

УДК 539.3

© 2002 г. А.В. Губа, Л.М. Зубов

О КРУЧЕНИИ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ УПРУГИХ ТЕЛ, СОДЕРЖАЩИХ ВИНТОВЫЕ ДИСЛОКАЦИИ

Рассматривается задача о напряженном состоянии призматического анизотропного стержня, содержащего винтовые дислокации, оси которых параллельны оси стержня. Такие дефекты могут возникать в процессе роста нитевидных кристаллов (металлических "усов"), а также могут существовать в многосвязных цилиндрических конструкциях. Сначала исследуется кручение анизотропного упругого бруса с многосвязным поперечным сечением в предположении об однозначности напряжений и деформаций, но при отказе от требования однозначности функции депланации. Краевая задача сформулирована относительно функции напряжений Прандтля, которая в отличие от функции депланации является однозначной в многосвязной области. Дана вариационная постановка краевой задачи для функции напряжений. Из полученного вариационного принципа выводится формулировка краевой задачи кручения при наличии сосредоточенных или непрерывно распределенных дислокаций. Предложена модификация мембранной аналогии для проблемы кручения, учитывающая присутствие дислокаций. Сформулированы общие теоремы теории кручения стержней, содержащих дислокации. Выведена эффективная формула для угла закручивания бруса, обусловленного заданным распределением дислокаций. Решены задачи о дислокациях в тонкостенном стержне и прямоугольном анизотропном брус.

1. Основные соотношения теории кручения анизотропного бруса. Система уравнений, описывающих кручение призматического тела из анизотропного материала, обладающего плоскостью упругой симметрии, ортогональной оси бруса, имеет вид [1]

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\gamma_{13} = k\tau_{13} + l\tau_{23}, \quad \gamma_{23} = l\tau_{13} + m\tau_{23} \quad (1.2)$$

$$\gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \omega x_2, \quad \gamma_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} + \omega x_1 \quad (1.3)$$

$$k = \frac{1}{G_{23}}, \quad m = \frac{1}{G_{13}}, \quad l = \frac{\mu_{31,12}}{G_{23}} = \frac{\mu_{23,31}}{G_{13}}$$

Здесь x_1, x_2 – декартовы координаты в плоскости поперечного сечения бруса, τ_{13}, τ_{23} – касательные напряжения, γ_{13}, γ_{23} – компоненты сдвиговой деформации, ω – угол закручивания, $w(x_1, x_2)$ – функция депланации, k, l, m – упругие податливости, G_{13}, G_{23} – модули сдвига, $\mu_{31,12}$ и $\mu_{23,31}$ – коэффициенты Ченцова [1]. Введя координатные орты $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{i}_2$, вектор касательных напряжений $\boldsymbol{\tau} = \tau_{13}\mathbf{i}_1 + \tau_{23}\mathbf{i}_2$, вектор сдвиговых деформаций $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_{13}\mathbf{i}_1 + \gamma_{23}\mathbf{i}_2$ и тензор податливостей $\boldsymbol{\lambda} = k\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + l(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1) + m\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2$, уравнения (1.1)–(1.3) представим в инвариантной форме

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0 \quad (1.4)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (1.5)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \operatorname{grad} w - \omega \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{e} = -\mathbf{i}_3 \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{r} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2$$

Здесь div и grad – плоские операторы дивергенции и градиента, $\mathbf{E}$ – единичный тензор, $\mathbf{e}$ – дискриминантный тензор, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки поперечного сечения.

Уравнения равновесия (1.4) тождественно удовлетворяются после введения функции напряжений Прандтля F

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{e} \cdot \text{grad} F \quad (1.7)$$

а исключение функции депланации w из соотношения (1.6) приводит к уравнению совместности деформаций

$$\text{div}(\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\gamma}) = 2\omega \quad (1.8)$$

Из (1.5), (1.7) и (1.8) вытекает уравнение для функции напряжений

$$\text{div}(\mathbf{L} \cdot \text{grad} F) = -2\omega \quad (1.9)$$

$$\mathbf{L} = -\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{e} = m\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 - l(\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1) + k\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2$$

Краевое условие для функции F на границе области σ , занимаемой поперечным сечением стержня, выражает собой отсутствие нагрузки на боковой поверхности призматического тела и, согласно (1.7), имеет вид

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = \partial F / \partial s = 0 \quad (1.10)$$

где $\mathbf{n}$ – единичная нормаль к $\partial\sigma$, s – текущая длина дуги плоской кривой $\partial\sigma$.

