) d\mathbf{y} \quad (3.4)$$

В соотношении (3.4) $\Psi_n^{l*}(\mathbf{y}, p)$ – массовая сила, заданная в объеме V_2 . Определим ее таким образом, чтобы на поверхности S выполнялись краевые условия задачи (3.2). Для этого построим напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^*(\mathbf{x}, p) = & \frac{1}{2} \Gamma_{ij\alpha\beta} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_{\beta n}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} R_{\alpha n}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) \right] + \Phi_n^*(\mathbf{y}, p) d\mathbf{y} + \\ & + \frac{1}{2} \Gamma_{ij\alpha\beta} \int_{V_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_{\beta n}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} R_{\alpha n}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) \right] \Psi_n^{l*}(\mathbf{y}, p) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Умножим равенство (3.5) на $n_j(\mathbf{x})e^{-ik \cdot \mathbf{x}}$ и проинтегрируем по поверхности S . Получим

$$\begin{aligned} \int_S \sigma_{ij}^*(\mathbf{x}_S, p) n_j(\mathbf{x}_S) e^{-ik \cdot \mathbf{x}_S} dS = & \Gamma_i^l(\mathbf{k}, p) + \frac{1}{2} \Gamma_{ij\alpha\beta} \int_S n_j(\mathbf{x}_S) e^{-ik \cdot \mathbf{x}_S} \times \\ & \times \left\{ \int_{V_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_{\beta n}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} R_{\alpha n}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) \right] \Psi_n^{l*}(\mathbf{y}, p) d\mathbf{y} \right\} dS \end{aligned} \quad (3.6)$$

Используя краевые условия задачи (3.2), теорему Остроградского – Гаусса и теорему о свертке по конечной области, с помощью обозначений

$$M_l(\mathbf{k}, p) = P_l^{**}(\mathbf{k}, p) - \Gamma_l^l(\mathbf{k}, p)$$

$$N_{ln}(\mathbf{k}, p) = -\frac{1}{2} \Gamma_{lj\alpha\beta} (ik_j R_{\beta n, \alpha}^*(\mathbf{k}, p) + ik_j R_{\alpha n, \beta}^*(\mathbf{k}, p) - R_{\beta n, \alpha j}^*(\mathbf{k}, p) - R_{\alpha n, \beta j}^*(\mathbf{k}, p))$$

$$P_l^{**}(\mathbf{k}, p) = \int_S P_l^*(\mathbf{x}_S, p) e^{-ik \cdot \mathbf{x}_S} dS$$

$$R_{\beta n, \alpha}^*(\mathbf{k}, p) = \int_{V_z} \left[\frac{\partial}{\partial z_\alpha} R_{\beta n}(\mathbf{z}, p) \right] e^{-ik \cdot \mathbf{z}} d\mathbf{z}, \quad R_{\alpha n, \beta j}^*(\mathbf{k}, p) = \int_{V_z} \left[\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_\beta} R_{\alpha n}(\mathbf{z}, p) \right] e^{-ik \cdot \mathbf{z}} d\mathbf{z}$$

$$\Gamma_i^l(\mathbf{k}, p) = \frac{1}{2} \Gamma_{ij\alpha\beta} \int_S n_j(\mathbf{x}_S) e^{-ik \cdot \mathbf{x}_S} \left\{ \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_{\beta n}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} R_{\alpha n}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) \right] \Phi_n^*(\mathbf{y}, p) d\mathbf{y} \right\} dS$$

приведем систему уравнений (3.6) к виду

$$M_l(\mathbf{k}, p) = N_{ln}(\mathbf{k}, p) \Psi_n^{l**}(\mathbf{k}, p) \quad (3.7)$$

Система линейных алгебраических уравнений (3.7) представляет собой интегральный образ краевой задачи (3.2). Поскольку краевая задача (3.2) обладает единственным решением [4], то матрица системы уравнений (3.7) $N_{ln}(\mathbf{k}, p)$ имеет обратную матрицу $N_{nl}^{-1}(\mathbf{k}, p)$, которая может быть построена по известной методике. Поэтому

$$\Psi_n^{l**}(\mathbf{k}, p) = N_{nl}^{-1}(\mathbf{k}, p) M_l(\mathbf{k}, p) \quad (3.8)$$

