

УДК 539.3

© 2002 г. В.М. Александров

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО СЛОЯ

Рассматривается задача о вдавливании в упругий слой двоякопериодической системы штампов. При относительно большой толщине слоя и относительно больших значениях полупериодов получено асимптотическое решение. В качестве примеров изучаются случаи двоякопериодической системы плоских наклонных эллиптических в плане штампов и двоякопериодической системы параболических штампов.

Ранее [1–3] рассматривались аналогичные задачи о действии на упругий слой одиночного штампа.

1. Равновесие упругого слоя под действием двоякопериодической нормальной нагрузки. Рассмотрим упругий слой толщины h с механическими характеристиками G (модуль сдвига) и σ (коэффициент Пуассона), который лежит без трения на жестком основании (задача 1) или жестко защемлен по основанию (задача 2). Слой занимает область $0 \leq z \leq h$, $|x| < \infty$, $|y| < \infty$, и его верхняя грань $z = h$ нагружена двоякопериодическим давлением $q(x - 2km, y - 2ln)$, где m и n – длины полупериодов соответственно по осям x и y ; $k, l = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, \infty$. Касательные нагрузки на верхней грани слоя отсутствуют.

При сделанных допущениях нормальное перемещение точек верхней грани слоя от действующего там давления можно представить в виде [1, 2]

$$w(x, y, h) = -\frac{1}{4\pi^2\theta h} \int_{\Omega_*} q(\xi, \eta) d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(r)}{r} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\left(s \frac{\xi + 2km - x}{h}\right) \times \\ \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \cos\left(t \frac{\eta + 2ln - y}{h}\right) ds dt \quad (1.1)$$

$$\theta = G(1 - \sigma)^{-1}, \quad r = \sqrt{s^2 + t^2}, \quad \Omega_* - \text{область } |\xi| \leq m, \quad |\eta| \leq n$$

$$L(r) = \frac{\text{ch } 2r - 1}{\text{sh } 2r + 2r} \quad \text{для задачи 1}$$

$$L(r) = \frac{2\kappa \text{sh } 2r - 4r}{2\kappa \text{ch } 2r + 1 + \kappa^2 + 4r^2} \quad (\kappa = 3 - 4\sigma) \quad \text{для задачи 2}$$

Разобьем функцию $w(x, y, h)$ вида (1.1) на два слагаемых следующим образом:

$$w(x, y, h) = w_1(x, y, h) + w_2(x, y, h) \quad (1.2)$$

$$w_1(x, y, h) = -\frac{1}{4\pi^2\theta h} \int_{\Omega_*} q(\xi, \eta) d\Omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-2r}}{r} \cos\left(s \frac{\xi + 2km - x}{h}\right) \times \\ \times \cos\left(t \frac{\eta + 2ln - y}{h}\right) ds dt$$

$$w_2(x, y, h) = \frac{1}{4\pi^2\theta h} \int_{\Omega_*} q(\xi, \eta) d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M(r) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \cos\left(s \frac{\xi + 2km - x}{h}\right) \times \\ \times \cos\left(t \frac{\eta + 2ln - y}{h}\right) ds dt \\ M(r) = [1 - e^{-2r} - L(r)]r^{-1}$$

и займемся их упрощением.

Используя интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ar}}{r} \cos sz \cos t\zeta ds dt = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 + R^2}} \quad (R = \sqrt{z^2 + \zeta^2})$$

при вычислении которого приняты во внимание формулы 8.511(4) и 6.611(1) из [4], представим функцию $w_1(x, y, h)$ в форме

$$w_1(x, y, h) = -\frac{1}{2\pi\theta} \int_{\Omega_*} q(\xi, \eta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} Q_{kl} d\Omega \quad (1.3)$$

$$Q_{kl} = R_{kl}^{-1} - (4h^2 + R_{kl}^2)^{-1/2}, \quad R_{kl} = [(\xi + 2km - x)^2 + (\eta + 2ln - y)^2]^{1/2}$$

Используя преобразование

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\left(s \frac{z + 2km}{h}\right) = \cos\left(s \frac{z}{h}\right) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos\left(s \frac{2km}{h}\right)\right] = 2\pi \cos\left(s \frac{z}{h}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{2sm}{h} - 2\pi k\right)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция и принята во внимание формула, связывающая бесконечный ряд косинусов с бесконечным рядом дельта-функций ([5, с. 49]), представим функцию $w_2(x, y, h)$ в форме

$$w_2(x, y, h) = \frac{h}{4mn\theta} \int_{\Omega_*} q(\xi, \eta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} M(r_{kl}) \cos \frac{\pi k(\xi - x)}{m} \cos \frac{\pi l(\eta - y)}{n} d\Omega, \\ r_{kl} = \pi h \left[\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{l}{n}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.4)$$