2. Обобщение теоремы Бредта. Пусть поперечное сечение бруса σ представляет собой многосвязную область, гомеоморфную кругу с круговыми отверстиями. Внешний контур области σ обозначим Γ_0 , а контуры отверстий – Γ_t ($t = 1, 2, \dots, N$). В силу условия (1.10) функция напряжений F однозначна в области σ и принимает постоянные значения C_0, C_t на каждой из замкнутых кривых Γ_0, Γ_t . Так как добавление произвольной постоянной к функции F не влияет на напряженное состояние бруса, без ограничения общности можно положить $C_0 = 0$, что приводит к известным [2] краевым условиям в задаче кручения многосвязного цилиндрического тела

$$F|_{\Gamma_0} = 0, \quad F|_{\Gamma_t} = C_t, \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

Из однозначности поля напряжений $\boldsymbol{\tau}$ и деформаций $\boldsymbol{\gamma}$ в многосвязной области еще не следует однозначность поля осевых смещений $w(\mathbf{r})$. Как следует из равенства (1.6), депланация выражается формулой

$$w(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\gamma} + \omega \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}) + w(\mathbf{r}_0) \quad (2.2)$$

При выполнении уравнения совместности (1.8) криволинейный интеграл в (2.2) не зависит от пути интегрирования, если область σ односвязна. В случае многосвязной области выражение (2.2) дает, вообще говоря, многозначную функцию. Неоднозначность можно устранить, превратив область σ в односвязную путем проведения необходимого числа разрезов. При этом значения функции $w_{\pm}$ на противоположных берегах каждого разреза могут различаться на постоянную величину $w_+ - w_- = b_t$. Согласно (2.2), постоянные b_t не зависят от выбора системы разрезов и выражаются через поле деформаций следующим образом:

$$b_t = \oint_{\Gamma_t} (\boldsymbol{\gamma} - \omega \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma_t} \boldsymbol{\gamma} \cdot d\mathbf{r} - 2\omega S_t \quad (2.3)$$

где S_t – площадь t -го отверстия.

Отличие от нуля постоянных b_t означает существование в многосвязном цилиндре винтовых дислокаций, т.е. трансляционных дислокаций Вольтерры с векторами

Бюргерса, параллельными образующей цилиндра и имеющими длину b_i . Из соотношений (1.5), (1.7), (2.3) получаем

$$\oint_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \cdot \text{grad } F ds + b_i + 2\omega S_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.4)$$

Здесь $\mathbf{n}$ – нормаль, внешняя по отношению к области, занятой отверстием. Соотношения (2.4) служат для определения неизвестных постоянных C_i и являются обобщением теоремы Бредта [2] о циркуляции касательных напряжений, состоящим в учете винтовых дислокаций и анизотропии материала.

Крутящий момент, который необходимо приложить к торцам многосвязного бруса, чтобы обеспечить заданный угол закручивания ω , выражается формулой [2]

$$M = \mathbf{i}_3 \cdot \iint_{\sigma} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau} d\sigma = 2 \iint_{\sigma} F d\sigma + 2 \sum_{i=1}^N C_i S_i \quad (2.5)$$

3. Мембранная аналогия при наличии дислокаций. Известную [2] мембранную аналогию Прандтля для задачи кручения можно модифицировать, учтя наличие дислокаций и анизотропию материала. Представим себе весьма тонкую упругую пластинку (мембрану), в которой создано однородное плоское напряженное состояние, описываемое тензором напряжений, с точностью до постоянного множителя совпадающим с тензором податливостей $\mathbf{L}$ из уравнения (1.9). Так как удельная энергия деформации упругого тела $\frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma}$ положительна, тензоры $\boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{L}$ положительно определенные, что влечет неравенства $k > 0$, $m > 0$, $km - l^2 > 0$. Найдем спектральное разложение тензора $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L} = L_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + L_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 \quad (3.1)$$

$$L_{1,2} = \frac{1}{2}(k + m) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(k - m)^2 + 4l^2}$$

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi, \quad \mathbf{d}_2 = -\mathbf{i}_1 \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varphi$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{l}{k - L_1} = \frac{2l}{k - m - \sqrt{(k - m)^2 + 4l^2}}$$

Здесь L_1, L_2 – положительные собственные значения, а $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ – единичные ортогональные собственные векторы тензора $\mathbf{L}$. Согласно выражению (3.1), напряженное состояние мембраны, соответствующее тензору $\mathbf{L}$, можно осуществить путем натяжения L_1 в направлении $\mathbf{d}_1$ и натяжения L_2 в ортогональном направлении $\mathbf{d}_2$. Натянутая указанным способом мембрана закрепляется по контуру Γ_0 и нагружается поперечным равномерным давлением p , пропорциональным углу закручивания ω . Уравнение для прогиба мембраны u можно получить из уравнения изгиба предварительно напряженной пластинки [3], устремив к нулю ее цилиндрическую жесткость. В результате для случая односвязной области получим краевую задачу, идентичную задаче для функции напряжений F

$$\text{div}(\mathbf{L} \cdot \text{grad } u) = -p, \quad u|_{\Gamma_0} = 0 \quad (3.2)$$

Для моделирования многосвязного цилиндрического тела без дислокаций к натянутой мембране в областях, ограниченных контурами Γ_i , приклеиваются жесткие горизонтальные диски, для которых допускаются только поступательные вертикальные перемещения. После этого вся система нагружается равномерным давлением p . Уравнениям (2.4) при $b_i = 0$ в мембранной аналогии соответствуют условия уравновешенности всех сил, приложенных к каждому диску [2].

