

УДК 539.3

© 2002 г. Л.А. Агаловян, Р.С. Геворкян, А.В. Саакян

К АСИМПТОТИЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИН ИЗ НЕСЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ

Установлена асимптотика и выведены рекуррентные формулы для определения напряженно-деформированного состояния пластин из несжимаемых материалов, когда на лицевых поверхностях пластины заданы кинематические условия. Сопряжением полученного решения с решением аналогичных задач для пластин из сжимаемых материалов построено решение краевой задачи для трехслойной пластины с несжимаемым средним слоем при полном контакте между слоями. Приведены примеры, моделирующие, в частности, работу резинометаллических сейсмоизоляторов.

Для решения краевых задач теории упругости для слоистых пластин и оболочек, когда на их лицевых поверхностях заданы кинематические и смешанные граничные условия (неклассические краевые задачи теории пластин), эффективным оказался асимптотический метод [1–5]. Однако установленные [1–5] рекуррентные формулы для пластин из сжимаемых материалов содержат особенность при переходе к несжимаемым материалам, что делает их непригодными для определения напряженно-деформированного состояния пластин из несжимаемых материалов.

1. Решение внутренней задачи. Рассматривается изотропная термоупругая тонкая пластина из несжимаемого материала, занимающая область

$$\Omega = \{x, y, z: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h \leq z \leq h, h \ll l, l = \min\{a, b\}\}$$

Требуется определить напряженно-деформированное состояние пластины, если на лицевых поверхностях заданы компоненты вектора перемещения

$$u_j(z = \pm h) = u_j^\pm(x, y), \quad j = x, y, z \quad (1.1)$$

а на боковой поверхности – одна из групп классических краевых условий теории упругости. Считается также, что присутствует температурное поле, которое учитывается по модели Дюгамеля – Неймана.

Для решения поставленной краевой задачи в уравнениях равновесия трехмерной задачи теории упругости и соотношения упругости с учетом температурных деформаций и несжимаемости материала перейдем к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{y}{l}, \quad \zeta = \frac{z}{h} = \varepsilon^{-1} \frac{z}{l} \left(\varepsilon = \frac{h}{l} \right), \quad u = \frac{u_x}{l}, \quad v = \frac{u_y}{l}, \quad w = \frac{u_z}{l} \quad (1.2)$$

В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром ε систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \zeta} &= 0 \quad (x, y; \xi, \eta), \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \zeta} = 0 \\ \sigma_{xx} &= \sigma_{zz} + 2G \left(2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) - 6G\alpha\theta \quad (x, y; \xi, \eta; u, v), \quad \sigma_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= \frac{1}{G} \sigma_{xz} - \frac{\partial w}{\partial \xi} \quad (x, y; \xi, \eta; u, v) \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial w}{\partial \zeta} &= - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + 3\alpha\theta, \quad \varepsilon^{-1} \frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{1}{3G} \left[\sigma_{zz} - \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right] + \alpha\theta \end{aligned} \quad (1.3)$$

(предпоследнее уравнение учитывает условие несжимаемости).

Нетрудно проверить, что при соблюдении условия несжимаемости и выполнения остальных соотношений упругости последнее из соотношений (1.3) удовлетворяется автоматически, в связи с чем в дальнейшем его не будем рассматривать.

Решение системы (1.3) будем искать в виде асимптотического разложения

$$Q = \varepsilon^{\chi_Q + s} Q^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad s = \overline{0, S} \quad (1.4)$$

где Q – любая из искоемых величин, χ_Q характеризует асимптотический порядок соответствующей величины, $s = \overline{0, S}$ означает, что по некому индексу s происходит суммирование в указанных пределах. Величины χ_Q должны быть подобраны таким образом, чтобы после подстановки ряда (1.4) в систему (1.3) получить непротиворечивую систему относительно $Q^{(s)}$. Эта цель достигается лишь при

$$\chi_{\sigma_{xx}} = \chi_{\sigma_{yy}} = \chi_{\sigma_{zz}} = -3, \quad \chi_{\sigma_{xz}} = \chi_{\sigma_{yz}} = \chi_{\sigma_{xy}} = -2, \quad \chi_{u_x} = \chi_{u_y} = -1, \quad \chi_{u_z} = 0 \quad (1.5)$$

Асимптотика (1.5) принципиально отличается от асимптотик [1–5], найденных для полос и пластин из сжимаемых материалов в случае как классической, так и неклассической краевой задачи.

Считается, что вклад температурного поля соизмерим со вкладом поверхностных сил, для этого необходимо, чтобы

$$\theta = \varepsilon^{-1+s} \theta^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad s = \overline{0, S} \quad (1.6)$$

Подставив выражения (1.4)–(1.6) в систему (1.3), получим непротиворечивую систему уравнений относительно коэффициентов разложениям $Q^{(s)}$. Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(s)} &= \sigma_{zz0}^{(s)}(\xi, \eta) + \sigma_{zz*}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ \sigma_{xx}^{(s)} &= \sigma_{zz}^{(s)} + 2G \left(2 \frac{\partial u^{(s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v^{(s-2)}}{\partial \eta} \right) - 6G\alpha\theta^{(s-2)} \quad (x, y; \xi, \eta; u, v) \\ \sigma_{xy}^{(s)} &= G \left(\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \xi} \right); \quad \sigma_{xz}^{(s)} = \sigma_{xz0}^{(s)}(\xi, \eta) - \zeta \frac{\partial \sigma_{zz0}^{(s)}}{\partial \xi} + \sigma_{xz*}^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (x, y; \xi, \eta) \\ u^{(s)} &= u_0^{(s)}(\xi, \eta) + \frac{1}{G} \zeta \sigma_{xz0}^{(s)} - \frac{1}{2G} \zeta^2 \frac{\partial \sigma_{zz0}^{(s)}}{\partial \xi} + u_*^{(s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (x, y; \xi, \eta; u, v) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
w^{(s)} &= w_0^{(s)}(\xi, \eta) - \zeta \left(\frac{\partial u_0^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_0^{(s)}}{\partial \eta} \right) - \frac{\zeta^2}{2G} \left(\frac{\partial \sigma_{xz0}^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz0}^{(s)}}{\partial \eta} \right) + \\
&+ \frac{\zeta^3}{6G} \left(\frac{\partial^2 \sigma_{xz0}^{(s)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz0}^{(s)}}{\partial \eta^2} \right) + w_*(\xi, \eta, \zeta) \\
\sigma_{zz}^{(s)*} &= - \int_0^\zeta \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s-2)}}{\partial \eta} \right) d\zeta \\
\sigma_{xz}^{(s)*} &= - \int_0^\zeta \left[\frac{\partial \sigma_{zz}^{(s)}}{\partial \xi} + G \left(\left(4 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) u^{(s-2)} + 3 \frac{\partial^2 v^{(s-2)}}{\partial \xi \partial \eta} - 6\alpha \theta^{(s-2)} \right) \right] d\zeta \quad (x, y; \xi, \eta; u, v) \\
u_*^{(s)} &= \int_0^\zeta \left(\frac{1}{G} \sigma_{xz}^{(s)} - \frac{\partial w^{(s-2)}}{\partial \xi} \right) d\zeta \quad (x, y; \xi, \eta; u, v), \quad w_*^{(s)} = - \int_0^\zeta \left(\frac{\partial u_*^{(s)}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_*^{(s)}}{\partial \eta} - 3\alpha \theta^{(s)} \right) d\zeta
\end{aligned}$$