Подставляя выражения (1.3) и (1.4) в равенство (1.2), получим

$$w(x, y, h) = -\frac{1}{2\pi\theta} \int_{\Omega_*} q(\xi, \eta) (I_{00} + I_{*0} + I_{0*} + I_{**}) d\Omega + \frac{h}{4mn\theta} \int_{\Omega_*} q(\xi, \eta) \times \\ \times (J_{00} + 2J_{*0} + 2J_{0*} + 4J_{**}) d\Omega \quad (1.5)$$

$$I_{00} = Q_{00}, \quad I_{*0} = \sum_{k=1}^{\infty} (Q_{k0} + Q_{-k,0}), \quad I_{0*} = \sum_{l=1}^{\infty} (Q_{0l} + Q_{0,-l})$$

$$I_{**} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (Q_{kl} + Q_{-k,l} + Q_{k,-l} + Q_{-k,-l})$$

$$J_{00} = \begin{cases} 3/2 & \text{для задачи 1} \\ 2 - 4(\kappa - 1)/(\kappa + 1)^2 & \text{для задачи 2} \end{cases}$$

$$J_{*0} = \sum_{k=1}^{\infty} M(r_{k0}) \cos \frac{\pi k(\xi - x)}{m}, \quad J_{0*} = \sum_{l=1}^{\infty} M(r_{0l}) \cos \frac{\pi l(\eta - y)}{n}$$

$$J_{**} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} M(r_{kl}) \cos \frac{\pi k(\xi - x)}{m} \cos \frac{\pi l(\eta - y)}{n}$$

Ряды I_{*0} , I_{0*} и I_{**} сходятся при $|\xi - x| \leq C$ и $|\eta - y| \leq C$, где C – произвольная конечная постоянная. Ряды J_{*0} , J_{0*} и J_{**} сходятся при тех же условиях, ибо

$$L(r) = 1 + O(e^{-2r}) \quad (r \rightarrow \infty) \quad (1.6)$$

2. Постановка двоякопериодической контактной задачи для упругого слоя. Пусть в верхнюю грань слоя $z = h$ вдавливаются двоякопериодическая система одинаковых жестких штампов. Силы трения между штампами и поверхностью слоя отсутствуют, и на каждый штамп действует одинаковая система усилий: сила P и моменты M_x и M_y . Тогда области контакта всех штампов с поверхностью слоя будут одинаковыми. Пусть Ω – область контакта штампа, находящегося в зоне $|x| \leq m$, $|y| \leq n$. Пусть $\delta(x, y)$ – осадка точек поверхности слоя под этим штампом (аналогичные осадки поверхности слоя будут и под всеми другими штампами).

Удовлетворяя условию контакта выделенного штампа с поверхностью слоя

$$w(x, y, h) = -\delta(x, y) \quad ((x, y) \in \Omega) \quad (2.1)$$

придем на основании формулы (1.5) к следующему двумерному интегральному уравнению первого рода для определения контактного давления $q(x, y)$:

$$\int_{\Omega} \frac{q(\xi, \eta)}{R_{00}} d\Omega = 2\pi\theta\delta(x, y) + \int_{\Omega} q(\xi, \eta)F(\xi - x, \eta - y)d\Omega \quad (2.2)$$

$$F(z, \zeta) = \frac{1}{\sqrt{4h^2 + R_{00}^2}} - I_{*0} - I_{0*} - I_{**} + \frac{\pi h}{2mn}(J_{00} + 2J_{*0} + 2J_{0*} + 4J_{**})$$

$$(x, y) \in \Omega, \quad z = \xi - x, \quad \zeta = \eta - y$$

Заметим, что $F(\xi - x, \eta - y)$ – регулярная часть интегрального уравнения (2.2).

К уравнению (2.2) нужно добавить условия равновесия выделенного штампа

$$P = \int_{\Omega} q(\xi, \eta)d\Omega, \quad M_x = \int_{\Omega} q(\xi, \eta)\eta d\Omega, \quad M_y = \int_{\Omega} q(\xi, \eta)\xi d\Omega \quad (2.3)$$

служащие для определения перемещения $\delta + \alpha x + \beta y$ штампа как жесткого целого, которое входит слагаемым в функцию $\delta(x, y)$. Остальная часть функции $\delta(x, y)$ определяется формой основания штампа.