Если в многосвязном цилиндре присутствуют дислокации, то, согласно (2.4), к каждому диску следует приложить дополнительно сосредоточенную силу, совпадающую (с точностью до некоторого размерного множителя) с длиной вектора Бюргерса, соответствующего данной дислокации. Таким образом, существование винтовых дислокаций в многосвязном цилиндре моделируется в мембранной аналогии сосредоточенными силами, приложенными к жестким дискам.

Основное значение описанной мембранной аналогии состоит в том, что с ее помощью можно наглядно представить себе решение краевой задачи (1.9), (2.1), (2.4) для функции напряжений F . При этом нет необходимости фактически выполнять опыт с нагружением мембраны. Вполне достаточно мысленного эксперимента.

4. Вариационный принцип. Удельная дополнительная работа анизотропного тела в задаче кручения на основании соотношений (1.5), (1.7) выражается следующим образом:

$$V = \frac{1}{2} \gamma \cdot \tau = \frac{1}{2} \tau \cdot \lambda \cdot \tau = \frac{1}{2} \text{grad } F \cdot L \cdot \text{grad } F \quad (4.1)$$

Докажем, что краевая задача (1.9), (2.1), (2.4) эквивалентна вариационной задаче о минимуме функционала

$$\Pi[F, C_1, \dots, C_N] = \iint_{\sigma} (V - 2\omega F) d\sigma - \sum_{i=1}^N (2\omega S_i + b_i) C_i \quad (4.2)$$

Функционал Π определен на множестве дважды дифференцируемых функций напряжений, удовлетворяющих граничным условиям (2.1). Постоянные C_i ($i = 1, \dots, N$), от которых зависит функционал, заранее неизвестны и должны варьироваться. Используя выражение (4.1), вычислим вариацию функционала (4.2)

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \iint_{\sigma} (\text{grad } F \cdot L \cdot \text{grad } \delta F - 2\omega \delta F) d\sigma - \sum_{i=1}^N (2\omega S_i + b_i) \delta C_i = \\ &= \iint_{\sigma} [\text{div}(\delta F L \cdot \text{grad } F) - \delta F \text{div}(L \cdot \text{grad } F) - 2\omega \delta F] d\sigma - \sum_{i=1}^N (2\omega S_i + b_i) \delta C_i \end{aligned} \quad (4.3)$$

Применяя формулу Грина и учитывая условия (2.1), получим

$$\delta \Pi = - \iint_{\sigma} [\text{div}(L \cdot \text{grad } F) + 2\omega] \delta F d\sigma - \sum_{i=1}^N \left(\oint_{\Gamma_i} \mathbf{n} \cdot L \cdot \text{grad } F ds + 2\omega S_i + b_i \right) \delta C_i \quad (4.4)$$

Как видно из выражения (4.4), необходимые и достаточные условия стационарности функционала Π состоят из уравнения (1.9) и соотношений (2.4). Свойство минимальности функционала в стационарной точке следует из положительной определенности тензора L . Для изотропного материала без учета дислокаций вариационная формулировка задачи кручения изложена ранее [2].

Применим вариационный принцип для решения задачи кручения тонкостенной трубы, содержащей дислокацию. Сечение стержня в этом случае представляет собой двусвязную область, причем контуры Γ_0 и Γ_1 близки друг к другу. Винтовая дислокация в таком теле может быть создана путем разрезания трубы вдоль образующей, продольного сдвига краев разреза на расстояние b_1 и склеивания их в новом положении. Описанный дефект может возникнуть в конструкции в процессе ее изготовления. Предположим, что кривая Γ_1 задана уравнениями $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$, где s – текущая длина дуги. Положение точки области σ будем задавать координатами s и ζ , где ζ – расстояние, отсчитываемое по нормали к Γ_1 , причем $\zeta = 0$ на Γ_1 и $\zeta = h$ на Γ_0 . Толщину стенки h считаем постоянной. Основываясь на мембранной

аналогии, аппроксимируем функцию напряжений в случае малой толщины выражением, удовлетворяющим условиям (2.1),

$$F = C_1(1 - \zeta/h) \quad (4.5)$$

Функционал дополнительной работы (4.2) при учете выражения (4.5) запишем в виде

$$\Pi = \frac{Q}{2h} C_1^2 - \omega L_1 h C_1 - (2\omega S_1 + b_1) C_1 \quad (4.6)$$

$$Q = \oint_{\Gamma_1} \left[m \left(\frac{dx_2}{ds} \right)^2 + 2l \frac{dx_1}{ds} \frac{dx_2}{ds} + k \left(\frac{dx_1}{ds} \right)^2 \right] ds$$