где $\sigma_{xz0}^{(s)}$, $\sigma_{yz0}^{(s)}$, $\sigma_{zz0}^{(s)}$, $u_0^{(s)}$, $v_0^{(s)}$, $w_0^{(s)}$ – неизвестные пока функции интегрирования, которые будут определены при удовлетворении граничным условиям.

Удовлетворив условиям (1.1) и возвратившись к размерным координатам, получим следующие рекуррентные формулы для определения компонентов тензора напряжений и вектора перемещения:

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{s=0}^S R^{(s)}(x, y, z) \\
\sigma_{zz}^{(s)} &= \sigma^{(s)}(x, y) + \sigma_{zz}^{(s)*}(x, y, z) \\
\sigma_{xx}^{(s)} &= \sigma_{zz}^{(s)} + 2G \left(2 \frac{\partial u_x^{(s-2)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(s-2)}}{\partial y} \right) - 6G\alpha \theta^{(s-2)} \quad (x, y) \\
\sigma_{xy}^{(s)} &= G \left(\frac{\partial u_x^{(s-1)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(s-1)}}{\partial x} \right); \quad \sigma_{xz}^{(s)} = \frac{G}{2h} U_x^{(s)} + \sigma_{zx}^{(s)*} - z \frac{\partial \sigma^{(s)}}{\partial x} \quad (x, y)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
u_x^{(s)} &= u_x^{- (s)} + u_{x*}^{(s)} + \frac{z+h}{2h} U_x^{(s)} + \frac{1}{2G} (h^2 - z^2) \frac{\partial \sigma^{(s)}}{\partial x} - u_{x*}^{(s)}(z=-h) \quad (x, y) \\
u_z^{(s)} &= u_z^{- (s)} + u_{z*}^{(s)} - \frac{(z+h)^2}{4h} \left(\frac{\partial U_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial U_y^{(s)}}{\partial y} \right) + \frac{(2h-z)(h+z)^2}{4h^3} W^{(s)} - u_{z*}^{(s)}(z=-h) - \\
&- (z+h) \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_x^{- (s)} - u_{x*}^{(s)}(z=-h)) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y^{- (s)} - u_{y*}^{(s)}(z=-h)) \right] \\
\sigma_{zz}^{(s)*} &= - \int_0^z \left(\frac{\partial \sigma_{xz}^{(s-2)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(s-2)}}{\partial y} \right) dz \\
\sigma_{xz}^{(s)*} &= - \int_0^z \left[\frac{\partial \sigma_{zz}^{(s)}}{\partial x} + G \left(4 \frac{\partial^2 u_x^{(s-2)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x^{(s-2)}}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial^2 u_y^{(s-2)}}{\partial x \partial y} - 6\alpha \frac{\partial \theta^{(s-2)}}{\partial x} \right) \right] dz \quad (x, y)
\end{aligned}$$

$$u_{x*}^{(s)} = \int_0^z \left(\frac{1}{G} \sigma_{xz*}^{(s)} - \frac{\partial u_z^{(s-2)}}{\partial x} \right) dz \quad (x, y), \quad u_{z*}^{(s)} = - \int_0^z \left(\frac{\partial u_{x*}^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial u_{y*}^{(s)}}{\partial y} - 3\alpha \theta^{(s)} \right) dz$$

$$U_x^{(s)} = u_x^{+(s)} - u_x^{-(s)} - u_{x*}^{(s)}(z=h) + u_{x*}^{(s)}(z=-h) \quad (x, y, z)$$

$$W^{(s)} = U_z^{(s)} + h \left(\frac{\partial U_x^{(s)}}{\partial x} + \frac{\partial U_y^{(s)}}{\partial y} \right) + 2h \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_x^{-(s)} - u_{x*}^{(s)}(z=-h)) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y^{-(s)} - u_{y*}^{(s)}(z=-h)) \right]$$

$$u_x^{\pm(0)} = u_x^{\pm}, \quad u_x^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0 \quad (x, y, z)$$

где $\sigma^{(s)}$ – решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \sigma^{(s)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma^{(s)}}{\partial y^2} = - \frac{3G}{2h^3} W^{(s)} \quad (1.9)$$

В частности, для главного (нулевого) приближения имеем

$$W^{(0)} = u_z^+ - u_z^- + h \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_x^+ + u_x^-) + \frac{\partial}{\partial y} (u_y^+ + u_y^-) \right] - 3\alpha \int_{-h}^h \theta^{(0)} dz \quad (1.10)$$

Отметим, что в случае пластины из сжимаемого материала решение внутренней задачи при граничных условиях (1.1) полностью определяется после удовлетворения этим условиям, условия же на боковой поверхности не влияют на это решение – ими обусловлен пограничный слой. Такая специфика решения впервые была установлена для полосы [6] и для пластин [2, 5, 7]. Из исследований этого направления отметим также работу [8]. Для пластин же из несжимаемого материала, как видим, картина получилась иной. Поскольку решение внутренней задачи выражается через решение уравнения (1.9), которое будет содержать новые произвольные постоянные, подлежащие определению из условий на боковой поверхности, то в отличие от случая сжимаемой пластины последние условия, естественно, будут влиять на решение внутренней задачи.

Определив решение уравнения (1.9), по формулам (1.8) определяем все искомые величины внутренней задачи для произвольного приближения s .

В некоторых случаях, например, когда функции, заданные на поверхностях $z = \pm h$, являются полиномами, итерационный процесс обрывается и приходим к математически точному решению уравнений для слоя.

В силу сингулярной возмущенности исходной краевой задачи построенным решением невозможно удовлетворить граничным условиям в каждой точке боковой поверхности пластины. Для этого необходимо построить пограничный слой. Решение пограничного слоя строится и сопрягается с решением внутренней задачи известным образом [5, 9, 10].