В случае, когда область Ω заранее не известна, нужно еще потребовать, чтобы на возможных вариациях Ω решение уравнения (2.2) доставляло минимум функционалу [2, 6]

$$I = \int_{\Omega} q(\xi, \eta)\delta(\xi, \eta)d\Omega \quad (2.4)$$

Последнее условие часто заменяют таким:

$$q(x, y) = 0, \quad (x, y) \in L \quad (2.5)$$

где L – контур области Ω , которое следует [7] из условия минимума функционала (2.4), но не является в общем случае достаточным для определения области контакта Ω .

3. Асимптотическое упрощение регулярной части ядра интегрального уравнения. Пусть $h \sim m \sim n$, а $a = \max R_{00}$ в Ω . Будем считать, что $\lambda = h/a$, $\mu = m/a$ и $\nu = n/a$ – большие параметры. С учетом этого разложим первые четыре слагаемых в выражении для функции $F(z, \zeta)$, входящей в правую часть уравнения (2.2), в ряды. Первое слагаемое – по параметру λ^{-1} . Слагаемое I_{*0} : в выражениях Q_{k0} и $Q_{-k,0}$ первые члены – по параметру μ^{-1} , а вторые члены – по параметру $(\lambda^2 + \mu^2)^{-1/2}$. Слагаемое I_{0*} : в выра-

жениях Q_{0l} и $Q_{0,-l}$ первые члены – по параметру v^{-1} , а вторые члены – по параметру $(\lambda^2 + v^2)^{-1/2}$. Слагаемое I_{**} : в выражениях Q_{kl} , $Q_{-k,l}$, $Q_{k,-l}$ и $Q_{-k,-l}$ первые члены – по параметру $(\mu^2 + v^2)^{-1/2}$, а вторые члены – по параметру $(\lambda^2 + \mu^2 + v^2)^{-1/2}$. Полученные таким образом ряды будут сходиться при $|\xi - x| \leq 2a$ и $|\eta - y| \leq 2a$, если выполнены условия

$$\lambda > 1, \quad \mu > 1 + \sqrt{2}, \quad v > 1 + \sqrt{2} \quad (3.1)$$

Теперь займемся разложением в ряды по параметрам μ^{-1} и v^{-1} членов J_{*0} , J_{0*} и J_{**} в выражении для функции $F(z, \zeta)$. Представим J_{*0} в виде

$$J_{*0} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j A_j}{(2j)!} \left[\frac{\pi(\xi - x)}{m} \right]^{2j}, \quad A_j = \sum_{k=1}^{\infty} M(r_{k0}) k^{2j} \quad (3.2)$$

С учетом оценки (1.6) будем иметь

$$A_j = O\left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}^k k^{2j}\right), \quad \tilde{x} = \exp\left(-\frac{2\pi h}{m}\right) < 1 \quad (3.3)$$

Ряд, стоящий под знаком порядка в выражении (3.3) для A_j , легко суммируется [8] при каждом конкретном значении $j \geq 0$; однако для оценки A_j удобно воспользоваться неравенством

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{x}^k k^n \leq \frac{\tilde{x} n!}{(1 - \tilde{x})^{n+1}} \quad (3.4)$$

Тогда имеем $A_j = O[(2j)!(1 - \tilde{x})^{-2j}]$ и видно, что ряд (3.2) для J_{*0} сходится при $|\xi - x| \leq 2a$, если выполнено условие

$$\frac{2\pi}{\mu} \left[1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{m_1}\right) \right]^{-1} \leq 1; \quad m_1 = \frac{\mu}{\lambda} = \frac{m}{h} \sim 1 \quad (3.5)$$

Аналогично найдем, что разложение

$$J_{0*} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s B_s}{(2s)!} \left[\frac{\pi(\eta - y)}{n} \right]^{2s}, \quad B_s = \sum_{l=1}^{\infty} M(r_{0j}) l^{2s} \quad (3.6)$$

будет сходиться при $|\eta - y| \leq 2a$, если выполнено условие

$$\frac{2\pi}{v} \left[1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{n_1}\right) \right]^{-1} \leq 1; \quad n_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{n}{h} \sim 1 \quad (3.7)$$