(L_1 – периметр контура Γ_1). Из условия стационарности $\partial \Pi / \partial C_1 = 0$, согласно выражению (4.6), находим

$$Q C_1 = (2S_1 + L_1 h) \omega h + b_1 h \quad (4.7)$$

Крутящий момент определяется по формулам (2.5), (4.5)

$$M = (2S_1 + L_1 h) C_1 \quad (4.8)$$

Из соотношений (4.7), (4.8) найдем угол закручивания ω , возникающий при отсутствии момента, т.е. при $M = 0$,

$$\omega = -\frac{b_1}{2S_1^*}, \quad S_1^* = S_1 + \frac{L_1 h}{2}. \quad (4.9)$$

В (4.9) S_1^* – площадь, ограниченная средней линией поперечного сечения, т.е. контуром, проходящим посередине контуров Γ_0 и Γ_1 . Согласно соотношениям (4.5), (4.8), при $M = 0$ имеем $F = 0$. Это означает, что при отсутствии внешних нагрузок винтовая дислокация в тонкостенном стержне произвольного замкнутого профиля вызывает закручивание стержня, но не создает в нем напряжений. Как следует из выражения (4.9), величина закручивания не зависит от физических свойств материала, а определяется чисто геометрическими характеристиками поперечного сечения.

Рассмотрим еще пример пятисвязной тонкостенной трубы, сечение которой – тонкое круговое кольцо радиуса r_0 с двумя ортогональными диаметрными переборками (фиг. 1). Толщина кольца и переборок равна h .

Значение функции напряжений на четверти кольца, примыкающей к s -му отверстию, обозначим через F_s ($s = 1, 2, 3, 4$), а на части переборки, разделяющей s -тое и t -тое отверстия, – через F_{st} . Предполагая, что $h \ll r_0$, примем такую аппроксимацию функции напряжений, удовлетворяющую краевым условиям (2.1):

$$\begin{aligned} F_s &= C_s h^{-1} (r - r_0), \quad r_0 - h \leq r \leq r_0 \\ 2F_{12} &= C_1 \zeta_1^+ + C_2 \zeta_1^-, \quad 2F_{23} = C_2 \zeta_2^+ + C_3 \zeta_2^- \\ 2F_{34} &= C_3 \zeta_3^+ + C_4 \zeta_3^-, \quad 2F_{41} = C_4 \zeta_4^+ + C_1 \zeta_4^- \\ \zeta_{1,2}^\pm &= 1 \pm 2x_{1,2} / h \end{aligned} \quad (4.10)$$

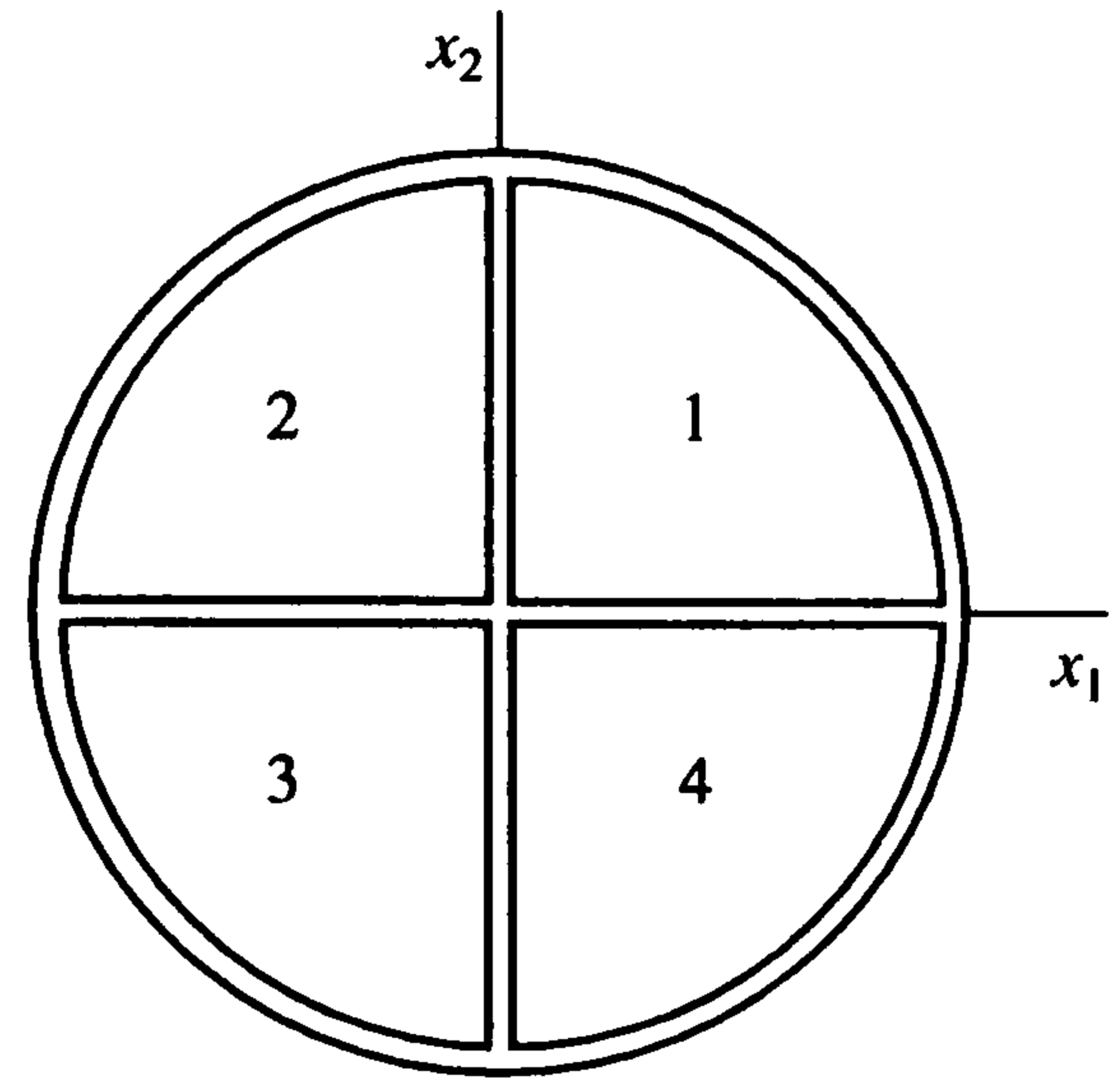
(r – радиальная координата произвольной точки кольца). Считая материал трубы изотропным с модулем сдвига G , на основании соотношений (4.2), (4.10) получим следующее выражение функционала дополнительной работы:

$$\Pi = \sum_{i=1}^4 \left[\frac{(\pi + 4)r_0}{4Gh} C_i^2 - \left(3\omega h r_0 + \frac{\pi}{2} \omega r_0^2 + b_i \right) C_i \right] \quad (4.11)$$

Из условий стационарности функционала (4.11) $\partial\Pi/\partial C_t = 0$ при $M = 0$ находим

$$\omega = -\frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}{2(6r_0h + \pi r_0^2)},$$

$$C_s = \frac{Gh(4b_s - \sum_{t=1}^4 b_t)}{2r_0(4 + \pi)}, \quad s = 1, 2, 3, 4 \quad (4.12)$$



Фиг. 1

5. Сосредоточенные и непрерывно распределенные дислокации. Используя вариационный принцип, перейдем от многосвязного бруса с изолированными дислокациями к случаю односвязного цилиндра с дискретным набором сосредоточенных дислокаций. Для этого будем неограниченно уменьшать диаметры отверстий, стягивая каждый контур Γ_t ($t = 1, \dots, N$) к некоторой точке $\mathbf{r}_t$. Длина вектора Бюргерса b_t при этом предельном переходе остается неизменной. Так как значения функции напряжений F одинаковы во всех точках контура Γ_t , в пределе постоянные C_t ($t = 1, \dots, N$) совпадут со значениями функции напряжений в точках $\mathbf{r}_t$, площади S_t обратятся в нуль, и функционал (4.2) будет иметь следующее выражение:

$$\Pi[F] = \iint_{\sigma} (V - 2\omega F) d\sigma - \sum_{t=1}^N b_t F(\mathbf{r}_t) = \iint_{\sigma} (V - 2\omega F) d\sigma - \iint_{\sigma} \beta^* F d\sigma \quad (5.1)$$

$$\beta^* = \sum_{t=1}^N b_t \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_t)$$

где $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_t)$ – дельта-функция двух переменных.

В мембранной аналогии указанный предельный переход приводит к односвязной мембране, нагруженной не только равномерным давлением, но и сосредоточенными силами b_t , приложенными в точках $\mathbf{r}_t$.

Если число сосредоточенных дислокаций, расположенных на некоторой части области σ , весьма велико, то целесообразно перейти к непрерывному распределению дислокаций. Для этого достаточно в выражении (5.1) заменить обобщенную функцию β^* на обычную и назвать ее плотностью винтовых дислокаций β . Физический смысл плотности дислокаций состоит в том, что суммарный вектор Бюргерса $\mathbf{B}$ всех дислокаций, содержащихся в некоторой подобласти $\sigma' \subset \sigma$, вычисляется по формуле

$$\mathbf{B} = \mathbf{i}_3 \iint_{\sigma'} \beta d\sigma$$

Функционал дополнительной работы Π и вытекающее из вариационного принципа $\delta\Pi = 0$ уравнение для функции напряжений при наличии непрерывно распределенных дислокаций имеют вид

$$\Pi = \iint_{\sigma} (V - 2\omega F - \beta F) d\sigma \quad (5.2)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{L} \cdot \operatorname{grad} F) = -2\omega - \beta(x_1, x_2) \quad (5.3)$$

В мембранной аналогии непрерывное поле дислокаций, согласно равенству (5.3), моделируется приложением переменной нормальной нагрузки, плотность которой пропорциональна плотности дислокаций β .