2. Решение задачи пограничного слоя. Чтобы построить решение для пограничного слоя, локализованного вблизи края $x = 0$, в уравнениях (1.3) сделаем новую замену переменной $t = \xi/\varepsilon$ и решение вновь полученной системы без сохранения температурных слагаемых (они учтены в решении внутренней задачи) будем искать в виде

$$\sigma_{ik} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{ik}^{(s)}(\eta, \zeta) \exp(-\lambda t), \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

$$U, V, W = \varepsilon^s (U^{(s)}, V^{(s)}, W^{(s)}) \exp(-\lambda t), \quad s = \overline{0, N}$$

где σ_{ik} , U , V , W – компоненты соответственно тензора напряжений и безразмерного вектора перемещения погранслоя, λ – неизвестное пока числа, $\text{Re } \lambda > 0$ характеризует скорость затухания величин погранслоя по мере удаления от края. Подставив выра-

жения (2.1) в преобразованную систему (1.3), для определения коэффициентов разложения (2.1) получим следующие две подсистемы:

$$-\lambda\sigma_{12}^{(s)} + \frac{\partial\sigma_{23}^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta} = 0, \quad \sigma_{12}^{(s)} = -G\lambda V^{(s)} + G\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta} = \frac{1}{G}\sigma_{23}^{(s)}$$

$$-\lambda\sigma_{11}^{(s)}(\eta, \zeta) + \frac{\partial\sigma_{13}^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta} = 0, \quad -\lambda\sigma_{13}^{(s)} + \frac{\partial\sigma_{33}^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial\sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta} = 0$$

$$\sigma_{11}^{(s)} = \sigma_{33}^{(s)} + 2G\left(-2\lambda U^{(s)} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}\right), \quad \sigma_{22}^{(s)} = \sigma_{33}^{(s)} + 2G\left(2\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta} - \lambda U^{(s)}\right) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial\zeta} - \lambda W^{(s)} = \frac{1}{G}\sigma_{13}^{(s)}, \quad \frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta} - \lambda U^{(s)} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta} = 0$$

В системе (2.2) напряжения можно выразить через перемещение $V^{(s)}$:

$$\sigma_{23}^{(s)} = G\frac{\partial V^{(s)}}{\partial\zeta} + G\frac{\partial W^{(s-1)}}{\partial\eta}, \quad \sigma_{12}^{(s)} = -G\lambda V^{(s)} + G\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta} \quad (2.4)$$

а $V^{(s)}$ определяется из уравнения

$$\frac{\partial^2 V^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \lambda^2 V^{(s)} = R_v^{(s-1)}; \quad R_v^{(s-1)} = \lambda\frac{\partial U^{(s-1)}}{\partial\eta} - \frac{\partial^2 W^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} - \frac{1}{G}\frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta} \quad (2.5)$$

Входящие в систему (2.3) неизвестные величины можно выразить через $W^{(s)}$:

$$\sigma_{11}^{(s)} = \frac{G}{\lambda^2}\left[\frac{\partial^3 W^{(s)}}{\partial\zeta^3} - \lambda^2\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}\right] + R_{11}^{(s-1)}, \quad \sigma_{22}^{(s)} = \frac{G}{\lambda^2}\left[\frac{\partial^3 W^{(s)}}{\partial\zeta^3} + \lambda^2\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}\right] + R_{22}^{(s-1)}$$

$$\sigma_{33}^{(s)} = \frac{G}{\lambda^2}\left[\frac{\partial^3 W^{(s)}}{\partial\zeta^3} + 3\lambda^2\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta}\right] + R_{33}^{(s-1)}, \quad \sigma_{13}^{(s)} = \frac{G}{\lambda}\left[\frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial\zeta^2} - \lambda^2 W^{(s)}\right] + R_{13}^{(s-1)}$$

$$U^{(s)} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial W^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}\right] \quad (2.6)$$

$$R_{11}^{(s-1)} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{G}{\lambda}\frac{\partial^3 V^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta^2}\right], \quad R_{22}^{(s-1)} = R_{33}^{(s-1)} + 2G\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}$$

$$R_{33}^{(s-1)} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta} + \frac{G}{\lambda^2}\left[\frac{\partial^3 V^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta^2} + 2\lambda^2\frac{\partial V^{(s-1)}}{\partial\eta}\right], \quad R_{13}^{(s-1)} = \frac{G}{\lambda}\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}$$

а для определения $W^{(s)}$ из системы (2.3) вытекает уравнение

$$\frac{\partial^4 W^{(s)}}{\partial\zeta^4} + 2\lambda^2\frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \lambda^4 W^{(s)} = R_w^{(s-1)} \quad (2.7)$$

$$R_w^{(s-1)} = -\frac{\partial^4 V^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta^3} - \lambda^2\frac{\partial^2 V^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} - \frac{\lambda}{G}\left(\frac{\partial^2\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta} + \lambda\frac{\partial\sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right)$$

Соотношениями (2.4) и уравнением (2.5) определяется антиплоский пограничный слой (АПС), а посредством (2.6), (2.7) – плоский пограничный слой (ППС), т.е. антиплоское и плоское краевые напряженно-деформированные состояния.

При $s = 0$ правые части уравнений (2.5), (2.7) обращаются в нуль. Решив эти однородные уравнения и удовлетворив соответствующим (1.1) однородным граничным условиям

$$U = 0, \quad W = 0, \quad V = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1 \quad (2.8)$$

получим две независимые системы однородных алгебраических уравнений. Из условий разрешимости этих систем (главные определители равны нулю) вытекают следующие значения для показателя λ и решения:

симметричная задача ($U, V, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$ – четные, $W, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ – нечетные по ζ функции)

$$\lambda_n^a = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \quad V_a^{(0)} = C_{1n}(\eta) \cos(2n+1)\frac{\pi}{2}\zeta, \quad n \in N \quad (2.9)$$

$$\sin 2\lambda_p = 2\lambda_p, \quad W_p^{(0)} = C_{1p}(\eta)(\sin \lambda_p \zeta - \zeta \operatorname{tg} \lambda_p \cos \lambda_p \zeta) \quad (2.10)$$

где индексом a обозначены величины для АПС, индексом p – для ППС. Каждому корню λ_p уравнения (2.10) соответствует $\bar{\lambda}_p$, поэтому $W_p^{(0)}$ будет вещественным и будет содержать две неизвестные вещественные функции от η .