Рассмотрим, наконец, разложение для J_{**}

$$J_{**} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+s} C_{js}}{(2j)!(2s)!} \left[\frac{\pi(\xi - x)}{m} \right]^{2j} \left[\frac{\pi(\eta - y)}{n} \right]^{2s} \quad (3.8)$$

$$C_{js} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} M(r_{kl}) k^{2j} l^{2s}$$

Используя вновь оценку (1.6), неравенство (3.4) и неравенство

$$\sqrt{2(k^2 + l^2)} \geq k + l; \quad k \geq 1, \quad l \geq 1 \quad (3.9)$$

оценим величины C_{js} и в результате найдем, что разложение (3.8) будет сходиться при $|\xi - x| \leq 2a$ и $|\eta - y| \leq 2a$, если выполнены условия

$$\frac{2\pi}{\mu} \left[1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{2\pi}}{m_1}\right) \right]^{-1} < 1, \quad \frac{2\pi}{\nu} \left[1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{2\pi}}{n_1}\right) \right]^{-1} < 1 \quad (3.10)$$

Заметим, что условия (3.10) – более сильные, чем (3.5) и (3.7), и более сильные, чем второе и третье условия (3.1).

Итак, если выполнены первое условие (3.1) и условия (3.10), налагающие ограничения на параметры λ , μ и ν , то регулярную часть ядра интегрального уравнения (2.2) можно представить в форме

$$F(z, \zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} D_{js} z^{2j} \zeta^{2s} \quad (3.11)$$

Далее в этом разложении ограничимся удержанием членов $z^0 \zeta^0$, $z^2 \zeta^0$ и $z^0 \zeta^2$, при этом коэффициенты D_{00} , D_{10} и D_{01} будут иметь вид

$$\begin{aligned} D_{00} &= \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} - 2S_{*0}^{(0,0)} - 2S_{0*}^{(0,0)} - 4S_{**}^{(0,0)} + \frac{\pi}{2m_1 n_1} (2 - A + 2T_{*0}^{(0,0)} + 2T_{0*}^{(0,0)} + 4T_{**}^{(0,0)}) \right] \\ S_{*0}^{(0,0)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{g_{k0}} - \frac{1}{p_{k0}} \right), \quad S_{0*}^{(0,0)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{g_{0l}} - \frac{1}{p_{0l}} \right) \\ S_{**}^{(0,0)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{g_{kl}} - \frac{1}{p_{kl}} \right) \\ T_{*0}^{(0,0)} &= \sum_{k=1}^{\infty} M(r_{k0}), \quad T_{0*}^{(0,0)} = \sum_{l=1}^{\infty} M(r_{0l}), \quad T_{**}^{(0,0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} M(r_{kl}) \\ D_{10} &= \frac{1}{h^3} \left[-\frac{1}{16} - S_{*0}^{(1,0)} + S_{0*}^{(1,0)} + 2S_{**}^{(1,0)} - \frac{\pi}{2m_1 n_1} (T_{*0}^{(1,0)} + 2T_{**}^{(1,0)}) \right] \\ S_{*0}^{(1,0)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{g_{k0}^3} + \frac{1}{p_{k0}^3} - \frac{3g_{k0}^2}{p_{k0}^5} \right), \quad S_{0*}^{(1,0)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{g_{0l}^3} - \frac{1}{p_{0l}^3} \right) \\ S_{**}^{(1,0)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{g_{kl}^3} - \frac{3g_{kl}^2}{g_{kl}^5} - \frac{1}{p_{kl}^3} + \frac{3g_{kl}^2}{p_{kl}^5} \right) \\ T_{*0}^{(1,0)} &= \sum_{k=1}^{\infty} M(r_{k0}) \frac{\pi^2 k^2}{m_1^2}, \quad T_{**}^{(1,0)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} M(r_{kl}) \frac{\pi^2 k^2}{m_1^2} \\ D_{01} &= \frac{1}{h^3} \left[-\frac{1}{16} + S_{*0}^{(0,1)} - S_{0*}^{(0,1)} + 2S_{**}^{(0,1)} - \frac{\pi}{2m_1 n_1} (T_{0*}^{(0,1)} + 2T_{**}^{(0,1)}) \right] \\ S_{*0}^{(0,1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{g_{k0}^3} - \frac{1}{p_{k0}^3} \right), \quad S_{0*}^{(0,1)} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{2}{g_{0l}^3} + \frac{1}{p_{0l}^3} - \frac{3g_{0l}^2}{p_{0l}^5} \right) \\ S_{**}^{(0,1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{g_{kl}^3} - \frac{3g_{0l}^2}{g_{kl}^5} - \frac{1}{p_{kl}^3} + \frac{3g_{0l}^2}{p_{kl}^5} \right) \\ T_{0*}^{(0,1)} &= \sum_{l=1}^{\infty} M(r_{0l}) \frac{\pi^2 l^2}{n_1^2}, \quad T_{**}^{(0,1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} M(r_{kl}) \frac{\pi^2 l^2}{n_1^2} \\ g_{kl} &= 2\sqrt{k^2 m_1^2 + l^2 n_1^2}, \quad p_{kl} = 2\sqrt{1 + k^2 m_1^2 + l^2 n_1^2} \\ r_{kl} &= \pi\sqrt{k^2 m_1^{-2} + l^2 n_1^{-2}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Если $m_1 = n_1$, то $S_{*0}^{(0,0)} = S_{0*}^{(0,0)}$, $T_{*0}^{(0,0)} = T_{0*}^{(0,0)}$, $S_{*0}^{(1,0)} = S_{0*}^{(0,1)}$, $S_{0*}^{(1,0)} = S_{*0}^{(0,1)}$, $S_{**}^{(1,0)} = S_{**}^{(0,1)}$, $T_{*0}^{(1,0)} = T_{0*}^{(0,1)}$, $T_{**}^{(1,0)} = T_{**}^{(0,1)}$ и $D_{10} = D_{01}$.