Заметим, что в той части области σ , где $\beta(x_1, x_2) \neq 0$, функция деформации $w(x_1, x_2)$ не существует, так как уравнение совместности (1.8) не выполняется. Это не мешает существованию упругих смещений в плоскости поперечного сечения, так что постоянная ω сохраняет свой смысл угла закручивания и при непрерывно распределенных винтовых дислокациях.

Непрерывно распределенные дефекты могут существовать и в многосвязном цилиндрическом теле, содержащем дислокации Вольтерры. Функционал дополнительной работы для этого общего случая в силу (4.2), (5.2) записывается в форме

$$\Pi[F] = \iint_{\sigma} (V - 2\omega F - \beta F) d\sigma - \sum_{i=1}^N (2\omega S_i + b_i) C_i \quad (5.4)$$

Благодаря возможности считать плотность β обобщенной функцией выражение (5.4) пригодно и при наличии сосредоточенных дислокаций.

В качестве примера рассмотрим задачу кручения односвязного призматического тела при постоянной плотности дислокаций ($\beta = \beta_0 = \text{const}$) и при отсутствии внешнего крутящего момента. В соответствии с соотношениями (5.3), (2.1) и (2.5) данная задача имеет единственное решение $F = 0$, $\omega = -\beta_0/2$. Таким образом, равномерное распределение винтовых дислокаций не создает напряжений в стержне с односвязным сечением, хотя и вызывает его закручивание. Этот результат представляется очевидным в свете мембранной аналогии.

6. Общие теоремы теории кручения стержней, содержащих дислокации. Пусть $F(x_1, x_2)$ – решение краевой задачи (5.3), (2.1), (2.4) при заданном угле закручивания ω , заданной плотности $\beta(x_1, x_2)$ дислокаций и заданных характеристиках дислокаций Вольтерры $b_i (i = 1, \dots, N)$. Умножая уравнение (5.3) на функцию F , интегрируя по области σ и применяя теорему о дивергенции, приходим к формуле, выражающей теорему типа Клапейрона (всюду далее интегрирование ведется по области σ)

$$\iint V d\sigma = \frac{1}{2} M\omega + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N b_i C_i + \frac{1}{2} \iint \beta F d\sigma \quad (6.1)$$

При помощи (6.1) и свойства положительности функции V доказывается теорема единственности решения задачи кручения упругого тела с дислокациями. Теорема единственности остается в силе также для задачи с неизвестным углом закручивания ω , но с заданным крутящим моментом M .

Рассмотрим два решения задачи кручения F' и F'' , т.е. два равновесных состояния бруса, отвечающих соответственно двум системам внешних условий: β', ω', b'_i и β'', ω'', b''_i . На основе свойства симметричности тензора L доказывается теорема взаимности

$$M' \omega'' + \sum_{i=1}^N C'_i b''_i + \iint F' \beta'' d\sigma = M'' \omega' + \sum_{i=1}^N C''_i b'_i + \iint F'' \beta' d\sigma \quad (6.2)$$

Как пример приложения теоремы взаимности, рассмотрим задачу определения угла закручивания бруса односвязного сечения при известном распределении дислокаций и нулевом крутящем моменте. Данное состояние равновесия, которое будем считать первым, описывается следующей краевой задачей:

$$\text{div}(L \cdot \text{grad } F') = -2\omega' - \beta'(x_1, x_2) \quad (6.3)$$

$$F' |_{\Gamma_0} = 0, \quad \iint F' d\sigma = 0$$

За второе состояние бруса примем то, которое существует при постоянной единичной плотности дислокаций ($\beta'' \equiv 1$) и отсутствии кручения ($\omega'' = 0$). Это состояние определяется путем решения краевой задачи

$$\text{div}(L \cdot \text{grad } F'') = -1, \quad F'' |_{\Gamma_0} = 0 \quad (6.4)$$

Применение формулы (6.2) дает выражение угла закручивания через решение краевой задачи

$$\omega' = (-\iint \beta' F'' d\sigma) / (2 \iint F'' d\sigma) \quad (6.5)$$

Таким образом, для определения закручивания бруса, обусловленного заданным распределением дислокаций, нет нужды решать краевую задачу (6.3), которая содержит произвольную функцию в правой части обобщенного уравнения Пуассона, а достаточно решить более простую стандартную задачу кручения (6.4), для которой правая часть обобщенного уравнения Пуассона постоянна.