кососимметричная задача ($U, V, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}$ – нечетные, $W, \sigma_{13}, \sigma_{23}$ – четные по ζ функции)

$$\lambda_n^a = \pi n, \quad V_a^{(0)} = C_{3n}(\eta) \sin \pi n \zeta, \quad n \in N \quad (2.11)$$

$$\sin 2\lambda_p = -2\lambda_p, \quad W_p^{(0)} = C_{4p}(\eta)(\zeta \sin \lambda_p \zeta - \operatorname{tg} \lambda_p \cos \lambda_p \zeta) \quad (2.12)$$

Уравнения $\sin 2\lambda_p = \pm 2\lambda_p$ имеют комплексно-сопряженные корни, их значения приведены ранее [5].

При $s > 0$ необходимо решить неоднородные уравнения (2.5), (2.7), при этом решение будет зависеть от того, какое из вычисленных значений λ^a или λ_p взято за основу. Необходимо рассматривать оба случая. В результате будем иметь общие решения однородных уравнений типа Q_a, Q_p . Если за основу вычислений брать λ^a , то из (2.6)–(2.8) будет следовать

$$U_a^{(0)} = W_a^{(0)} = \sigma_{11a}^{(0)} = \sigma_{22a}^{(0)} = \sigma_{13a}^{(0)} = \sigma_{33a}^{(0)} \equiv 0 \quad (2.13)$$

Если же за основу вычислений берется λ_p , то

$$V_p^{(0)} = \sigma_{12p}^{(0)} = \sigma_{23p}^{(0)} \equiv 0 \quad (2.14)$$

Для приближений $s > 0$ фигурирующие в формулах (2.13) и (2.14) величины отличны от нуля, т.е. основному АПС будет сопутствовать ППС, характеризуемый тем же показателем экспоненциального затухания λ^a , и наоборот.

Поэтому ППС и АПС, для которых величины имеют соответственно индексы a и p , будем называть сопутствующими пограничными слоями (СПС). Отметим, что величины для СПС непосредственно вычисляются, если известны величины для основных пограничных слоев. Решив уравнения (2.5), (2.7) при $\lambda = \lambda^a$ и $\lambda = \lambda_p$, для приближений $s > 0$ будем иметь

$$V^{(s)} = V_{0a}^{(s)} + V_{0p}^{(s)} + V_{*a}^{(s)} + V_{*p}^{(s)}, \quad W^{(s)} = W_{0a}^{(s)} + W_{0p}^{(s)} + W_{*a}^{(s)} + W_{*p}^{(s)} \quad (2.15)$$

где первые два слагаемых в каждом представлении – общие решения однородных, а последние два – частные решения неоднородных уравнений (2.5), (2.7). Согласно

соотношениям (2.9)–(2.12), в правых частях уравнений (2.5), (2.7) будут фигурировать тригонометрические функции, поэтому определение частных решений не представит большого труда. Вычислив $V^{(s)}$, $W^{(s)}$, а по формуле (2.6) – $U^{(s)}$, удовлетворив условиям (2.8), с учетом данных для основных пограничных слоев (2.9)–(2.12) получим алгебраические системы относительно неизвестных в решениях для СПС (решения однородных уравнений основных пограничных слоев тождественно удовлетворяют условиям (2.8)), откуда эти неизвестные определяются однозначно. В результате имеем следующее решение для пограничных слоев:

симметричная задача

$$\begin{aligned} V^{(s)} &= C_{1n}^{(s)}(\eta) \cos(2n+1) \frac{\pi}{2} \zeta + C_{2p}^{(s)} \cos \lambda_p \zeta + V_{*b}^{(s)}, \quad C_{2p}^{(s)} = -\frac{\tilde{V}_{*b}^{(s)}}{\cos \lambda_p} \\ W^{(s)} &= C_{1p}^{(s)}(\eta) (\sin \lambda_p \zeta - \zeta \operatorname{tg} \lambda_p \cos \lambda_p \zeta) + C_{1a}^{(s)}(\eta) \sin \lambda_a \zeta + \zeta U_*^{(s)}(\zeta=1) \cos \lambda_a \zeta + W_{*b}^{(s)} \\ U^{(s)} &= \frac{1}{\lambda_p} C_{1p}^{(s)}(\eta) [(\lambda_p - \operatorname{tg} \lambda_p) \cos \lambda_p \zeta + \zeta \lambda_p \operatorname{tg} \lambda_p \sin \lambda_p \zeta] + C_{1a}^{(s)}(\eta) \cos \lambda_a \zeta + \\ &+ \frac{(-1)^n}{\lambda_a} U_*^{(s)}(\zeta=1) (\cos \lambda_a \zeta - \lambda_a \zeta \sin \lambda_a \zeta) + U_*^{(s)}, \quad C_{1a}^{(s)}(\eta) = (-1)^{n+1} \tilde{W}_{*b}^{(s)} \\ U_*^{(s)} &= \frac{1}{\lambda_a} \frac{\partial W_{*a}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\lambda_p} \frac{\partial W_{*p}^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\lambda_a} \frac{\partial V_a^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{1}{\lambda_p} \frac{\partial V_p^{(s-1)}}{\partial \eta} \\ \lambda_a &= (2n+1) \frac{\pi}{2}; \quad \sin 2\lambda_p = 2\lambda_p \end{aligned} \quad (2.16)$$

кососимметричная задача

$$\begin{aligned} V^{(s)} &= C_{3n}^{(s)}(\eta) \sin \pi n \zeta + C_{1p}^{(s)} \sin \lambda_p \zeta + V_{*b}^{(s)}, \quad C_{1p}^{(s)} = -\frac{\tilde{V}_{*b}^{(s)}}{\sin \lambda_p} \\ W^{(s)} &= C_{4p}^{(s)}(\eta) (\zeta \sin \lambda_p \zeta - \operatorname{tg} \lambda_p \cos \lambda_p \zeta) + (-1)^{n+1} \zeta U_*^{(s)}(\zeta=1) \sin \pi n \zeta + \\ &+ (-1)^{n+1} \tilde{W}_{*b}^{(s)} \cos \pi n \zeta + W_{*b}^{(s)} \\ U^{(s)} &= C_{4p}^{(s)}(\eta) [(1 + \lambda_p \operatorname{tg} \lambda_p) \sin \lambda_p \zeta + \zeta \lambda_p \cos \lambda_p \zeta] + \\ &+ \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} U_*^{(s)}(\zeta=1) (\sin \pi n \zeta + \pi n \zeta \cos \pi n \zeta) + (-1)^n \tilde{W}_{*b}^{(s)} \sin \pi n \zeta + U_*^{(s)} \\ \sin 2\lambda_p &= -2\lambda_p \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь

$$V_{*b}^{(s)} = V_{*a}^{(s)} + V_{*p}^{(s)}, \quad \tilde{V}_{*b}^{(s)} = V_{*a}^{(s)}(\zeta=1) + V_{*p}^{(s)}(\zeta=1) \quad (V, W)$$

Остальные величины вычисляются по формулам (2.4), (2.6).