4. Двойкопериодическая система плоских наклонных эллиптических в плане штампов. Пусть область Ω – эллипс с полуосями a и b ($a > b$), ориентированными по осям x и y соответственно. Для упрощения положим далее, что $m_1 = n_1$, и обозначим $a_0 = hD_{00}$, $a_1 = h^3D_{10} = h^3D_{01}$. Подставляя разложение (3.11), где удержим лишь члены с коэффициентами D_{00} , D_{10} и D_{01} , в уравнение (2.2), придем к интегральному уравнению

$$\int_{\Omega} q(\xi, \eta) \frac{d\Omega}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} = 2\pi\theta\delta(x, y) + \frac{1}{h} \int_{\Omega} q(\xi, \eta) \left\{ a_0 + \frac{a_1}{h^2} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] \right\} d\Omega, \quad (x, y) \in \Omega \quad (4.1)$$

Здесь $\delta(x, y) = \delta + \alpha x + \beta y$, где δ – поступательное в отрицательном направлении оси z перемещение выделенного штампа, а α и β – углы его поворота соответственно вокруг осей y и x .

В силу известной теоремы Л.А. Галина [9] о форме решения контактной задачи для полупространства в случае эллиптического в плане штампа решение интегрального уравнения (4.1) нужно искать в виде

$$q(x, y) = \theta \left(a_{00} + a_{10} \frac{x}{a} + a_{01} \frac{y}{a} + a_{20} \frac{x^2}{a^2} + a_{02} \frac{y^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} \right)^{-1/2} \quad (4.2)$$

Подставляя выражение (4.2) в уравнение (4.1) и вычисляя интегралы слева и справа [1, 2], получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов a_{00} , a_{10} , a_{01} , a_{20} и a_{02} :