При помощи (6.5) легко найти так называемое закручивание Эшелби [4, 5], возникающее при наличии сосредоточенной в точке (ξ_1, ξ_2) дислокации с длиной вектора Бюргерса B

$$\omega' = -BF''(\xi_1, \xi_2) / (2 \iint F'' d\sigma) \quad (6.6)$$

В частности, для ортотропного ($l = 0$) бруса, сечение которого ограничено эллипсом $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1$, задача (6.4) имеет следующее решение:

$$F'' = \frac{a^2 b^2}{2(mb^2 + ka^2)} \left(1 - \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} \right) \quad (6.7)$$

Из соотношений (6.6) и (6.7) получаем

$$|\omega'| = \frac{B}{\pi ab} \left(1 - \frac{\xi_1^2}{a^2} - \frac{\xi_2^2}{b^2} \right) \quad (6.8)$$

При $a = b$ формула переходит в известное [4] выражение для закручивания изотропного кругового цилиндра с сосредоточенной винтовой дислокацией.

7. Энергия дислокации в стержне прямоугольного сечения. Рассмотрим задачу о напряженном состоянии бруса прямоугольного сечения $0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$, содержащего сосредоточенную винтовую дислокацию в произвольной точке (ξ_1, ξ_2) . Материал будем считать ортотропным ($l = 0$). С физической точки зрения представляет интерес исследовать энергию упругого тела, обусловленную дислокацией, в зависимости от места расположения дислокации. Поскольку решение уравнения (5.3) с дельта-функцией в правой части имеет логарифмическую особенность, энергия тела с сосредоточенной дислокацией будет бесконечной. Чтобы избежать указанной расходимости энергии, заменим сосредоточенную дислокацию с заданной длиной вектора Бюргерса B непрерывным распределением дислокаций с плотностью, которая постоянна внутри квадрата $|x_1 - \xi_1| < d/2$, $|x_2 - \xi_2| < d/2$ и равна B/d^2 , а вне указанного квадрата равна нулю. Сторона квадрата d весьма мала по сравнению с размерами сечения.

Итак, функция β в правой части уравнения (5.3) принимается в виде

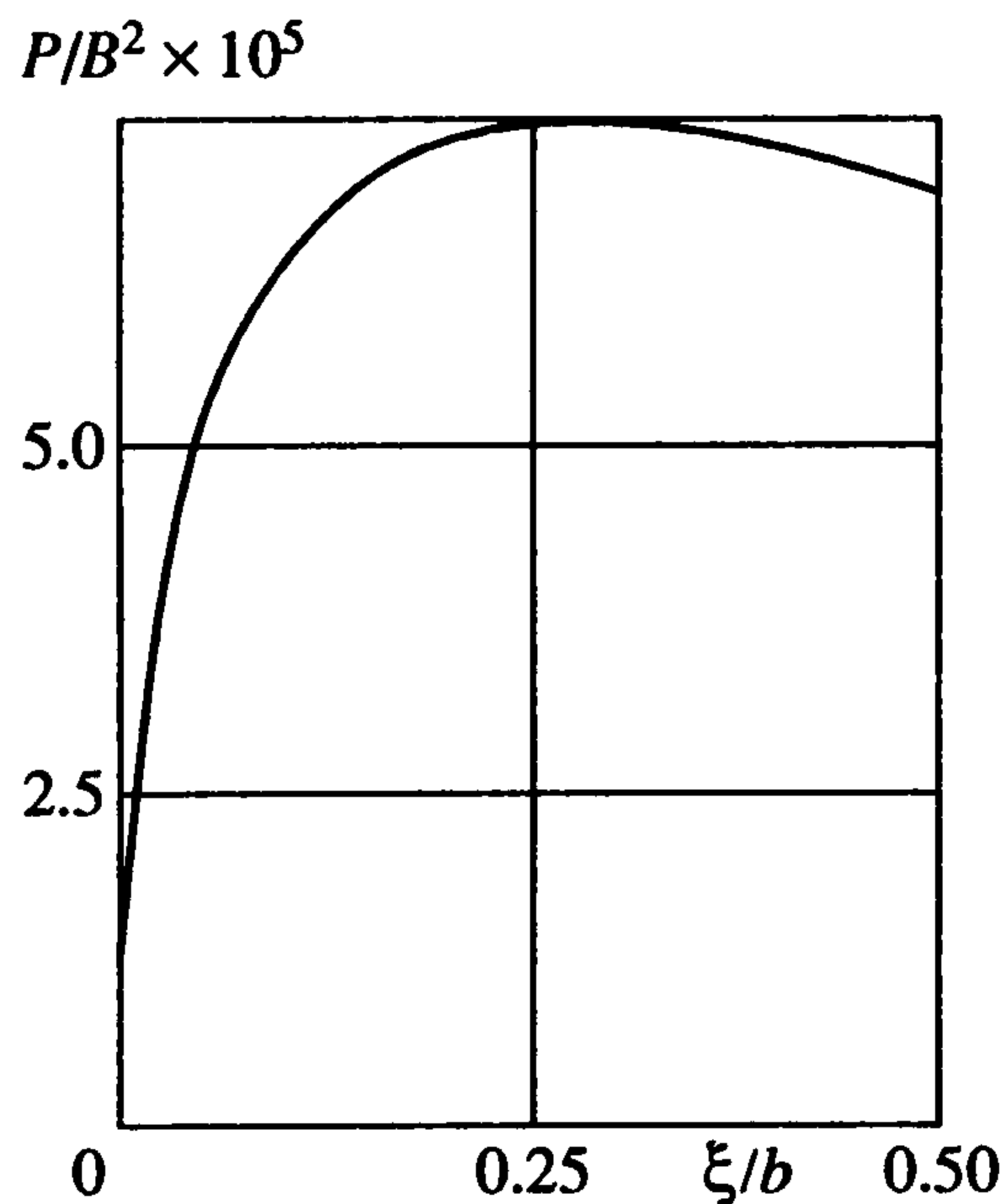
$$\beta(x_1, x_2) = \begin{cases} B/d^2, & |x_1 - \xi_1| < d/2, \quad |x_2 - \xi_2| < d/2 \\ 0, & |x_1 - \xi_1| > d/2, \quad |x_2 - \xi_2| > d/2 \end{cases} \quad (7.1)$$