В формулах (2.16), (2.17) функции $C_{1n}^{(s)}(\eta)$, $C_{3n}^{(s)}(\eta)$ – вещественные, а $C_{1p}^{(s)}(\eta)$, $C_{4p}^{(s)}(\eta)$ – комплексные. Однако, поскольку каждому λ_p соответствует $\bar{\lambda}_p$, в конечном итоге выражения для $W^{(s)}$, $U^{(s)}$ вещественны и содержат две группы вещественных, пока произвольных функций. Действительно, обозначив коэффициент при $C_{1p}^{(s)}(\eta)$ в выражении для $W^{(s)}$ через F_w , а для $U^{(s)}$ – через F_u и приняв

$$C_{1p}^{(s)}(\eta) = \frac{1}{2} [A_p^{(s)}(\eta) - iB_p^{(s)}(\eta)]$$

будем иметь

$$C_{1p}^{(s)}(\eta)[\sin \lambda_p \zeta - \zeta \operatorname{tg} \lambda_p \cos \lambda_p \zeta] = A_p^{(s)} \operatorname{Re} F_w + B_p^{(s)} \operatorname{Im} F_w \quad (2.18)$$

$$C_{1p}^{(s)}(\eta) \frac{1}{\lambda_p} [(\lambda_p - \operatorname{tg} \lambda_p) \cos \lambda_p \zeta + \zeta \lambda_p \operatorname{tg} \lambda_p \sin \lambda_p \zeta] = A_p^{(s)} \operatorname{Re} F_u + B_p^{(s)} \operatorname{Im} F_u$$

Таким образом, общее решение для АПС и ППС содержит три группы произвольных пока функций и, как убедимся ниже, в совокупности с решением внутренней задачи позволяет удовлетворить трем условиям на боковой поверхности пластины.

В силу линейности и однородности уравнений и граничных условий решением для пограничного слоя будет также $\varepsilon^{\chi+s} Q_a^{(s)} + \varepsilon^{\mu+s} Q_p^{(s)}$. Тогда общее решение задачи запишется в виде

$$Q = Q_{in} + \varepsilon^{\chi+s} Q_a^{(s)} + \varepsilon^{\mu+s} Q_p^{(s)}, \quad s = \overline{0, N} \quad (2.19)$$

где Q_{in} – решение внутренней задачи, χ, μ – неизвестные пока целые числа, которые должны быть подобраны так, чтобы получить непротиворечивый процесс удовлетворения граничным условиям на боковой поверхности пластины [5, 9, 10].

При написании решения (2.19), как обычно, принято, что величины для пограничного слоя, построенного при $x = 0$, пренебрежимо малы при $x = a$, и наоборот. Это ставит ограничения на продольный размер пластины a . Учитывая значения корней (2.9)–(2.12), в симметричной задаче имеем

$$1 + \exp\left(-\frac{\pi}{2} \frac{a}{h}\right) \approx 1, \quad 1 + \exp\left(-\frac{a}{h} \operatorname{Re} \lambda_1\right) \approx 1 + \exp\left(-\frac{a}{h} 3.75\right) \approx 1 \quad (2.20)$$

а в кососимметричной задаче

$$1 + \exp\left(-\frac{\pi a}{h}\right) \approx 1, \quad 1 + \exp\left(-\frac{a}{h} 2.11\right) \approx 1 \quad (2.21)$$

В заключение этого раздела отметим, что аналогичным образом строятся решения для пограничных слоев вблизи $x = a, y = 0, b$. Данные для этих пограничных слоев можно получить из приведенных выше данных простой заменой переменной.

3. Сопряжение решения внутренней задачи и решения для пограничного слоя. Используя общее решение в виде (2.19), изложим процедуру удовлетворения граничным условиям на боковой поверхности. Пусть боковая поверхность $x = 0$ свободна. Требуется удовлетворить следующим условиям в трехмерной задаче:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xz} = \sigma_{xy} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad (3.1)$$

Согласно выражению (2.19) и данным, приведенным в разд. 1, 2, условия (3.1) запишутся в виде

$$\varepsilon^{-3+s} \sigma_{xx}^{(s)} + \varepsilon^{\chi-1+s} \sigma_{11a}^{(s)} + \varepsilon^{\mu-1+s} \sigma_{11p}^{(s)} = 0$$

при $x = 0$ ($t = 0$)

$$\varepsilon^{-2+s} \sigma_{xy}^{(s)} + \varepsilon^{\chi-1+s} \sigma_{12a}^{(s)} + \varepsilon^{\mu-1+s} \sigma_{12p}^{(s)} = 0 \quad (y, z; 2, 3)$$

Последние условия будут непротиворечивыми, т.е. позволят последовательно определить величины как для внутренней задачи, так и для пограничных слоев, если $\chi = \mu = -1$. В результате имеем

$$\sigma_{xx}^{(s)} + \sigma_{11a}^{(s-1)} + \sigma_{11p}^{(s-1)} = 0; \quad \sigma_{xy}^{(s)} + \sigma_{12a}^{(s)} + \sigma_{12p}^{(s)} = 0 \quad (y, z; 2, 3) \quad \text{при } x = 0 (t = 0) \quad (3.2)$$

Учитывая соотношения (2.13), (2.14), запишем условия (3.2) при $s = 0$

$$\sigma_{xx}^{(0)} = 0; \quad \sigma_{xz}^{(0)} + \sigma_{13p}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{xy}^{(0)} + \sigma_{12a}^{(0)} = 0 \quad \text{при } x = 0 (t = 0) \quad (3.3)$$

Поскольку уравнение (1.9) второго порядка, первое из условий (3.3) достаточно для определения решения внутренней задачи. После определения $\sigma^{(0)}$ по формулам (1.8) определятся $\sigma_{xy}^{(0)}, \sigma_{xz}^{(0)}$. Следовательно, для определения АПС имеем условие

$$\sigma_{12a}^{(0)}(\xi = 0) = -\sigma_{xy}^{(0)}(x = 0) \quad (3.4)$$

Используя соотношения (2.4), (2.9) или (2.11), определим произвольную постоянную в решении для АПС. Поскольку $\sigma_{xy}^{(0)} \equiv 0$, то $Q_a^{(0)} \equiv 0$. Для определения ППС из условий (3.3) следует одно из двух требуемых условий

$$\sigma_{13p}^{(0)} = -\sigma_{xz}^{(0)}(x = 0) \quad \text{при } t = 0 \quad (3.5)$$

второе же условие получится при рассмотрении приближения $s = 1$.