$$\begin{aligned} a_{00}S_{00} + \frac{1}{2}a_{20}S_{01}\epsilon^2 + \frac{1}{2}a_{02}S_{10}\epsilon^2 &= \frac{\delta}{b} + \frac{1}{\lambda} \left(a_{00}A_{00} + \frac{1}{3}a_{20}A_{20} + \frac{1}{3}a_{02}\epsilon^2A_{02} \right) \\ a_{20} \left(S_{20} - \frac{1}{2}S_{11}\epsilon^2 \right) + a_{02}\epsilon^2 \left(S_{11}\epsilon^2 - \frac{1}{2}S_{20} \right) &= \frac{1}{\lambda} B \left(a_{00} + \frac{1}{3}a_{20} + \frac{1}{3}a_{02}\epsilon^2 \right) \\ a_{20} \left(S_{11} - \frac{1}{2}S_{02}\epsilon^2 \right) + a_{02}\epsilon^2 \left(S_{02}\epsilon^2 - \frac{1}{2}S_{11} \right) &= \frac{1}{\lambda} B \left(a_{00} + \frac{1}{3}a_{20} + \frac{1}{3}a_{02}\epsilon^2 \right) \\ a_{10}S_{10} &= \frac{\alpha}{\epsilon} - \frac{2}{3\lambda}a_{10}B, \quad a_{01}S_{01} = \frac{\beta}{\epsilon} - \frac{2}{3\lambda}a_{01}\epsilon^2B \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} S_{00} &= K(e), \quad S_{10} = \frac{K(e) - E(e)}{e^2}, \quad S_{01} = \frac{E(e) - \epsilon^2 K(e)}{e^2 \epsilon^2}; \quad e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \\ S_{20} &= \frac{-2(2 - \epsilon^2)E(e) + (3 - \epsilon^2)K(e)}{3e^4}, \quad S_{11} = \frac{(1 + \epsilon^2)E(e) - 2\epsilon^2 K(e)}{3e^4 \epsilon^2} \\ S_{02} &= \frac{-2(2\epsilon^2 - 1)E(e) + \epsilon^2(3\epsilon^2 - 1)K(e)}{3e^4 \epsilon^4} \\ \epsilon^2 &= 1 - e^2, \quad B = a_1 \lambda^{-2}, \quad A_{00} = a_0 + B(1 + \epsilon^2)/3 \\ A_{20} &= a_0 + B(3 + \epsilon^2)/5, \quad A_{02} = a_0 + B(1 + 3\epsilon^2)/5 \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $K(e)$ и $E(e)$ – полные эллиптические интегралы.

e	$\lambda = 2$	4	6	8	10
Задача 1					
0.6	5.242 (5.147)	4.325 (4.287)	4.056 (4.032)	3.930 (3.913)	3.857 (3.844)
0.8	4.384 (4.315)	3.705 (3.677)	3.503 (3.486)	3.409 (3.396)	3.354 (3.344)
Задача 2					
0.6	5.619 (5.477)	4.478 (4.433)	4.147 (4.122)	3.994 (3.997)	3.907 (3.894)
0.8	4.659 (4.562)	3.817 (3.785)	3.572 (3.553)	3.457 (3.444)	3.392 (3.381)

После решения системы уравнений (4.3) найдем контактное давление по формуле (4.2), а затем силу и моменты, действующие на штамп, по формулам (2.3), которые принимают вид

$$P = 2\pi ab\theta \left[a_{00} + \frac{1}{3}(a_{20} + \varepsilon^2 a_{02}) \right]$$

$$M_y = \frac{2\pi a^2 b\theta}{3} a_{10} = \frac{2\pi a^2 b\theta \alpha}{3\varepsilon} \left(S_{10} + \frac{2B}{3\lambda} \right)^{-1} \quad (4.5)$$

$$M_x = \frac{2\pi a^2 b\varepsilon^2 \theta}{3} a_{01} = \frac{2\pi a^2 b\varepsilon \theta \beta}{3} \left(S_{01} + \frac{2\varepsilon^2 B}{3\lambda} \right)^{-1}$$

Пусть $m_1 = n_1 = 1$, т.е. $\lambda = \mu = \nu$, тогда все оценки (3.1), (3.5), (3.7) и (3.10) сведутся к условию $\lambda > 6.358$. Однако это условие слишком завышено, и на самом деле, как показывают вычисления, формулы (4.2), (4.3) и (4.5) можно использовать при $\lambda \geq 2$. Для рассматриваемых задач по формулам (3.12) найдем

$$a_0 = 1.2220 \text{ (1.1676)}, \quad a_1 = -0.43395 \text{ (-0.39538)} \text{ для задачи 1}$$

$$a_0 = 1.4323 \text{ (1.3768)}, \quad a_1 = -0.61770 \text{ (-0.62755)} \text{ для задачи 2}$$

Для задачи 2 принято $\sigma = 0.3$. В скобках даны значения величин a_0 и a_1 для одиночного штампа на слое.

В таблице приведены рассчитанные по первой формуле (4.5) значения величины $P/(a\theta\delta)$ для эксцентриситетов $e = 0.6, 0.8$ и разных значений λ . В скобках даны соответствующие величины для одиночного штампа на слое [1, 2].

5. Двоякопериодическая система параболических штампов. Вновь будем исходить из интегрального уравнения (4.1), в котором теперь $\delta(x, y) = \delta - x^2/(2R_1) - y^2/(2R_2)$, где R_1 и R_2 – радиусы кривизны в вершине выделенного параболического штампа, а δ – внедрение этого штампа.