Решение краевой задачи (2.1), (5.3), (7.1) находим в виде двойных тригонометрических рядов

$$F(x_1, x_2) = \frac{4a^2}{m\pi^2} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(s^2 + \alpha t^2)_{st}} \left(\frac{B}{d^2} \Psi_{st} + 2\omega \lambda_{st} \right) \sin\left(\frac{\pi s}{a} x_1\right) \sin\left(\frac{\pi t}{b} x_2\right) \quad (7.2)$$

$$\Psi_{st} = \sin\left(\frac{\pi s}{2a} d\right) \sin\left(\frac{\pi t}{2b} d\right) \sin\left(\frac{\pi s}{a} \xi_1\right) \sin\left(\frac{\pi t}{b} \xi_2\right), \quad \alpha = \frac{ka^2}{mb^2}$$

$$\lambda_{st} = \frac{1}{4} (\cos \pi s - 1)(\cos \pi t - 1)$$



Фиг. 2

Закручивание Эшелби определяется из условия $M = 0$ и имеет вид

$$\omega = -\frac{B}{2d^2} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\Psi_{st}}{(s^2 + \alpha t^2)s^2 t^2} \right) \times \left(\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(s^2 + \alpha t^2)s^2 t^2} \right)^{-1} \quad (7.3)$$

Суммирование в (7.3) производится только по нечетным s и t .

Энергия дислокации находится по формуле (6.1)

$$P(\xi_1, \xi_2) = -\frac{8a^2 b}{m\pi^4} \frac{B}{d^2} \times \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(s^2 + \alpha t^2)s^2 t^2} \left(\frac{B}{d^2} \Psi_{st} + 2\omega \lambda_{st} \right) \Psi_{st} \quad (7.4)$$

Величина ω определяется соотношением (7.3).

На фиг. 2 схематично изображена зависимость энергии P от места расположения дислокации, т.е. от координат ξ_1, ξ_2 ($0 \leq \xi_1 \leq a, 0 \leq \xi_2 \leq b$). Кривая на фиг. 2 представляет собой сечение поверхности $P(\xi_1, \xi_2)$ плоскостью $\xi_1 = a/2$. В связи с симметрией данного сечения относительно вертикальной оси показана лишь часть графика, когда ξ_2 изменяется от 0 до $b/2$.

Подробные численные расчеты показали, что сечения поверхности $P(\xi_1, \xi_2)$ плоскостями $\xi_1 = c\xi_2$ для любых c имеют минимум в центре области. Это означает, что точка $\xi_1 = \xi_2 = 0$ является минимумом функции $P(\xi_1, \xi_2)$. Других минимумов при численном анализе обнаружено не было. Это дает основание утверждать, что центральное положение дислокации устойчиво. Отметим, что описанная потенциальная яма существует при любом соотношении податливостей k и m и любом соотношении сторон прямоугольника. Поскольку, как было сказано выше, $d/a \ll 1$, при расчетах величина d варьировалась в пределах от $d = 10^{-6}a$ до $d = 10^{-4}a$. При указанных вариациях постоянной d результаты качественно не менялись. Значение постоянной B не играет роли, так как фактически исследовалась функция $P(\xi_1, \xi_2)/B^2$. Устойчивые результаты получаются при учете в рядах (7.2) – (7.4) первых 10^4 членов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-01017).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
2. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
3. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of Plates and Shells. N.Y. etc.: McGraw-Hill, 1959. = Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 636 с.
4. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 247 с.
5. Teodosiu C. Elastic Models of Crystal Defects. B. etc.: Springer, 1982. = Теодосиу К. Упругие модели дефектов в кристаллах. М.: Мир, 1985. 352 с.

Ростов-на-Дону
e-mail: elast@math.rsu.ru

Поступила в редакцию
31.1.2001