При учете соотношений (2.13) при $s = 1$ имеем условия

$$\sigma_{xx}^{(1)} + \sigma_{11p}^{(0)} = 0; \quad \sigma_{xy}^{(1)} + \sigma_{12a}^{(1)} + \sigma_{12p}^{(1)} = 0 \quad (y, z; 2, 3) \quad \text{при } x = 0 (t = 0) \quad (3.6)$$

В уравнении (1.9) $W^{(1)} = 0$, и из формул (1.8) следует

$$\sigma_{xx}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{xz}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{xy}^{(1)} \neq 0$$

Следовательно, ППС определится из условий

$$\sigma_{11p}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{13p}^{(0)} = -\sigma_{xz}^{(0)}(x = 0) \quad \text{при } t = 0 \quad (3.7)$$

Из условий (3.6) вытекает также условие

$$\sigma_{12a}^{(1)} = -\sigma_{12p}^{(1)} - \sigma_{xy}^{(1)}(x = 0) \quad \text{при } t = 0 \quad (3.8)$$

для определения АПС и одно из двух условий для ППС

$$\sigma_{13p}^{(1)} = -\sigma_{13a}^{(1)} \quad \text{при } t = 0 \quad (3.9)$$

В условиях (3.8), (3.9) $\sigma_{12p}^{(1)}, \sigma_{13a}^{(1)}$ – известные функции, как величины сопутствующих пограничных слоев.

Аналогичным образом сопрягаются решения для приближений $s > 1$. Укажем, что изложенная процедура сопряжения решений справедлива как для симметричной, так и для антисимметричной задачи.

Проиллюстрируем изложенную процедуру на следующем примере прикладного характера, моделирующем работу сейсмоизолятора. Пусть лицевым поверхностям пластины сообщены постоянные вертикальные перемещения Δ

$$u_x^\pm = u_y^\pm = 0, \quad u_z^\pm = \mp \Delta \quad (3.10)$$

Боковая поверхность свободна от нагрузок, а изменение температурного поля θ постоянно.

Согласно формулам (1.8), $\sigma_{xx}^{(0)} = \sigma_{yy}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(0)} = \sigma^{(0)}$, а $\sigma^{(0)}$ определяется из уравнения (1.9) с правой частью

$$-\frac{3G}{2h^3} W^{(0)} = \frac{3G}{h^3} (\Delta + 3\alpha h \theta)$$

при первом граничном условии (3.3).

Решение имеет вид

$$\sigma^{(0)} = \sigma = - \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{2m-1,2n-1} \sin \frac{\pi(2m-1)x}{a} \sin \frac{\pi(2n-1)y}{b} \quad (3.11)$$

$$A_{2m-1,2n-1} = \frac{48G(\Delta + 3h\alpha\theta)}{\pi^4 h^3} \frac{a^2 b^2}{(2m-1)(2n-1)[(2m-1)^2 b^2 + (2n-1)^2 a^2]}$$

Согласно формулам (1.8), $\sigma_{xy}^{(0)} = 0$, а из соотношений (2.4), (2.9) следует $V_a^{(0)} = 0$, т.е. $Q_a^{(0)} = 0$. Таким образом, АПС можно пренебречь.

Для определения ППС имеем граничные условия

$$\sigma_{11p}^{(0)} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (3.12)$$

$$\sigma_{13p}^{(0)} = -\sigma_{xz}^{(0)}(x=0) = -\frac{\pi l}{a} \zeta \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{2m-1,2n-1} (2m-1) \sin \frac{\pi(2n-1)y}{b} y$$

Используя соотношения (2.6), (2.10), (2.18), удовлетворив этим условиям, определим ППС. Отметим, что условиям (3.12) можно удовлетворить лишь приближенно, для чего можно использовать методы граничной коллокации, наименьших квадратов и др.

При $s = 1$

$$\sigma_{xx}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = h^2(1 - \zeta^2) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} \quad (3.13)$$

$$u_x^{(1)} = u_y^{(1)} = u_z^{(1)} = 0$$

На этом этапе из условия (3.8) и соотношений (2.4), (2.16) очевидными действиями определяется АПС.

При $s = 2$

$$\sigma_{xx}^{(2)} = h^2(1 - \zeta^2) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{3}{2h} G \zeta^2 (\Delta + 3\alpha h \theta), \quad \sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{yz}^{(2)} = \sigma_{xy}^{(2)} = 0 \quad (3.14)$$

$$u_x^{(2)} = u_y^{(2)} = u_z^{(2)} = 0$$

Для определения пограничных слоев из (3.2) вытекают условия

$$\sigma_{11p}^{(1)} = -\sigma_{11a}^{(1)} - \sigma_{xx}^{(2)}(x=0), \quad \sigma_{13p}^{(1)} = -\sigma_{13a}^{(1)}, \quad \sigma_{12a}^{(2)} = -\sigma_{12p}^{(2)} \quad \text{при } t = 0 \quad (3.15)$$

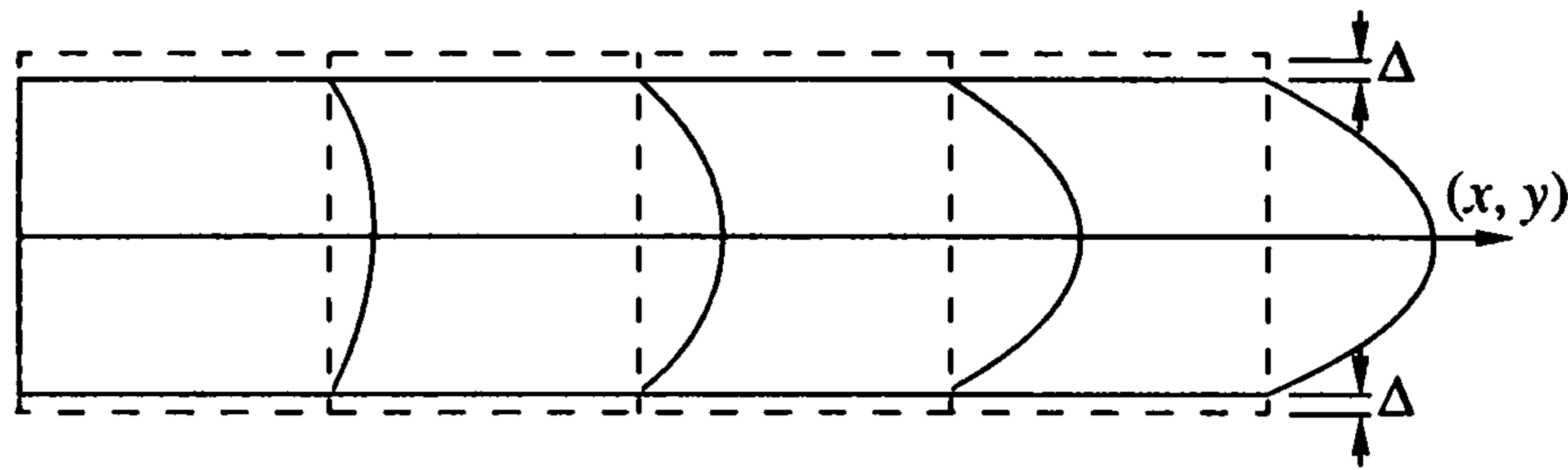
В правых частях равенств (3.15) фигурируют известные функции, однако в практических приложениях вряд ли есть необходимость в вычислении высших приближений для пограничного слоя.