Из упомянутой выше теоремы Л.А. Галина и условия (2.5) следует, что в этом случае решение интегрального уравнения (4.1) нужно искать в виде

$$q(x, y) = a_{00} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{1/2} \quad (5.1)$$

где a и b – пока неизвестные полуоси эллиптической области контакта.

Подставляя (5.1) в (4.1) и вычисляя интегралы слева и справа [1–3], получим три соотношения

$$a_{00} = \frac{2\theta\delta}{bA} \left(A = \mathbf{K}(e) - \frac{2}{3\lambda} \left(a_0 + \frac{B(1+\epsilon^2)}{5} \right) \right) \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{ba_{00}}{a^2\theta} \left(S_{10} + \frac{2B}{3\lambda} \right), \quad \frac{1}{R_2} = \frac{ba_{00}}{a^2\theta} \left(S_{01} + \frac{2B}{3\lambda} \right) \quad (5.3)$$

Добавим к ним еще соотношение

$$a_{00} = 3P/(2\pi ab)$$

полученное на основании первой формулы (2.3) и формулы (5.1).

Сравнивая первую формулу (5.2) с (5.3), определим связь между осадкой δ выделенного штампа и вдавливающей силой P

$$\delta = 3PA/(4\pi\theta a) \quad (5.4)$$

Подставляя выражение (5.3) во вторую формулу (5.2), найдем

$$a^3 = \frac{3Ph^3 R_1 S_{10}}{2(\pi\theta h^3 - Pa_1 R_1)} \quad (5.5)$$

Подставляя выражение (5.3), а затем (5.5) в третью формулу (5.2), получим

$$\frac{S_{01}}{S_{10}} = N, \quad N = \frac{R_1 \cdot \pi\theta h^3 - Pa_1 R_2}{R_2 \cdot \pi\theta h^3 - Pa_1 R_1} \quad (5.6)$$

Видно, что $N > 1$ при $R_1 > R_2$.

На фигуре приведена зависимость e от N , определяемая первой формулой (5.6) (ранее [3] этот график был приведен со значительной погрешностью при значениях e , близких к единице).