Используя равенства (3.8) и (3.4), строим решение задачи (3.1)

$$u_l(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt} \left\{ \int_V R_{ln}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) \Phi_n^*(\mathbf{y}, p) d\mathbf{y} + \right. \\ \left. + \int_{V_2} R_{ln}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} N_{nq}^{-1}(\mathbf{k}, p) M_q(\mathbf{k}, p) d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 \right] d\mathbf{y} \right\} dp \quad (3.9)$$

Докажем, что квадратура (3.9) – решение начально-краевой задачи (3.1).

Теорема 3. Квадратура (3.9) удовлетворяет уравнениям движения начально-краевой задачи (3.1).

Доказательство. Для доказательства запишем равенство (3.9) в виде

$$u_l(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt} u_l^*(\mathbf{x}, p) dp \quad (3.10)$$

либо

$$u_l(\mathbf{x}, p) = \int_{V_1} \int_0^t R_{lj}^1(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) \Phi_j^1(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau \quad (3.11)$$

$$R_{lj}^1(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{p(t-\tau)} R_{lj}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) dp, \quad \Phi_j^1(\mathbf{y}, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{p\tau} \Phi_j^{l*}(\mathbf{y}, p) dp$$

Тогда для второй производной $\ddot{u}_l(\mathbf{x}, t)$ согласно свойствам преобразования Лапласа, получим

$$\ddot{u}_l(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt} [u_l^*(\mathbf{x}, p) - pu_{l0}(\mathbf{x}) - u_{l1}(\mathbf{x})] dp \quad (3.12)$$

Подставив выражения (3.11) и (3.12) в уравнения движения начально-краевой задачи (3.1), получим

$$\int_{V_1} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt} [(L)_{ml} R_{lj}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p) + \rho p^2 R_{lj}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, p)] \Phi_j^{l*}(\mathbf{y}, p) dp \right\} d\mathbf{y} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt} \Phi_m^*(\mathbf{x}, p) dp = 0 \quad (3.13)$$

Учитывая, что в соотношении (3.13) выражение в квадратных скобках представляет собой ядро единичного интегрального преобразования, получаем верное равенство.

Теорема 4. Квадратура (3.9) удовлетворяет начальным условиям задачи (3.1).

Доказательство. Доказательство совпадает с доказательством теоремы 2 в [1].

Теорема 5. Квадратура (3.9) удовлетворяет краевым условиям начально-краевой задачи (3.1)

Доказательство. Доказательство следует из свойств преобразования Лапласа и построения функции $\Psi_n^{1*}(y, p)$, приведенного в данной работе.

4. Квадратура решения первой начально-краевой задачи. Рассмотрим первую начально-краевую задачу динамической теории упругости. Она отличается от задачи (3.1) заменой первого граничного условия на условие

$$u_i(x_S, t) = u_{i0}(x_S, t)$$

Эта краевая задача отличается от задачи, рассмотренной ранее [1], только тем, что здесь упругое тело считается анизотропным. Поэтому для решения задачи достаточно воспользоваться вместо матрицы Купрадзе тензором Грина анизотропной задачи. Тогда квадратура решения рассматриваемой задачи примет вид

$$u_l(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{pt} \left\{ \int_V R_{lj}(x-y, p) [F_j^*(y, p) - p u_{j0}(y) - u_{j1}(y)] dy + \right. \\ \left. + \int_{V_1} R_{lj}(x-y, p) \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} e^{ik \cdot x} (Res_{jm}(k, p) u_{m0}^{**}(k, p) - Res_{jm}(k, p) \Phi_m^{**}(k, p)) dk \right] \right\} dy dp$$

Повторяя рассуждения, приведенные ранее [1], доказываем, что это решение удовлетворяет системе исходных дифференциальных уравнений, а также краевым и начальным условиям задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ермоленко Г.Ю., Юшков С.А. Способ решения первой начально-краевой задачи линейной теории упругости для изотропных тел // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 715–718.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 543 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть II. М.: Наука, 1980. 448 с.
4. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 662 с.
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.

Самара

Поступила в редакцию
21.XII.2001