При $s \geq 3$ имеем $Q_{in}^{(s)} \equiv 0$, и процесс определения величин внутренней задачи обрывается. Объединив все приближения, для величин внутренней задачи будем иметь

$$\sigma_{xx} = \sigma + (h^2 - z^2) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - \frac{3G}{2h^3} z^2 (\Delta + 3\alpha h \theta)(x, y), \quad \sigma_{zz} = \sigma + \frac{3G}{2h^3} z^2 (\Delta + 3\alpha h \theta) \quad (3.16)$$

$$\sigma_{xy} = (h^2 - z^2) \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{xz} = -z \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y)$$

$$u_x = \frac{1}{2G} (h^2 - z^2) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y), \quad u_z = 3z\alpha\theta + \frac{z}{2h^3} (z^2 - 3h^2)(\Delta + 3\alpha h \theta)$$



Фиг. 1

На основе полученных для перемещений формул на фиг. 1 представлено деформированное состояние несжимаемой пластины. Ввиду симметрий изображена только одна половина пластины.

Приведенный пример моделирует работу резинометаллических сейсмоизоляторов [11–15]. На основе некоторых гипотез и без учета температурного поля он рассмотрен также ранее [15]; полученное в [15] решение, естественно, несколько отличается от асимптотически точного решения (3.16).

4. Решение внутренней задачи для трехслойной пластины со средним несжимаемым слоем. Построенное выше общее решение для несжимаемой пластины и решение для сжимаемой пластины [2, 5] в совокупности позволяют найти напряженно-деформированное состояние слоистых пластин, часть слоев которых из сжимаемого, часть – из несжимаемого материалов. Приведем алгоритм решения и данные для трехслойных пластин со средним несжимаемым слоем, подход остается в силе и для многослойных пластин.

Рассмотрим трехслойную пластину, которая занимает область

$$\Omega = \{x, y, z : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -h - h_e \leq z \leq h + h_e, \max\{h, h_e\} < \min\{a, b\}\}$$

где слои $h_e \leq z \leq h + h_e$, $-h - h_e \leq z \leq -h_e$ из сжимаемого материала, а средний слой $-h_e \leq z \leq h_e$ – из несжимаемого.

На лицевых поверхностях пластины заданы кинематические условия

$$u_j[z = \pm(h + h_e)] = u_j^\pm(x, y), \quad j = x, y \quad (4.1)$$

Между слоями выполняются условия полного контакта

$$u_j^{(1)}(z = h_e) = u_j^e(z = h_e), \quad \sigma_{jz}^{(1)}(z = h_e) = \sigma_{jz}^e(z = h_e) \quad (4.2)$$

$$u_j^{(3)}(z = -h_e) = u_j^e(z = -h_e), \quad \sigma_{jz}^{(3)}(z = -h_e) = \sigma_{jz}^e(z = -h_e), \quad j = x, y, z$$

Температурное поле задано функцией $\theta(x, y, z)$.

Здесь и в дальнейшем величинам для первого и третьего слоев приписываются индексы (1) и (3), а величинам для среднего слоя – индекс e .

Компоненты тензора напряжений и вектора перемещения вычисляются для несжимаемого слоя по формулам (1.4)–(1.7), а для сжимаемых слоев по формулам, выведенным ранее [2], и непосредственно удовлетворяются условия (4.1), (4.2). В результате получается итерационный процесс для определения всех искомых величин с заранее заданной асимптотической точностью.

Изложенным выше способом строится также пограничный слой, однако выкладки и окончательные формулы оказались громоздкими, поэтому здесь приведем данные лишь для внутренней задачи.

Если ограничиться первыми двумя шагами итерации и ввести обозначения

$$t_j^- = \frac{u_j^+ - u_j^-}{2}, \quad t_j^+ = \frac{u_j^+ + u_j^-}{2}, \quad j = x, y, z, \quad P = \frac{h_e}{G_e}, \quad M = \frac{h}{G}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

то для трехслойной пластины при постоянном изменении температурного поля будем иметь:

для первого (сжимаемого) слоя $h_e \leq z \leq h_e + h$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma, \quad \sigma_{xx}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(1)} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} G \alpha \theta, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = 0$$

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \frac{1}{P+M} \left[t_x^- + h \frac{\partial t_z^+}{\partial x} \right] - \left(h_e \frac{1-2\nu}{1-\nu} + z \frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (x, y) \quad (4.3)$$

$$u_x^{(1)} = u_x^+ - (z-h-h_e) \frac{\partial u_z^+}{\partial x} + \frac{M}{h} (z-h-h_e) \left[\frac{1}{P+M} \left(t_x^- + h \frac{\partial t_z^+}{\partial x} \right) - h_e \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] +$$

$$+ \frac{M}{h} \left(\frac{(h+h_e)^2 - z^2}{2} \frac{\nu}{1-\nu} - \frac{(z-h-h_e)^2}{4} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (x, y)$$

$$u_z^{(1)} = u_z^+ + (z-h-h_e) \frac{M}{2h} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \sigma + (z-h-h_e) \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta$$

для среднего (несжимаемого) слоя $-h_e \leq z \leq h_e$

$$\sigma_{zz}^e = \sigma, \quad \sigma_{xx}^e = \sigma_{yy}^e = \sigma, \quad \sigma_{xy}^e = 0$$

$$\sigma_{xz}^e = \frac{1}{P+M} \left[t_x^- + h \frac{\partial t_z^+}{\partial x} \right] - z \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (x, y)$$

$$u_x^e = t_x^+ + h \frac{\partial t_z^-}{\partial x} + \frac{P}{P+M} \frac{z}{h_e} \left(t_x^- + h \frac{\partial t_z^+}{\partial x} \right) +$$

$$+ \left[\frac{Ph_e}{2} - \frac{P}{2h_e} z^2 + M \left(h_e + \frac{h}{4} \frac{4\nu-1}{1-\nu} \right) \right] \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (x, y) \quad (4.4)$$

$$u_z^e = t_z^+ + 3z\alpha_e \theta - \frac{\pi}{P+M} \frac{(h_e^2 - z^2)}{2h_e} \left(\frac{\partial t_x^-}{\partial x} + \frac{\partial t_y^-}{\partial y} + h \nabla^2 t_z^+ \right) - z \left(\frac{\partial t_x^+}{\partial x} + \frac{\partial t_y^+}{\partial y} + h \nabla^2 t_z^- \right) -$$

$$- \left[\frac{Ph_e}{2} z - \frac{P}{6h_e} z^3 + M \left(h_e + \frac{h}{4} \frac{4\nu-1}{1-\nu} \right) z \right] \nabla^2 \sigma$$