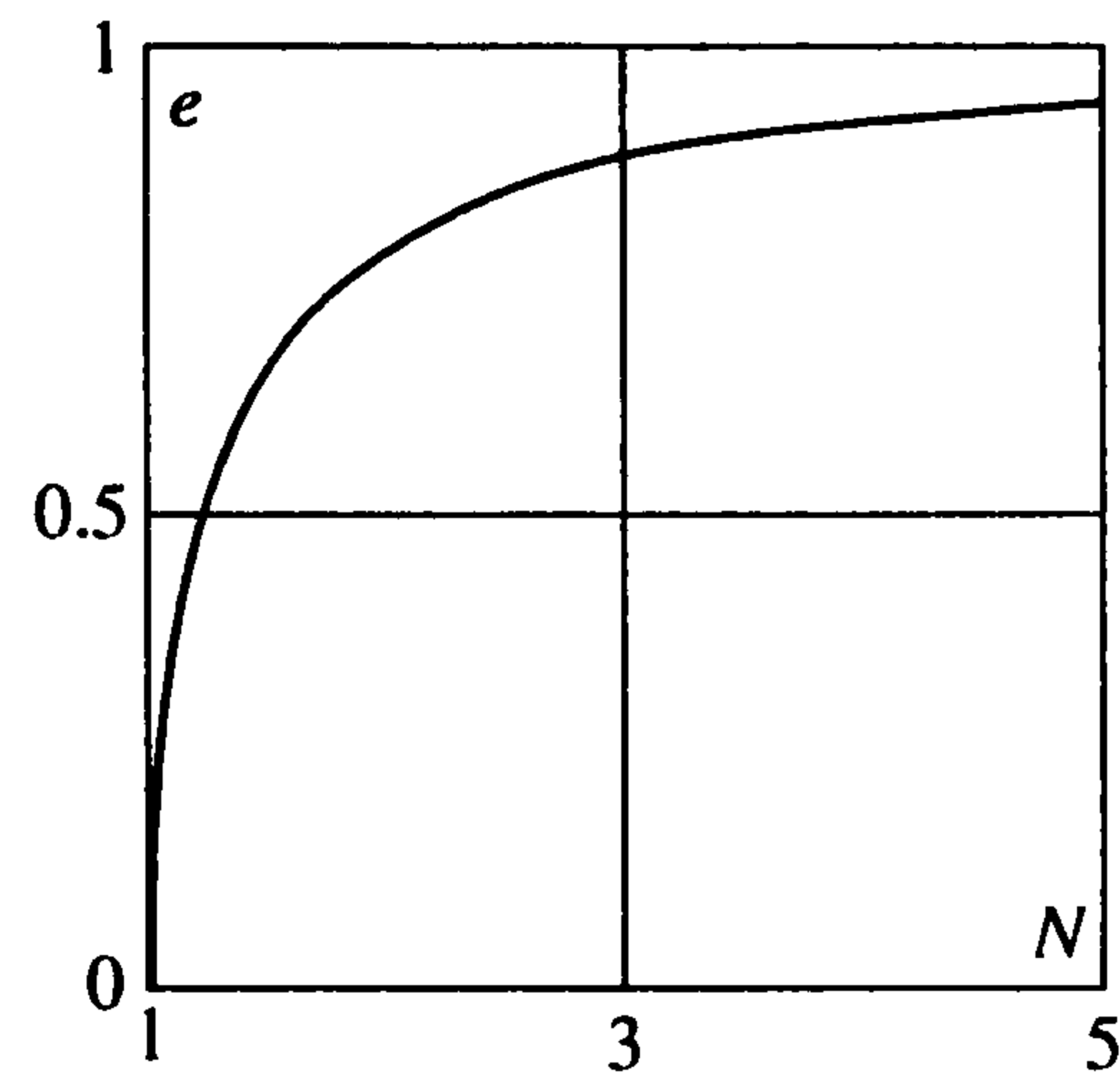
Следуя полученным ранее результатам [3], расчет теперь можно вести по следующей схеме. Зная исходные параметры задачи G , σ , h , R_1 , R_2 , a_0 , a_1 , и P , по второй формуле (5.6) вычислим значение N и по графику (фигура) или из первой формулы (5.6) определим соответствующее значение эксцентриситета e . Далее по формуле (5.5) найдем полуось a эллиптической области контакта, проверим, что $\lambda = h/a \geq 2$, а затем найдем полуось $b = a\sqrt{1-e^2}$. По формуле (5.4) определим осадку штампа δ , по формуле (5.3) – значение величины a_{00} и, наконец, по формуле (5.1) – функцию распределения контактных давлений.

Например, для задачи 2 при $m_1 = n_1 = 1$, а также при $h = 0.07$ м, $R_1 = 2$ м, $R_2 = 1$ м, $P = 0.1 \cdot 10^7$ Н и $E = 0.98 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\sigma = 0.35$ (латунь, $G = 2E(1 + \sigma)$) получим

$$\begin{aligned} N &= 1.9799 \text{ (1.9796)}, & e &= 0.77265 \text{ (0.77260)} \\ a &= 0.026275 \text{ м (0.026272 м)}, & \lambda &= 2.6641 \text{ (2.6644)} \\ b &= 0.016680 \text{ м (0.016680 м)}, & \delta &= 0.25936 \text{ мм (0.26166 мм)} \\ a_{00} &= 0.10894 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2 & & (0.10896 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2) \end{aligned}$$

В скобках даны значения величин, найденные для одиночного штампа на слое.

Замечание. Если в интегральном уравнении (2.2) область Ω симметрична относительно осей x и y , а функция $\delta(x, y)$ четна по x и y , то уравнение (2.2) описывает также контактную задачу для прямоугольного параллелепипеда $0 \leq z \leq h$, $|x| \leq m$, $|y| \leq n$, боковые грани которого шарнирно зашлемлены, а нижняя грань шарнирно зашлемлена (задача 1) или жестко зашлемлена (задача 2).



Автор благодарит И.И. Аргатова и И.А. Солдатенкова за обсуждение некоторых моментов работы, А.И. Журова за помощь в расчетах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (99-01-00038).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
2. *Александров В.М., Пожарский Д.А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
3. *Александров В.М., Шматкова А.А.* Вдавливание параболического штампа в упругий слой и двух параболических штампов в упругое полупространство // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 149–155.
4. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
5. *Гельфанд И.М., Шилев Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
6. Развитие теории контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. М.: Наука, 1976. 493 с.
7. *Баренблатт Г.И.* Об условиях конечности в механике сплошных сред. Статические задачи теории упругости // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 316–322.
8. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 798 с.
9. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 304 с.

Москва

Поступила в редакцию
3.V.2001