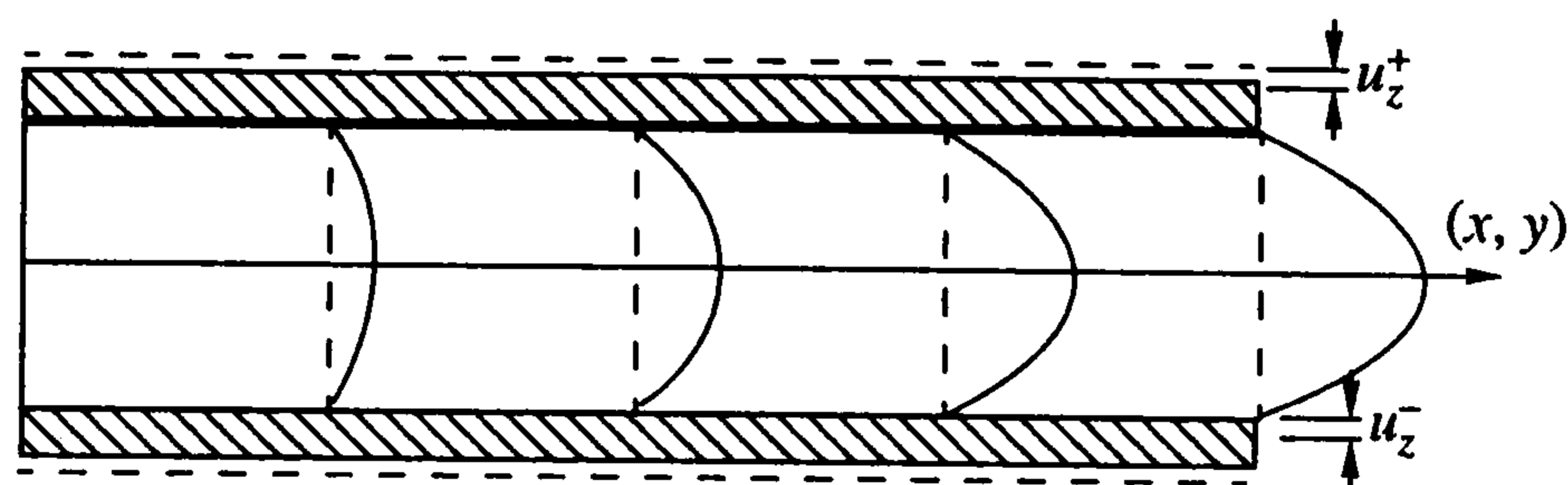
для третьего (сжимаемого) слоя $-h-h_e \leq z \leq -h_e$ решение дается формулами, отличающимися от (4.3) лишь заменой h_e на $-h_e$ и $h+h_e$ на $-(h+h_e)$.

Здесь σ – решение уравнения

$$\nabla^2 \sigma - k^2 \sigma = -k^2 \Phi \quad (4.5)$$

$$k^2 = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left[2h_e \left(h_e + \frac{h}{4} \frac{4\nu-1}{1-\nu} \right) + \frac{2P}{3M} h_e^2 \right]^{-1}$$

$$\Phi = \frac{2(1-\nu)}{M(1-2\nu)} \left[t_z^- + h h_e \nabla^2 t_z^- + h_e \left(\frac{\partial t_x^+}{\partial x} + \frac{\partial t_y^+}{\partial y} \right) - \left(3h_e \alpha_e + h \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \right) \theta \right]$$



Фиг. 2

при $x = 0$ удовлетворяющее условиям свободного края интегрально. Это решение при $\theta = \text{const}$ имеет вид

$$\sigma = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} + B \quad (4.6)$$

$$A_{mn} = \frac{4k^2}{ab} \left[\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 + k^2 \right]^{-1} \int_0^a \int_0^b (\Phi - B) \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b} dx dy$$

$$B = \frac{2h(1+\nu)G\alpha\theta}{h\nu + h_c(1-\nu)}$$

Деформированное состояние трехслойной пластины представлено на фиг. 2.

Рассмотренная задача является, в частности, модельной задачей для расчета резинометаллических сейсмоизоляторов [15], и принятая для получения решения (4.3)–(4.4), (4.6) точность достаточна для практических расчетов.

В заключение отметим, что использованный асимптотический метод позволяет рассматривать также иные классы задач для слоистых пластин, в том числе динамические.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668–686.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 2. С. 271–278.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении неклассических краевых задач для двухслойных анизотропных термоупругих оболочек // Изв. АН АрмССР. Механика. 1989. Т. 42. № 3. С. 28–36.
4. Агаловян Л.А., Асратян М.Г., Геворкян Р.С. К асимптотическому решению задачи о действии сосредоточенной силы и кусочно-непрерывной нагрузки на двухслойную полосу // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 831–836.
5. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит, 1997. 414 с.
6. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Механика, Изд-во Ереван. ун-та, 1982. Вып. 2. С. 7–12.
7. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией // Тр. 4-го симпоз. по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С. 105–110.
8. Гольденвейзер А.Л. Общая теория тонких упругих тел (оболочки, покрытия, прокладки) // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 5–17.
9. Гольденвейзер А.Л. Граничные условия в двумерной теории оболочек. Математический аспект вопроса // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 4. С. 664–677.

10. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
11. Бидерман В.Л. О сжатии резиновых амортизаторов и прокладок // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1962. № 3. С. 154–158.
12. Лавендел Э.Э. Расчет резинотехнических изделий. М.: Машиностроение, 1976. 232 с.
13. Черных К.Ф., Милякова Л.В. Тонкие резинометаллические элементы // Вестн. ЛГУ. 1981. № 19. Вып. 4. С. 88–96.
14. Мальков В.М. Линейная теория тонкого слоя из малосжимаемого материала // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 1. С. 52–54.
15. Kelly J.M. The influence of plate flexibility on the buckling load of elastomeric isolators // Report № UCB/EERC-94/03. 1994. 59 p.

Ереван
e-mail: mechins@sci.am

Поступила в редакцию
30.VII.2001